BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2020

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ СО СМЕШЕНИЕМ ВРЕМЕНИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Х.И.АХМЕДОВ

Бакинский Государственный Университет

hikmatahmadov@yahoo.com

При минимальных условиях на начальные данные, доказывается однозначная разрешимость смешанной задачи для параболического уравнения с постоянными коэффициентами со смещением времени, с нелокальными и несамосопряженными граничными условиями и получено явное аналитическое представление для решения задачи.

Ключевые слова: смещение по времени, смешанная задача, вычетный метод.

1. Постановка задачи. Пусть

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)\equiv au_{xx}(x,t)+bu_x(x,t)+cu(x,t)-u_t(x,t),$$

$$l_ju(x,t)\equiv u(x,t+(1-j)\omega)+\alpha_j u(1-x,\ t+j\omega),\quad j=0,1,$$

и

$$l_ju(x,t)\equiv a_{j-2}u_x^{(j-2)}(x,t)+b_{j-2}u_x^{(j-2)}(1-x,\ t),\quad j=2,3,$$

где $a, b, c, \omega, \alpha_j, a_j, b_j$ $(j=0,\ 1)$ – вещественные постоянные, $a>0$, $\omega>0$, $\alpha_0\ \alpha_1\neq 0$.

В полуполосе $\Pi=\{(x,t):0<x<1,\ t>0\}$ рассматривается смешанная задача

$$Lu(x,t)=0,\qquad (x,t)\in\Pi, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad 0<x<1, \tag{2}$$

$$l_ju(x,t)\Big|_{x=0}=0,\qquad t>0,\quad j=0,1, \tag{3}$$

$$l_ju(x,t)\Big|_{x=0}=0,\qquad 0<t\le\omega,\quad j=2,3, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ - заданная, а $u(x,t)$ - искомая функция.

Под решением задачи (1)-(4) будем подразумевать функцию $u(x,t)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $u(x,t)\in C^{2,1}(\Pi)\bigcap C(0<x<1,\,t\geq 0)$; $\int\limits_0^t u(x,\tau)d\tau\in C(0\leq x\leq 1,\ t\geq 0)$;

2) $l_j u(x,t)\in C(0\leq x<1,\,t>0)$, $j=0,\ 1$;

3) $l_j u(x,t)\in C(0\leq x<1,\,0<t\leq\omega)$, $j=2,\ 3$;

4) $u(x,t)$ удовлетворяет равенствам (1)-(4) в обычном смысле.

В работах [3]-[7] рассмотрены задачи для уравнений с отклоняющимися аргументами, а также задачи для уравнения теплопроводности, в которых вместо краевых условий ставятся функциональные условия. Смешанная задача для уравнения теплопроводности с отклонением аргумента в граничных условиях рассмотрена в работе [8], [9].

2. Единственность решения. Задачу

$$L\left(\frac{d}{dx},\mu^2\right)y(x,\mu)=0\,,\quad l_j y(x,\mu)\Big|_{x=0}=0\,,\quad j=2,\ 3 \qquad (5)$$

с комплексным параметром μ назовем первой спектральной задачей и отметим некоторые известные [1], [2] и легко доказываемые факты относительно этой задачи.

Пусть коэффициенты уравнения спектральной задачи (5) удовлетворяет условию $b^2-ac=0$.

Если $a_0b_1+b_0a_1\neq 0$, то при всех комплексных значениях μ, не принадлежащих множеству

$$S=\left\{0:\sqrt{a}\nu\pi i+\frac{\sqrt{a}}{2}\left[\ln\left|\frac{n}{m}\right|+i\left(\pi+\arg\frac{n}{m}\right)\right]+O\left(\frac{1}{\nu}\right),\ |\nu|\to\infty\right\},$$

где $n=\dfrac{a_0b_1+b_0a_1e^{-\frac{b}{2a}}}{\sqrt{a}}$, $m=\dfrac{a_1b_0+a_0b_1e^{-\frac{b}{2a}}}{\sqrt{a}}$, существует функция Грина $G_1(x,\xi,\mu)$ задачи (5), аналитическая по μ всюду, кроме точек множества S, которые являются ее полюсами.

Перенумеровывая точки из S в порядке возрастания их модулей, с учетом их кратности, обозначим: $S=\{\mu_\nu;\ \nu=1,\,2,\,...\}$, $|\mu_1|\leq|\mu_2|\leq...$, μ_ν имеет кратности χ_ν, где $\chi_\nu=1$ или $\chi_\nu=2$. Ясно, что $|\mu_\nu|\to\infty$ ($\nu\to\infty$), существуют $h,\,\delta>0$, такие, что

$$-h<\operatorname{Re}\mu_\nu<h\,,\quad |\mu_{\nu+1}-\mu_\nu|>2\delta\ \ (\nu=1,2,...). \qquad (6)$$

Вне δ - окрестностей ($\delta>0$) точек μ_ν, справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^k G_1(x,\xi,\mu)}{\partial x^k}\right|\leq C|\mu|^{k-1},\qquad C>0\,,\quad k=0,1,2 \qquad (7)$$

при $f(x) \in C[0,1]$

$$
\begin{aligned}
&L\left(\frac{d}{dx}, \mu^2\right)\int_0^1 G_1(x,\xi,\mu)\, f(\xi) d\xi = -f(x) \\
&l_j G_1(x,\xi,\mu)\Big|_{x=0} = 0, \quad j = 2, 3.
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

Для любой функции $f(x) \in C^2[0,1]$, $l_j f\Big|_{x=0} = 0, \quad j = 2, 3,$ имеет место равенство

$$
\int_0^1 G_1(x,\xi,\mu)\, f(\xi) d\xi = \frac{f(x)}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^2}\int_0^1 G_1(x,\xi,\mu)(af'' + bf' + cf) d\xi . \qquad (9)
$$

Примем следующие обозначения:

Пусть $d > 0$, $r > 0$ - некоторые числа, z -комплексное переменное, $L_d = \left\{z:\ \operatorname{Re} z^2 = d\right\}$- гипербола с ветвями $L_d^{\pm} = \left\{z:\ \operatorname{Re} z^2 = d,\ \pm\operatorname{Re} z > 0\right\}$, $\Omega_r = \left\{z:\ |z| = r\right\}$.

Введем еще контуры (ломанные)

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_d = &\left\{z:\ \pm z = r\, e^{-\frac{3\pi}{8}i},\ \sigma \in \left[2d\sqrt{1+\sqrt{2}},\ \infty\right)\right\} \cup \\
\cup &\left\{z:\ \pm z = d(1 + i\eta),\ \eta \in \left[-1-\sqrt{2},\ \ 1+\sqrt{2}\right]\right\} \cup \\
\cup &\left\{z:\ \pm z = \sigma e^{\frac{3\pi}{8}i},\ \sigma \in \left[2d\sqrt{1+\sqrt{2}},\ \infty\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Пусть $\{r_n\}$ - последовательности положительных чисел таких, что $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$, и окружности $\Omega_{r_\nu} = \left\{\mu:\ |\mu - \mu_\nu| = r_\nu\right\}$ не пересекает $\delta > 0$ окрестности точек $\mu_\nu \in S$. Пользуясь схемой вычетного метода [1] для обычной задачи (задачи без отклонения времени) (1), (2), (4) доказывается, следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $m \neq 0$, $n \neq 0$, $\varphi(x) \in C^2[0,1]$,

$l_j\varphi(x)\Big|_{x=0} = 0, \quad (j = 2, 3)$. Тогда задача (1), (2), (4) имеет единственное решение, и оно представляется формулой

$$
\begin{aligned}
&u(x,t) = \varphi(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{\hat{L}_h^+} \frac{e^{\mu^2 t}}{\mu} d\mu \times \\
&\times \int_0^1 G_1(x,\xi,\mu)\left[a\varphi''(\xi \_ + b\varphi'(\xi) + c\varphi(\xi)\right] d\xi
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

при $0 \le x \le 1$, $0 < t \le \omega$, где h число из (6). Из этой теоремы следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. При условиях теоремы 1, задача (1)-(4) не может иметь более одного решения.

3. Существование и представление решения. Рассмотрим еще одну спектральную задачу:

$$\begin{aligned} & L\left(\frac{d}{dx}, \lambda^2\right) z(x,\lambda) = 0 \\ & z(0,\lambda) = z(1,\lambda) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

с комплексным параметром λ. Известно [2], что оно имеет функцию Грина $G_2(x,\xi,\lambda)$, аналитическую по λ всюду, кроме точек $\lambda_k = \sqrt{a}\pi k i$ ($k = \pm 1, \pm 2, ...$), которые являются ее простыми полюсами.

Введем функцию

$$\begin{aligned} Q(x,\lambda,p(\lambda),q(\lambda)) = & \left[e^{-\frac{b}{2a}-\frac{\lambda}{\sqrt{a}}} - e^{-\frac{b}{2a}+\frac{\lambda}{\sqrt{a}}} \right]^{-1} \times \\ & \times \left\{ \left[p(\lambda) e^{-\frac{b}{2a}-\frac{\lambda}{\sqrt{a}}} - q(\lambda) \right] e^{\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\lambda}{\sqrt{a}}\right)x} + \right. \\ & \left. + \left[q(\lambda) - p(\lambda) e^{-\frac{b}{2a}+\frac{\lambda}{\sqrt{a}}} \right] e^{\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\lambda}{\sqrt{a}}\right)x} \right\} \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$p(\lambda) = \left[\alpha_1 e^{2\lambda^2\omega} - \alpha_0\right]^{-1} \left[A(\lambda)\alpha_1 e^{\lambda^2\omega} - \alpha_0 B(\lambda)\right], \tag{13}$$

$$q(\lambda) = \left[\alpha_1 e^{2\lambda^2\omega} - \alpha_0\right]^{-1} \left[B(\lambda) e^{\lambda^2\omega} - A(\lambda)\right], \tag{14}$$

$$A(\lambda) = e^{\lambda^2\omega} \int_0^\omega e^{-\lambda^2 t} u(0,\tau)\, d\tau\,, \tag{15}$$

$$B(\lambda) = \alpha_1 e^{\lambda^2\omega} \int_0^\omega e^{-\lambda^2 t} u(1,\tau)\, d\tau \tag{16}$$

$u(s,\,t)-$ граничные значения решения на частях $\{(s,\,t):\ 0 < s < 1,\ t > 0\}$, которые определяются из (10). Зафиксируем $C_1 > \max\left(0,\, \ln\left|\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right|\right)$. Доказывается

Теорема 3. Пусть $m \neq 0$, $n \neq 0$, $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$, $l_j\varphi(x)\Big|_{x=0} = 0, \quad (j = 0, 1)$. Тогда задача (1)-(4) имеет классическое решение и оно представляется формулой

$$u(x,t) = \varphi(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{\hat{L}_{C_1}^+} \lambda^{-1} e^{\lambda^2 t} \times$$

$$\left[\int\limits_0^1 G_2(x,\xi,\lambda)\left(a\varphi'' + b\varphi' + c\varphi\right)d\xi - Q(x,\lambda,\varphi(0),\varphi(1))\right]d\lambda + \tag{17}$$

$$+\frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{L_{C_1}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} Q(x,\lambda, p(\lambda), q(\lambda))d\lambda.$$

Замечание 1. Объединяя теоремы 2 и 3, мы получаем окончательное утверждение: при условиях теоремы 2 и 3 основная задача (1)-(4) имеет единственное классическое решение и оно представляется формулой (17).

Замечание 2. В данной работе мы рассматривали тот случай, когда коэффициенты уравнения (1) удовлетворяет условию $b^2 - ac = 0$. Аналогично рассматриваются и условия, когда $b^2 - ac < 0$ и $b^2 - ac > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла. М.: Наука,1964,462 с.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 526 с.
3. Зарубин А.Н. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Учебное пособие (ОГУ, Орел, 1997).
4. Подгорнов В.В. Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений с запаздывающим аргументом. Дифференц. уравнения 3, № 8, 1967, с. 1334-1341.
5. Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями. Журнал вычислительной математики и математической физики, 4, № 6, 1964, с. 1006-1024.
6. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. Дифференц. уравнения 13, № 2, 1997, с. 294-304.
7. Wu I. Theory and applications of partial functional differential equations. New York, Springer, 1996, 119 p.
8. Мамедов Ю.А., Ахмедов Х.И. Об одной смешанной задаче для уравнения теплопроводности с опережением времени в граничных условиях. Известия Вузов. Математика, 2020, № 3, с. 29-47
9. Мамедов Ю.А. Математическая постановка и решение одной задачи теплопроводности, при частично детерминированном граничном режиме. Вестник БГУ, 3, 2005, с. 5-11.

SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİNDƏ ZAMANA GÖRƏ GECİKMƏ OLAN HALDA SABİT ƏMSALLI PARABOLİK TİP TƏNLİK ÜÇÜN QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN HƏLLİNİN ANALİTİK AYRILIŞI

H.İ.ƏHMƏDOV

XÜLASƏ

Sərhəd şərtlərində zamana görə gecikmə olan halda dinamik proseslərin tədqiqi və öyrənilməsi xeyli maraqlıdır və həm də mühüm tətbiqi əhəmiyyətə malikdir. Məqalədə sərhədin bir hissəsində temperaturu digər hissəsinin daha əvvəlki vaxtda temperaturundan asılı olduğu bir dinamik prosesi modelləşdirən qarışıq məsələ akademik M.L.Rəsulovun çıxıqlar və kontur inteqralı üsullarının kombinasiyasından istifadə etməklə həll olunur. Qarışıq məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi isbat olunur və həll üçün aşkar analitik ifadə tapılır.

Açar sözlər: qarışıq məsələ, zamana görə sürüşmə, çıxıqlar üsulu.

ANALYTICAL REPRESENTATION OF THE SOLUTION TO A MIXED PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH CONSTANT COEFFICIENTS AND TIME SHIFT IN BOUNDARY CONDITIONS

H.I.AKHMEDOV

SUMMARY

Under minimal conditions on the initial data, we prove the unique solvability of the mixed problem for a parabolic equation with constant coefficients and time shift in nonlocal and non-self-adjoint boundary conditions and obtain an explicit analytical representation for the solution to the problem.

Key words: time shift, mixed problem, residue method.