KƏSR TƏRTİBLİ İNTEQRO-DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN ÜÇNÖQTƏLİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

N.Ə.ƏLİYEV, V.Ə.OSMANOV
Bakı Dövlət Universiteti
Saracli@mail.ru

Burada α tərtibdən kəsr tərtibli inteqro-diferensial tənlik üçün üç nöqtəli sərhəd məsələsinə baxılır. Bu məsələnin həllində Riman-Liuvill mənada kəsr tərtibdən inteqrallamadan istifadə olunur. Məsələni həll edərkən, məsələ ikinci növ , requlyar nüvəli Volterra-Fredholm hədli inteqral tənliyə gətirilir. Volterra-Fredholm tipli inteqral tənliyi həll etmək üçün təqribi hesablama üsulu olan ardıcıl yerinə yazma üsulundan istifadə olunur. Bu üsulu bütün hədlərdə aparsaq məsələ mürəkkəbləşər. Ona görə iterasiya üsulunu ancaq Volterra həddində aparmaqla bu həddi kifayət qədər kiçiltmək mümükündür. Və sonda bu həddi xəta kimi qəbul edərək atılır və alınan ikinci növ Fredholm tənliyi üçün Rezolvent sırası qurulur. Alınan həll təqribi həll kimi qəbul olunur.

Açar sözlər: Üç nöqtəli məsələ, Sərhəd məsələsi, İnteqro-differensial tənlik, Kəsr tərtibli tənlik

Məlumdur ki, adi diferensial tənliklər üçün baxılan sərhəd məsələlərinin araşdırılması çox zaman bu məsələləri ikinci növ inteqral tənliyə gətirməklə aparılır [1], [2]. Bəzən bu cür məsələlər Y.Məmmədovun araşdırdığı ikinci növ Volterra-Fredholm tipli inteqral tənliyə gətirilərk araşdırılır [3], [4]. Biz burada törəməsi kəsr tərtibdən olan adi inteqro-diferensial tənlik üçün qoyulmuş üçnöqtəli sərhəd məsələsini özündə həm Volterra, həm də Fredholm hədləri tutan ikinci növ inteqral tənliyə gətirməklə kifayətlənmişik.

Bu cür tənliklərin araşdırılması isə ardıcıl yerinə yazma üsuludur. Belə ki, bu üsul bütün hədlərdə aparılarsa, proses mürəkkəbləşər. Ona görə də ardıcıl yerinə yazma üsulu ancaq Volterra həddində aparılmaqla bu həddin nüvəsi istənilən qədər kiçik edilə bildiyindən, bu hədd xəta kimi atılır və alınan ikinci növ Fredholm tənliyi üçün Rezolvent sırası qurulur.

Məsələnin qoyuluşu: Aşağıdakı kimi α tərtibdən kəsr tərtibli inteqro-diferensial tənliyə baxılır. Bu tənliyi həll etmək üçün əvvəlcə tənlik hər iki tərəfdən Riman-Liuvill mənada inteqrallanır. Bu məsələnin həlli zamanı Dirakın-Delta funksiyasından istifadə olunur.

$$D_{x_0}^{\alpha} y(x) + a y(x) + \int_{x_0}^{x} K(x,t) y(t) dt = f(x), \quad x \in (x_0, x_2), \qquad (1)$$

$$y(x_0) + a_1 y(x_1) + b_1 y(x_2) = c_1 \qquad (2)$$

Burada $\alpha \in (0,1)$, a_1, b_1, c_1 verilmiş sabitlərdir, $0 < x_0 < x_1 < x_2, K(x,t)$ və $f(x)$ verilmiş kəsilməz funksiyalardır, $y(x)$ axtarılan funksiyadır. Verilmiş (1) tənliyinin hər iki tərəfindən α tərtib inteqral alaq:

$$I_{x_0}^{\alpha} D_{x_0}^{\alpha} y(x) + a I_{x_0}^{\alpha} y(x) + I_{x_0}^{\alpha} \int_{x_0}^{x} K(x,t) y(t) dt = I_{x_0}^{\alpha} f(t),$$

$$y(x) + c\frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} + a\int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi \int_{x_0}^{\xi} K(\xi,t) y(t) dt = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi$$

və ya

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi - \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \int_{x_0}^{\xi} K(\xi,t) y(t) dt - a\int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi - c\frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} \qquad (3)$$

Aldığımız (3) ifadəsindən istifadə etməklə (2) sərhəd şərtlərində olan qiymətləri hesablayaq.

$$y(x_0) = -c\frac{x_0^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} \qquad (4)$$

$$y(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi - \int_{x_0}^{x_1} y(t) dt \int_{t}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi,t) d\xi - a\int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(t) dt - c\frac{x_1^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}, \qquad (5)$$

$$y(x_2) = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi - \int_{x_0}^{x_2} y(t) dt \int_{t}^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi,t) d\xi - a\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(t) dt - c\frac{x_2^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}, \qquad (6)$$

(4)-(6) qiymətlərini (2) sərhəd şərtində yerinə yazsaq alarıq:

$$-c\frac{x_0^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}-ca_1\frac{x_1^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}-$$

$$cb_1\frac{x_2^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}=a_1\int_{x_0}^{x_1}y(t)dt\left[\int_t^{x_1}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)d\xi+a\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\right]-$$

$$a_1\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}f(\xi)d\xi+b_1\int_{x_0}^{x_2}y(t)dt[\int_t^{x_2}\frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)d\xi+$$

$$a\frac{(x_2-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}]-$$

$$b_1\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}f(\xi)d\xi \qquad (7)$$

Əgər

$$\Delta\equiv\frac{x_0^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha_!!}+a_1\frac{x_1^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}+b_1\frac{x_2^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}\neq 0, \qquad (8)$$

Onda (7)-dən ixtiyari C sabiti aşağıdakı şəkildə tapılmış olar:

$$C=-\frac{1}{\Delta}\Bigg\{a_1\int_{x_0}^{x_1}y(t)dt[\int_t^{x_1}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)d\xi+a\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\Bigg]$$

$$-a_1\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}f(\xi)d\xi$$

$$+b_1\int_{x_0}^{x_2}y(t)dt[\int_t^{x_2}\frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)d\xi+a\frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!]}$$

$$-b_1\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}f(\xi)d\xi\} \qquad (9)$$

C üçün aldığımız (9) ifadəsini (3)-də yerinə yazmaqla (1)-(2) sərhəd məsələsini aşağıdakı kimi inteqral tənliyə gətirmiş oluruq:

$$y(x)=-\int_{x_0}^{x}y(t)dt\int_t^{x}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)d\xi-a\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}y(t)dt+$$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}f(\xi)d\xi+$$

$$\frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}\frac{1}{\Delta}\{a_1\int_{x_0}^{x_1}y(t)dt[\int_t^{x_1}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\mathrm{K}(\xi,\mathrm{t})\mathrm{d}\xi+a\frac{(x_1-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}]-$$

$$a_1\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}f(\xi)d\xi+b_1\int_{x_0}^{x_2}y(t)dt[\int_t^{x_2}\frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)d\xi+$$

$$a\frac{(x_2-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}]-b_1\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\} \qquad (10)$$

Burada müəyyən çevirmələr aparsaq alarıq:

$$y(x)+\int_{x_0}^{x}y(t)dt\left[\int_{t}^{x}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)d\xi+a\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\right]$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}y(t)dt[\frac{x^{\alpha-1}a_1}{(\alpha-1)!\Delta}\int_{t}^{x_1}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)d\xi$$
$$+\frac{x^{\alpha-1}a_1}{(\alpha-1)!\Delta}a\frac{(x_1-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}]$$
$$-\int_{x_0}^{x_2}y(t)dt[\frac{x^{\alpha-1}b_1}{(\alpha-1)!\Delta}\int_{t}^{x_2}\frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)d\xi$$
$$+\frac{x^{\alpha-1}b_1}{(\alpha-1)!\Delta}\frac{(x_2-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}]$$
$$=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}f(\xi)d\xi$$
$$-\frac{x^{\alpha-1}a_1}{(\alpha-1)!\Delta}\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}f(\xi)d\xi$$
$$-\frac{x^{\alpha-1}b_1}{(\alpha-1)!\Delta}\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}f(\xi)d\xi \qquad (11)$$

Beləliklə qoyulmuş kəsr tərtibli inteqro-diferensial tənlik üçün üçnöqtəli sərhəd məsələsi Volterra və Fredholm hədli ikinci növ inteqral tənliyə gətirilmiş oldu.

Teorem1: Əgər $\alpha\in(0,1), a, a_1, b_1$ və c_1 verilmiş sabit ədədlər olmaqla, $00<x_0<x_1<x_2$, $K(x,t)$ və $f(x)$ verilmiş kəsilməz funksiyalardırsa, onda (1)-(2) sərhəd məsələsi (10) ikinci növ inteqral tənliyə gətirilir.

Qeyd. Alınmış (10) inteqral tənliyində Volterra həddinə nəzərən iterasiyalar aparmaqla bu həddin nüvəsini kafi qədər kiçiltmək mümkündür. Onda bu həddi xəta kimi qəbul etməklə alınan ikinci növ Fredholm tipli inteqral tənlik həll olunur. Bu cür alınmış həll qoyulmuş məsələnin təqribi həlli kimi qəbul edilə bilər.

ƏDƏBİYYAT

1.Дезин А.А., Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980, 208 с.
2.Ловитт У.В., Линейные интегральные уравнения ГИТТЛ. М., 1957, 268 с.
3.Məmmədov Y.C. Təqribi hesablama üsulları. Bakı: Maarif, 1986, 264 s.
4. Mehran Fatemi, Nihan Aliyev, Sadaghat Shahmorad, Existence and uniqueness of solution for a fractional order inteqro-differentian equation with non-local and Scientific research. Applied mathematics, 2011, 2, 1291-1296.

ТРЕХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.А.АЛИЕВ, В.А.ОСМАНОВ

РЕЗЮМЕ

В данном случае рассматривается на трехточечной граничной задаче для простого линейного интегро-дифференциального уравнения дробного порядка. Сама проблема сводится к уравнению второго типа регулярного ядра Волтерра-Фредьголма.

Изучение таких уравнений представляет собой метод последовательной подстановки. Так что, если использовать этот метод во всех членах, процесс будет сложным. Следовательно, поскольку ядро этого члена можно сделать сколь угодно малым путем выполнения метода последовательной подстановки только на члене Вольтерра, этот член отбрасывается как погрешность, и строится последовательность разрешения для второго типа полученного уравнения Фредгольма.

Ключевые слова: Трехточечная задача, Краевая задача, Интегро-дифференциальное уравнение, Уравнение дробного порядка.

THREE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FRACTIONAL INTEQRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

N.A.ALIYEV, V.Ə.OSMANOV

SUMMARY

In the present case, the problem of a three-point boundary for a simple, linear integro-differential equation with a fraction is considered. This problem itself is brought to the equation of the second type of regular nucleus by both Voltaire and Fredholm.

The study of such equations is a method of sequential substitution. Thus, if this method is carried out to the fullest term, the process becomes more complicated. Therefore, since the nucleus of this equation can be made as small as desired by performing the sequential substitution method only at the Volterra term, this equation is discarded as an error and a resolution sequence is constructed for the second type of Fredholm equation obtained.

Key words: Three-point problem, Boundary value problem, Inteqro-differential equation, Fractional-order differential equation, global boundary conditions.