BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* **2020**

RİYAZİYYAT

УДК 519. 633

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ОДНОЙ ЗАДА- ЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

З.Ф. ХАНКИШИЕВ
Бакинский Государственный Университет
hankishiyev.zf@yandex.com

В настоящей работе дается применение метода конечных разностей к решению одной задачи для линейного дифференциального уравнения параболического типа с интегральными граничными условиями. Строится разностная задача, аппроксимирующая исходную задачу со вторым порядком точности. Доказывается сходимость и определяется скорость сходимости.

Ключевые слова: метод конечных разностей, интегральные граничные условия, разностная задача, погрешность аппроксимации, принцип максимума, сходимость.

1. Постановка задачи

В настоящей работе дано применение метода конечных разностей к решению следующей задачи:

найти непрерывную в замкнутой области $\overline{D} = \{0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + bu(x,t) + f(x,t),\ 0 < x < l,\ 0 < t \le T, \qquad (1.1)$$

граничным условиям

$$\begin{aligned} &\int_0^l (cx+d)u(x,t)dx = \mu_1(t), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le t \le T, \\ &\int_0^l c(x)u(x,t)dx = \mu_2(t), \end{aligned} \qquad (1.2)$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l. \qquad (1.3)$$

Здесь $f(x,t),\ \ \mu_1(t),\ \mu_2(t),\varphi(x)$ - известные непрерывные функции своих аргументов, $a,b,c,\ d-$действительные числа, $c(x)$ - известная функция, удовлетворяющая условию $c''(x)=cx+d$. Очевидно, что функция $c(x)$ определяется равенством

$$c(x)=\frac{c}{6}x^3+\frac{d}{2}x^2+ex+g,$$

где $e,\ g-$произвольные действительные числа.

Отметим, что интегральные граничные условия в (1.2) представляют определенную трудность при численном решении подобных задач. В некоторых работах интегральные граничные условия путем замены искомого решения заменяются локальными граничными условиями (см., например [1],[2],[3]). В настоящей работе эти граничные условия также заменяются локальными граничными условиями, и к решению построенной новой задачи применяется метод конечных разностей. Строится разностная задача, аппроксимирующая эту задачу со вторым порядком точности и исследуется сходимость метода.

Предполагается, что задача (1.1)-(1.3) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения частными производными.

2. Сведение решение задачи (1.1)-(1.3) к решению задачи с локальными граничными условиями

Рассмотрим первое граничное условие в (1.2) и продифференцируем его по переменной t:

$$\int_0^l (cx+d)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx=\mu_1'(t).$$

Отсюда в силу уравнения (1.1) получим:

$$a^2\int_0^l (cx+d)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx=\mu_1'(t)-b\mu_1(t)-\int_0^l (cx+d)f(x,t)dx. \qquad (2.1)$$

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралу в левой части этого равенства, после элементарных преобразований, получим:

$$\int_0^l (cx+d)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx=(cl+d)\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}-d\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-cu(l,t)+cu(0,t).$$

С учетом этого равенства, из (2.1) имеем:

$$(cl+d)\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}-d\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-cu(l,t)+cu(0,t)=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[\mu_1'(t)-b\mu_1(t)-\int_0^l (cx+d)f(x,t)dx\right]. \qquad (2.2)$$

Теперь рассмотрим второе граничное условие в (1.2) и продифференцируем его, также, по переменной t:

$$\int_0^l c(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx = \mu_2'(t).$$

Отсюда в силу уравнения (1.1) имеем:

$$a^2\int_0^l c(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx = \mu_2'(t) - b\mu_2(t) - \int_0^l c(x)f(x,t)dx. \qquad (2.3)$$

С другой стороны

$$\int_0^l c(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx = c(l)\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} - c(0)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - c'(l)u(l,t) + c'(0)u(0,t) + \mu_1(t).$$

Отсюда и из равенства (2.3) следует справедливость равенства

$$\begin{gathered} c(l)\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} - c(0)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - c'(l)u(l,t) + c'(0)u(0,t) = \\ = \frac{1}{a^2}\left[\mu_2'(t) - b\mu_2(t) - \int_0^l c(x)f(x,t)dx\right] - \mu_1(t). \end{gathered} \qquad (2.4)$$

Таким образом, вместо граничных условий (1.2) получили условия (2.2) и (2.4). Исключив из этих граничных условий, сначала $\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}$, затем $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}$ приходим к условиям следующего вида:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \alpha_0 u(0,t) + \alpha_1 u(l,t) = \tilde{\mu}_1(t), \\ &\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \beta_0 u(0,t) + \beta_1 u(l,t) = \tilde{\mu}_2(t), \end{aligned} \qquad 0 \le t \le T, \qquad (2.5)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{-c\cdot c(l) + (cl+d)\cdot c'(0)}{d\cdot c(l) - (cl+d)\cdot c(0)}, \quad \alpha_1 = \frac{c\cdot c(l) - (cl+d)\cdot c'(l)}{d\cdot c(l) - (cl+d)\cdot c(0)}, \qquad (2.6)$$

$$\beta_0 = \frac{-c\cdot c(0) + d\cdot c'(0)}{d\cdot c(l) - (cl+d)\cdot c(0)}, \quad \beta_1 = \frac{c\cdot c(0) - d\cdot c'(l)}{d\cdot c(l) - (cl+d)\cdot c(0)}, \qquad (2.7)$$

$$\tilde{\mu}_1(t) = \frac{1}{d\cdot c(l) - (cl+d)\cdot c(0)}\left[-\frac{c(l)}{a^2}\left(\mu_1'(t) - b\mu_1(t) - \int_0^l (cx+d)\,f(x,t)dx\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{cl+d}{a^2}\left(\mu_2'(t) - b\mu_2(t) - \int_0^l c(x)\,f(x,t)dx\right)\right] - (cl+d)\mu_1(t),$$

$$\tilde{\mu}_2(t)=\frac{1}{d\cdot c(l)-(cl+d)\cdot c(0)}\left[-\frac{c(0)}{a^2}\left(\mu_1'(t)-b\mu_1(t)-\int_0^l (cx+d)\, f(x,t)dx\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{d}{a^2}\left(\mu_2'(t)-b\mu_2(t)-\int_0^l c(x)\, f(x,t)dx\right)\right]-d\cdot\mu_1(t).$$

3. Построение разностной задачи

Для построения разностной задачи, соответствующей задаче (1.1), (2.5), (1.3), сначала в области $\overline{D}$ построим сеточную область. С этой целью разделим отрезок $[0,l]$ оси Ox точками $x_n=nh, n=0,1,2,...,N$, $h=l/N$, на N равных частей, а отрезок $[0,T]$ оси Ot точками $t_j=j\tau,\ j=0,1,2,\dots,j_0,\ \tau=T/j_0$, на j_0 равных частей. Определим в области $\overline{D}$ сетку $\overline{\omega}_{h\tau}=\{(x_n,t_j),\ n=0,1,2,\dots,N,\ j=0,1,2,...,j_0\}$. Значение сеточной функции $y(x,t)$ в узле (x_n,t_j) сетки, обозначим через y_n^j.

С целью получения аппроксимации с точностью $O(h^2+\tau^2)$, предположим, что уравнение (1.1) выполняется и на границах $x=0$ и $x=l$ области $\overline{D}$. При выполнении этого условия, используя формулу Тейлора, легко можно получить справедливость следующих равенств:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{u(h,t)-u(0,t)}{h}-\frac{h}{2a^2}\left(\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}-bu(0,t)-f(0,t)\right)+O(h^2),$$
$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\frac{u(x_N,t)-u(x_{N-1},t)}{h}+\frac{h}{2a^2}\left(\frac{\partial u(l,t)}{\partial t}-bu(l,t)-f(l,t)\right)+O(h^2).$$

Учитывая эти равенства в граничных условиях (2.5) получим:

$$\frac{u(h,t)-u(0,t)}{h}-\frac{h}{2a^2}\left(\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}-bu(0,t)\right)+\alpha_0u(0,t)+\alpha_1u(l,t)=$$
$$=\tilde{\mu}_1(t)-\frac{h}{2a^2}\,f(0,t)+O(h^2),$$
$$\frac{u(x_N,t)-u(x_{N-1},t)}{h}+\frac{h}{2a^2}\left(\frac{\partial u(l,t)}{\partial t}-bu(l,t)\right)+\beta_0u(0,t)+\beta_1u(l,t)=$$
$$=\tilde{\mu}_2(t)+\frac{h}{2a^2}\,f(l,t)+O(h^2).$$

С учетом этих равенств, в сеточной области $\overline{\omega}_{h\tau}$, задаче (1.1), (2.5), (1.3) можем сопоставить следующую разностную задачу [4]:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^{j+1}-y_0^{j+1}}{h}+\frac{y_1^{j}-y_0^{j}}{h}\right)-\frac{h}{2a^2}\left(\frac{y_0^{j+1}-y_0^{j}}{\tau}-b\,\frac{y_0^{j+1}+y_0^{j}}{2}\right)+\alpha_0\,\frac{y_0^{j+1}+y_0^{j}}{2}+$$

$$+\alpha_1\,\frac{y_N^{j+1}+y_N^{j}}{2}=-f_0^{\,j},$$

$$\frac{y_n^{j+1}-y_n^{j}}{\tau}=\frac{a^2}{2}\left(\frac{y_{n-1}^{j+1}-2y_n^{j+1}+y_{n+1}^{j+1}}{h^2}+\frac{y_{n-1}^{j}-2y_n^{j}+y_{n+1}^{j}}{h^2}\right)-\frac{b}{2}\left(y_n^{j+1}+y_n^{j}\right)=f_n^{\,j},$$

$$n=1,2,\ldots,N-1, \qquad (3.1)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y_N^{j+1}-y_{N-1}^{j+1}}{h}+\frac{y_N^{j}-y_{N-1}^{j}}{h}\right)+\frac{h}{2a^2}\left(\frac{y_N^{j+1}-y_N^{j}}{\tau}-b\,\frac{y_N^{j+1}+y_N^{j}}{2}\right)+\beta_0\,\frac{y_0^{j+1}+y_0^{j}}{2}+$$

$$+\beta_1\,\frac{y_N^{j+1}+y_N^{j}}{2}=f_N^{\,j},\quad j=0,1,\ldots,\,j_0-1,$$

$$y_n^0=\varphi(x_n),\quad n=0,1,2,\ldots,N. \qquad (3.2)$$

Здесь $f_0^{\,j}=-\tilde{\mu}_1\left(t_j+\frac{\tau}{2}\right)+\frac{h}{2a^2}\,f\left(0,t_j+\frac{\tau}{2}\right),\ f_n^{\,j}=f\left(x_n,t_j+\frac{\tau}{2}\right),$

$$n=1,2,\ldots,N-1,\quad f_N^{\,j}=\tilde{\mu}_2\left(t_j+\frac{\tau}{2}\right)+\frac{h}{2a^2}\,f\left(l,t_j+\frac{\tau}{2}\right),\ j=0,1,\ldots,j_0-1.$$

Следует отметить, что эта разностная задача аппроксимирует задачу (1.1), (2.5), (1.3) с точностью $O\left(h^2+\tau^2\right)$, если уравнение (1.1) выполняется и на участках границы $x=0$ и $x=l$ области $\overline{D}$ и решение $u=u(x,t)$ – достаточно гладкая функция.

Разностную задачу (3.1)-(3.2) можно решить, например, методом прогонки [5].

4. Исследование сходимости разностной задачи (3.1)-(3.2)

Рассмотрим разностную задачу (3.1)-(3.2) и перепишем ее в следующем виде:

$$\left(-\frac{1}{2h}-\frac{h}{2a^2\tau}+\frac{bh}{4a^2}+\frac{\alpha_0}{2}\right)y_0^{j+1}+\frac{1}{2h}\,y_1^{j+1}+\frac{\alpha_1}{2}\,y_N^{j+1}+\left(-\frac{1}{2h}+\frac{h}{2a^2\tau}+\frac{bh}{4a^2}+\frac{\alpha_0}{2}\right)y_0^{j}+$$

$$+\frac{1}{2h}\,y_1^{j}+\frac{\alpha_1}{2}\,y_N^{j}=-f_0^{\,j},$$

$$-\frac{a^2}{2h^2}\,y_{n-1}^{j+1}+\left(\frac{1}{\tau}+\frac{a^2}{h^2}-\frac{b}{2}\right)y_n^{j+1}-\frac{a^2}{2h^2}\,y_{n+1}^{j+1}-\frac{a^2}{2h^2}\,y_{n-1}^{j}+\left(-\frac{1}{\tau}+\frac{a^2}{h^2}-\frac{b}{2}\right)y_n^{j}-$$

$$-\frac{a^2}{2h^2}y_{n+1}^j = f_n^j, \quad n=1,2,...,N-1, \qquad (4.1)$$

$$\left(\frac{1}{2h}+\frac{h}{2a^2\tau}-\frac{bh}{4a^2}+\frac{\beta_1}{2}\right)y_N^{j+1}-\frac{1}{2h}y_{N-1}^{j+1}+\frac{\beta_0}{2}y_0^{j+1}+\left(\frac{1}{2h}-\frac{h}{2a^2\tau}-\frac{bh}{4a^2}+\frac{\beta_1}{2}\right)y_N^j-$$

$$-\frac{1}{2h}y_{N-1}^j+\frac{\beta_0}{2}y_0^j = f_N^j, \quad j=0,1,\ldots,j_0-1,$$

$$y_n^0=\varphi(x_n), \quad n=0,1,2,\ldots,N. \qquad (4.2)$$

Теорема 1 (Принцип максимума). Пусть сеточная функция $y_n^j,\ n=0,1,\ldots,N,\quad j=0,1,2,...,\ j_0$, удовлетворяет задаче (4.1)-(4.2). Пусть выполняются условия $f_n^j \le 0 \quad (f_n^j \ge 0),\ n=0,1,2,\ldots,N,\ j=0,1,2,\ldots,j_0-1$. Если

$$\alpha_1 \ge 0,\ \alpha_0+\alpha_1 \le 0,\ \beta_0 \le 0,\ \beta_0+\beta_1 \ge 0,\ b \le 0,$$

$$\tau \le \min\left(\frac{2h^2}{2a^2-bh^2}, \frac{2h^2}{2a^2(1-\alpha_0 h)-bh^2}, \frac{2h^2}{2a^2(1+\beta_1 h)-bh^2}\right), \qquad (4.3)$$

то решение $y_n^j,\ n=0,1,\ldots,N,\ j=0,1,\ldots,j_0$, задачи (4.1)-(4.2), отличное от постоянного, не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения при $n=0,1,...,\ N,\ j=1,2,...,\ j_0$.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Пусть $f_n^j \le 0,\ n=0,1,...,N,\quad j=0,1,...,j_0-1,$ и выполняются условия (4.3), но решение y_n^j задачи (4.1)-(4.2) принимает наибольшее положительное значение при $n=n_0,\ j=i+1,\ 0\le n_0 \le N, 0 \le i \le j_0$:

$$y_{n_0}^{i+1} = \max_{0\le n\le N, 0\le j\le j_0} y_n^j = M > 0.$$

Пусть $n_0=0$. Не уменьшая общности, можем считать, что $y_0^{i+1} > y_1^{i+1}$.

Рассмотрим первое уравнение в (4.1) при $j=i$:

$$-f_0^i = \left(-\frac{1}{2h}-\frac{h}{2a^2\tau}+\frac{bh}{4a^2}+\frac{\alpha_0}{2}\right)y_0^{i+1}+\frac{1}{2h}y_1^{i+1}+\frac{\alpha_1}{2}y_N^{i+1}+\left(-\frac{1}{2h}+\frac{h}{2a^2\tau}+\right.$$

$$\left.+\frac{bh}{4a^2}+\frac{\alpha_0}{2}\right)y_0^i+\frac{1}{2h}y_1^i+\frac{\alpha_1}{2}y_N^i < \left(-\frac{1}{2h}-\frac{h}{2a^2\tau}+\frac{bh}{4a^2}+\frac{\alpha_0}{2}\right)M+$$

$$+\frac{1}{2h}y_1^i+\frac{\alpha_1}{2}y_N^i < \left(-\frac{1}{2h}-\frac{h}{2a^2\tau}+\frac{bh}{4a^2}+\frac{\alpha_0}{2}\right)M+\frac{1}{2h}M+\frac{\alpha_1}{2}M+$$

$$+\left(-\frac{1}{2h}+\frac{h}{2a^2\tau}+\frac{bh}{4a^2}+\frac{\alpha_0}{2}\right)M+\frac{1}{2h}M+\frac{\alpha_1}{2}M=\left(\alpha_0+\alpha_1+\frac{bh}{2a^2}\right)M\le 0,$$

так как по условию теоремы $\alpha_0+\alpha_1\le 0$ и $b\le 0$.

Это противоречит условию $f_0^i\le 0$.

Пусть $0<n_0<N$. Не уменьшая общности, можем считать, что $y_{n_0}^{i+1}>y_{n_0-1}^{i+1}$.

Рассмотрим разностное уравнение в (5.1) при $n=n_0$, $j=i$:

$$f_{n_0}^i=-\frac{a^2}{2h^2}y_{n_0-1}^{i+1}+\left(\frac{1}{\tau}+\frac{a^2}{h^2}-\frac{b}{2}\right)y_{n_0}^{i+1}-\frac{a^2}{2h^2}y_{n_0+1}^{i+1}-\frac{a^2}{2h^2}y_{n_0-1}^{i}+\left(-\frac{1}{\tau}+\frac{a^2}{h^2}-\frac{b}{2}\right)y_{n_0}^{i}-$$

$$-\frac{a^2}{2h^2}y_{n_0+1}^{i}>-\frac{a^2}{2h^2}M+\left(\frac{1}{\tau}+\frac{a^2}{h^2}-\frac{b}{2}\right)M-\frac{a^2}{2h^2}M-\frac{a^2}{2h^2}M+\left(-\frac{1}{\tau}+\frac{a^2}{h^2}-\frac{b}{2}\right)M-$$

$$-\frac{a^2}{2h^2}M=-bM\ge 0,$$

т.е. $f_{n_0}^i>0,$ что противоречит условию $f_{n_0}^i\le 0$.

Пусть $n_0=N$. Не уменьшая общности, можем считать, что $y_N^{i+1}>y_{N-1}^{i+1}$.

Рассмотрим последнее уравнение в (4.1) при $j=i$:

$$f_N^i=\left(\frac{1}{2h}+\frac{h}{2a^2\tau}-\frac{bh}{4a^2}+\frac{\beta_1}{2}\right)y_N^{i+1}-\frac{1}{2h}y_{N-1}^{i+1}+\frac{\beta_0}{2}y_0^{i+1}+\left(\frac{1}{2h}-\frac{h}{2a^2\tau}-\frac{bh}{4a^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta_1}{2}\right)y_N^i-\frac{1}{2h}y_{N-1}^i+\frac{\beta_0}{2}y_0^i>\left(\frac{1}{2h}+\frac{h}{2a^2\tau}-\frac{bh}{4a^2}+\frac{\beta_1}{2}\right)M-\frac{1}{2h}M+\frac{\beta_0}{2}M+$$

$$+\left(\frac{1}{2h}-\frac{h}{2a^2\tau}-\frac{bh}{4a^2}+\frac{\beta_1}{2}\right)M-\frac{1}{2h}M+\frac{\beta_0}{2}M\ge\left(\beta_0+\beta_1-\frac{bh}{2a^2}\right)\ge 0,$$

так как по условию теоремы $\beta_0+\beta_1\ge 0, b\le 0$.

Это противоречит условию $f_N^i\le 0$.

Первая часть теоремы доказана. Аналогичным образом можно доказать вторую часть теоремы.

Теорема 2. Пусть сеточная функция $y_n^j, n=0,1,\ldots,N,\ j=0,1,\ldots j_0$, удовлетворяет задаче (4.1)-(4.2). Пусть выполняются условия $f_n^j\le 0,\ \varphi(x_n)\le 0\ \left(f_n^j\ge 0,\ \varphi(x_n)\ge 0\right), n=0,1,\ldots,N,\ j=0,1,\ldots,\ j_0-1.$ Если выполняются условия (4.3), то $y_n^j\le 0\ \left(y_n^j\ge 0\right), n=0,1,\ldots,N,\quad j=0,1,\ldots j_0$.

Справедливость утверждения этой теоремы следует из принципа максимума.

Следствие. Пусть выполняются условия (4.3). Тогда однородная задача, соответствующая задаче (4.1)-(4.2), имеет только тривиальное решение $y_n^j = 0,\ n = 0,1,..., N,\ j = 0,1,..., j_0$.

Теорема 3 (Теорема сравнения). Пусть $y_n^j, n = 0,1,\ldots,N$, $j = 0,1,... j_0 -$ решение разностной задачи (4.1)-(4.2), а $\tilde{y}_n^j, n = 0,1,\ldots,N$, $j = 0,1,... j_0 -$ решение разностной задачи, полученной при замене в (4.1) - (4.2) функций $f_n^j, n = 0,1,\ldots,N, j = 0,1,2,\ldots,j_0 - 1,$ и $\varphi(x_n),\ n = 0,1,..., N$, соответственно, на $\tilde{f}_n^j, n = 0,1,\ldots,N, j = 0,1,2,\ldots,j_0 - 1,$ и $\tilde{\varphi}(x_n), n = 0,1,..., N$. Тогда, если выполняются условия $\left|f_n^j\right| \le \tilde{f}_n^j,\ n = 0,1,\ldots,N,\ j = 0,1,\ldots,j_0 - 1,$ и $\left|\varphi(x_n)\right| \le \tilde{\varphi}(x_n),\quad n = 0,1,\ldots,N,$ то при выполнении условий (4.3) имеют место неравенства $\left|y_n^j\right| \le \tilde{y}_n^j,\quad n = 0,1\ldots, N,\ j = 0,1,..., j_0$.

Эту теорему можно доказать аналогичным образом, как доказываются подобные теоремы сравнения.

Используя результаты этих теорем, докажем сходимость метода конечных разностей.

С этой целью в сеточной области $\overline{\omega}_{h\tau}$ определим сеточную функцию z_n^j равенством

$$z_n^j = y_n^j - u(x_n, t_j),\ n = 0,1,\ldots,N,\ \ j = 0,1,\ldots j_0.$$

Здесь y_n^j – решение разностной задачи (3.1)-(3.2) или (4.1)-(4.2), $u(x_n, t_j)$ - значение решения задачи (1.1), (2.5), (1.3) в узле (x_n, t_j) сетки $\overline{\omega}_{h\tau}$.

Если найденное из этого равенства выражение y_n^j подставим в разностной задаче (3.1) - (3.2), то относительно функции z_n^j получим следующую задачу:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z_1^{j+1} - z_0^{j+1}}{h} + \frac{z_1^j - z_0^j}{h}\right) + \alpha_0 \frac{z_0^{j+1} + z_0^j}{2} + \alpha_1 \frac{z_N^{j+1} + z_N^j}{2} - \frac{h}{2a^2}\left(\frac{z_0^{j+1} - z_0^j}{\tau} - b\frac{z_0^{j+1} + z_0^j}{2}\right) = -\psi_0^j,$$

$$\frac{z_n^{j+1} - z_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2}\left(\frac{z_{n-1}^{j+1} - 2z_n^{j+1} + z_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{z_{n-1}^j - 2z_n^j + z_{n+1}^j}{h^2}\right) - \frac{b}{2}\left(z_n^{j+1} + z_n^j\right) = \psi_n^j,$$

$$n = 1,2,\ldots,N-1, \qquad (4.4)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z_N^{j+1}-z_{N-1}^{j+1}}{h}+\frac{z_N^j-z_{N-1}^j}{h}\right)+\beta_0\frac{z_0^{j+1}+z_0^j}{2}+\beta_1\frac{z_N^{j+1}+z_N^j}{2}+\frac{h}{2a^2}\left(\frac{z_N^{j+1}-z_N^j}{\tau}-\right.$$

$$\left.-b\frac{z_N^{j+1}+z_N^j}{2}\right)=\psi_N^j,\quad j=0,1,\ldots,j_0-1,$$

$$z_n^0=0,\quad n=0,1,2,\ldots,N. \tag{4.5}$$

Здесь $\psi_n^j, n=0,1,2,\ldots,N-$ определяют погрешность аппроксимации разностной задачи (3.1)-(3.2). Для них при определенных условиях, наложенных на решение уравнения (1.1), очевидно, справедлива оценка

$$\left|\psi_n^j\right|\le L\left(h^2+\tau^2\right),\quad n=0,1,2,\ldots,N, \tag{4.6}$$

где $L>0-$ некоторая постоянная.

Определим сеточную функцию $\tilde{z}_n^j$ равенством

$$\tilde{z}_n^j=L\xi\left(h^2+\tau^2\right)(2l-x_n),\ n=0,1,\ldots,N,\ j=0,1,\ldots,j_0, \tag{4.7}$$

где $\xi-$ некоторая положительная постоянная.

Пусть $b<0$. Для функции $\tilde{z}_n^j$ после элементарных преобразований получим:

$$\frac{\tilde{z}_n^{j+1}-\tilde{z}_n^j}{\tau}-\frac{a^2}{2}\left(\frac{\tilde{z}_{n-1}^{j+1}-2\tilde{z}_n^{j+1}+\tilde{z}_{n+1}^{j+1}}{h^2}+\frac{\tilde{z}_{n-1}^j-2\tilde{z}_n^j+\tilde{z}_{n+1}^j}{h^2}\right)-b\frac{\tilde{z}_n^{j+1}+\tilde{z}_n^j}{2}=$$

$$=-bL\xi\cdot\left(h^2+\tau^2\right)(2l-x_n)\ge-bL\xi\cdot\left(h^2+\tau^2\right)\cdot l\ge L\cdot\left(h^2+\tau^2\right),$$

$$n=1,2,\ldots,N-1,\quad j=0,1,2,\ldots,j_0-1,$$

если $\xi\ge-\dfrac{1}{bl}$.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{z}_1^{j+1}-\tilde{z}_0^{j+1}}{h}+\frac{\tilde{z}_1^j-\tilde{z}_0^j}{h}\right)+\alpha_0\frac{\tilde{z}_0^{j+1}+\tilde{z}_0^j}{2}+\alpha_1\frac{\tilde{z}_N^{j+1}+\tilde{z}_N^j}{2}-\frac{h}{2a^2}\left(\frac{\tilde{z}_0^{j+1}-\tilde{z}_0^j}{\tau}-\right.$$

$$\left.-b\frac{\tilde{z}_0^{j+1}+\tilde{z}_0^j}{2}\right)=L\xi\cdot\left(h^2+\tau^2\right)\cdot\left(-1+2\alpha_0 l+\alpha_1 l+\frac{blh}{a^2}\right)=L\xi\cdot\left(h^2+\tau^2\right)\cdot$$

$$\cdot\left(-1+\alpha_0 l+(\alpha_0+\alpha_1)l+\frac{blh}{a^2}\right)=-L\xi\cdot\left(h^2+\tau^2\right)\cdot\left(1-\alpha_0 l-(\alpha_0+\alpha_1)l-\frac{blh}{a^2}\right)=$$

$$=-\overline{\psi}_0^j,$$

где $\overline{\psi}_0^j=L\cdot\left(h^2+\tau^2\right)\cdot\left(1-\alpha_0 l-(\alpha_0+\alpha_1)l-\dfrac{blh}{a^2}\right)$ при $\xi=1$ и

$\left|\overline{\psi}_0^j\right|\ge L\cdot\left(h^2+\tau^2\right)$, т.к. $\alpha_0\le 0,\ \alpha_0+\alpha_1\le 0,\ b<0.$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{z}_N^{j+1}-\tilde{z}_{N-1}^{j+1}}{h}+\frac{\tilde{z}_N^{j}-\tilde{z}_{N-1}^{j}}{h}\right)+\beta_0\frac{\tilde{z}_0^{j+1}+\tilde{z}_0^{j}}{2}+\beta_1\frac{\tilde{z}_N^{j+1}+\tilde{z}_N^{j}}{2}+\frac{h}{2a^2}\left(\frac{\tilde{z}_N^{j+1}-\tilde{z}_N^{j}}{\tau}-\right.$$

$$\left.-b\frac{\tilde{z}_N^{j+1}+\tilde{z}_N^{j}}{2}\right)=L\xi\cdot\left(h^2+\tau^2\right)\cdot\left(1+(2\beta_0+\beta_1)l-\frac{blh}{2a^2}\right)\geq L\cdot\left(h^2+\tau^2\right),$$

если $1+(2\beta_0+\beta_1)l\geq\varepsilon>0,$ и $\xi\geq\dfrac{1}{\varepsilon}.$

Таким образом, для функции $\tilde{z}_n^j$ имеем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{z}_1^{j+1}-\tilde{z}_0^{j+1}}{h}+\frac{\tilde{z}_1^{j}-\tilde{z}_0^{j}}{h}\right)+\alpha_0\frac{\tilde{z}_0^{j+1}+\tilde{z}_0^{j}}{2}+\alpha_1\frac{\tilde{z}_N^{j+1}+\tilde{z}_N^{j}}{2}-\frac{h}{2a^2}\left(\frac{\tilde{z}_0^{j+1}-\tilde{z}_0^{j}}{\tau}-\right.$$

$$\left.-b\frac{\tilde{z}_0^{j+1}+\tilde{z}_0^{j}}{2}\right)=L\xi\cdot\left(h^2+\tau^2\right)\cdot\left(-1+2\alpha_0 l+\alpha_1 l+\frac{blh}{a^2}\right)=-\overline{\psi}_0^{\,j},\ \left|\overline{\psi}_0^{\,j}\right|\geq L\cdot\left(h^2+\tau^2\right),$$

$$\frac{\tilde{z}_n^{j+1}-\tilde{z}_n^{j}}{\tau}-\frac{a^2}{2}\left(\frac{\tilde{z}_{n-1}^{j+1}-2\tilde{z}_n^{j+1}+\tilde{z}_{n+1}^{j+1}}{h^2}+\frac{\tilde{z}_{n-1}^{j}-2\tilde{z}_n^{j}+\tilde{z}_{n+1}^{j}}{h^2}\right)-b\frac{\tilde{z}_n^{j+1}+\tilde{z}_n^{j}}{2}\geq$$

$$\geq L\cdot\left(h^2+\tau^2\right),\quad n=1,2,\ldots,N-1, \tag{4.8}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{z}_N^{j+1}-\tilde{z}_{N-1}^{j+1}}{h}+\frac{\tilde{z}_N^{j}-\tilde{z}_{N-1}^{j}}{h}\right)+\beta_0\frac{\tilde{z}_0^{j+1}+\tilde{z}_0^{j}}{2}+\beta_1\frac{\tilde{z}_N^{j+1}+\tilde{z}_N^{j}}{2}+\frac{h}{2a^2}\left(\frac{\tilde{z}_N^{j+1}-\tilde{z}_N^{j}}{\tau}-\right.$$

$$\left.-b\frac{\tilde{z}_N^{j+1}+\tilde{z}_N^{j}}{2}\right)\geq L\cdot\left(h^2+\tau^2\right),$$

если $b<0,\ \xi=\max\left(1,-\dfrac{1}{bl},\dfrac{1}{\varepsilon}\right).$

$$\tilde{z}_n^0=L\xi\left(h^2+\tau^2\right)\left(2l-x_n\right),\quad n=0,1,2,\ldots,N, \tag{4.9}$$

Сравнивая задачу (4.4) - (4.5) с задачей (4.8) - (4.9), в силу теоремы сравнения имеем

$$\left|z_n^j\right|\leq\tilde{z}_n^j,\ n=0,1,\ldots,N,\ j=0,1,\ldots,j_0,$$

или

$$\left|y_n^j-u(x_n,t_j)\right|\leq L\xi(h^2+\tau^2)\cdot 3l,\ n=0,1,\ldots,N,\ j=0,1,\ldots,j_0, \tag{4.10}$$

где

$$\xi=\max\left(1,\ -\frac{1}{bl},\ \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Итак, имеет место следующая

Теорема 4. Пусть решение задачи (1.1),(2.5),(1.3) имеет в области $D=\{0<x<l,\quad 0<t\leq T\}$ ограниченные частные производные по x до четвертого, по t до третьего порядка и уравнение (1.1) выполняется и на

границах $x=0$ и $x=l$ области $\overline{D}$. Если выполняются условия (4.3) и $b<0$, то решение разностной задачи (3.1)-(3.2) сходится к решению задачи (1.1), (2.5), (1.3). При этом имеет место оценка (4.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов А.А., Юхно Л.Ф. Метод решения нелокальной задачи для системы линейных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2014, т.54, №11, с.1752-1755.
2. Ханкишиев З.Ф. Решение одной смешанной задачи для линейного дифференциального уравнения параболического типа с интегральным граничным условием методом конечных разностей. Научные вести. Международный научный журнал. №5(10), 2019, с.114-127.
3. Khankishiyev Z.F. Solution of a nonlocal problem for a linear differential hyperbolic equations. Proceedings of the International conference devoted to the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciences. Baku, 23-25 October 2019. pp. 302-305.
4. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971, 552 с.
5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978, 592 с.

PARABOLİK TİP XƏTTİ DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN İNTEQRAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ BİR MƏSƏLƏNİN SONLU FƏRQLƏR ÜSULU İLƏ HƏLLİ

Z.F.XANKİŞİYEV

XÜLASƏ

Məqalədə parabolik tip xətti diferensial tənlik üçün inteqral sərhəd şərtli bir məsələnin həlli tədqiq edilmişdir. İnteqral sərhəd şərtlərini lokal sərhəd şərtləri ilə əvəz etdikdən sonra, alınmış yeni məsələnin həllinə sonlu fərqlər üsulu tətbiq edilmiş, qurulmuş fərq məsələsinin həllinin ilkin məsələnin həllinə yığılması üçün kafi şərtlər tapılmış və yığılma sürəti üçün qiymətləndirmə alınmışdır.

Açar sözlər: sonlu fərqlər üsulu, inteqral sərhəd şərtləri, fərq məsələsi, approksimasiya, maksimum prinsipi, yığılma.

SOLUTION OF ONE PROBLEM FOR THE PARABOLIC TYPE LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS BY THE FINITE DIFFERENCE METHOD

Z.F.XANKİŞİYEV

SUMMARY

One problem for an equation of parabolic type with an integral boundary condition is considered in present paper. The corresponding difference problem is constructed with second order of approximation. The convergence of the method is proved and convergence rate is determined.

Keywords: finite difference method, integral boundary conditions, difference problem, approximation, maximum principle, convergence.