BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2020

УДК 517.956.223

ОДИН МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ПАРАМЕТРА

Е.Ю.МУСТАФАЕВА, Н.А.АЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет

helemust@rambler.ru

Излагаемая работа посвящена исследованию решений граничных задач с нелокальными граничными условиями, зависящими от параметра, для трехмерного уравнения Гельмгольца. Исходя из известного фундаментального решения уравнения Гельмгольца, получены основные соотношения, дающие нам полную систему необходимых условий для разрешимости граничной задачи. Некоторые из этих условий содержат сингулярности, регуляризация которых представляет трудность и проводится по своеобразной схеме.

Ключевые слова: трехмерное уравнение Гельмгольца, нелокальные граничные условия, необходимые условия, фундаментальное решение, сингулярность, регуляризация, фредгольмовость.

Mathematical Subject Classification: 35J40.

Рассматривая нелокальные граничные условия для уравнения с частными производными, мы получаем возможность исследовать решение граничных задач для дифференциальных уравнений как четного, так и нечетного порядка.

Как известно, для обыкновенного дифференциального уравнения число дополнительных условий (условий Коши или граничных условий) всегда совпадает порядком рассматриваемого уравнения [1].

В курсе уравнений математической физики и уравнений в частных производных каноническим видом уравнения эллиптического типа является уравнение Лапласа (уравнение второго порядка), для которого задается одно локальное граничное условие (Дирихле, Неймана или же Пуанкаре) [2], [3].

Приведенные нелокальные граничные условия освобождают нас от вышеуказанного недоразумения между обыкновенными д.у. и уравнениями в частных производных [4], [5]. Также именно для нелокальных граничных задач появляется возможность доказательства фредгольмовости при помощи вывода так называемых необходимых условий и их регуляризации.

Идея необходимых условий впервые была использована А.В.Бицадзе для уравнения Лапласа в работе [6, с. 185]. Необходимые условия мы собираемся получить из основных соотношений, которые выводятся только из рассматриваемого уравнения и являются аналогами формулы Лагранжа для о.д.у, а для уравнений в частных производных они получаются из второй формулы Грина. Необходимые условия показывают, что нельзя произвольным образом задавать искомую функцию и ее частные производные на границе области даже в классе допустимых функций (непрерывных или непрерывно дифференцируемых).

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение Гельмгольца ([7] , с.203):

$$\Delta u + k^2 u(x) = -f(x), \;\; x = (x_1, x_2, x_3) \in D \subset R^3 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')} + \sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_{j1}^{(k)}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \alpha_{j2}^{(k)}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right]\Bigg|_{x_3=\gamma_j(x')} = \lambda u(x', \gamma_k(x')), \tag{2}$$

$$k = 1{,}2;\; x' \in S,$$

$$u(x) = f_0(x),\; x \in \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2 . \tag{3}$$

Здесь S - проекция области D на плоскость $Ox_1x_2 = Ox'$ $(x_3 = 0)$.

Фундаментальное решение $U(x)$ уравнения Гельмгольца ($(\Delta + k^2 I)U(x) = \delta(x)$) имеет вид $U(x) = -\dfrac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$ или

$$U(x-\xi) = -\frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|}. \tag{4}$$

Необходимые условия

Чтобы получить необходимые условия разрешимости краевой задачи (1)-(3) для уравнения Гельмгольца в 3-мерном случае, умножим уравнение (1) на фундаментальное решение (4)

$$\int_D (\Delta u + k^2 u(x))U(x-\xi)dx = -\int_D f(x)U(x-\xi)dx$$

или

$$-\int_D (\Delta u + k^2 u(x))\frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|}dx = \int_D f(x)\frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|}dx \;\; . \tag{5}$$

Интегрируя (5), мы получим следующее:

$$\int_D (\Delta u + k^2 u(x))U(x-\xi)dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_D \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} U(x-\xi)dx + \int_D k^2 u(x))U(x-\xi)dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \left[\int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} U(x-\xi)\cos(\nu_x, x_j)dx - \int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_j} dx \right] + \int_D k^2 u(x))U(x-\xi)dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_\Gamma \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} U(x-\xi) - u(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_j} \right) \cos(\nu_x, x_j)dx +$$

$$+ \int_D u(x) \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_j^2} dx + \int_D k^2 u(x))U(x-\xi)dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_\Gamma \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} U(x-\xi) - u(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_j} \right) \cos(\nu_x, x_j)dx + \int_D u(x)\delta(x-\xi)dx \quad . (6)$$

Так как $U(x-\xi)$ - фундаментальное решение уравнения Лапласа, то

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_j^2} + k^2 U(x-\xi) = (\Delta_x + k^2 I)U(x-\xi) = \delta(x-\xi)$$

является функцией Дирака. Учитывая это и подставляя (6) в (5), мы имеем соотношение

$$-\int_D f(x)U(x-\xi)dx = \int_D \{ \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} + k^2 u(x) \} U(x-\xi)dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_\Gamma \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} U(x-\xi) - u(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_j} \right) \cos(\nu_x, x_j)dx - \int_D u(x)\delta(x-\xi)dx$$

откуда получаем первое основное соотношение

$$\sum_{j=1}^{3} \int_\Gamma \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} U(x-\xi) - u(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_j} \right) \cos(\nu_x, x_j)dx +$$

$$+ \int_D f(x)U(x-\xi)dx =$$

$$= \int_D u(x)\delta(x-\xi)dx = \begin{cases} u(\xi), & \xi \in D, \\ \frac{1}{2} u(\xi), & \xi \in \Gamma. \end{cases} \qquad (7)$$

Второе из соотношений (7) называется **1-ым необходимым условием** разрешимости задачи (1)-(2):

$$\frac{1}{2} u(\xi) =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} U(x-\xi) - u(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_j} \right) \cos(\nu_x, x_j) dx +$$

$$+ \int_{D} f(x) U(x-\xi) dx \ , \quad \xi \in \Gamma. \qquad (8)$$

Необходимое условие (8) можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{2} u(\xi) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} U(x-\xi) - u(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x} \right) dx +$$

$$+ \int_{D} f(x) U(x-\xi) dx \ , \quad \xi \in \Gamma. \qquad (9)$$

Теорема 1. Пусть $D \subset R^3$ *ограничена и выпукла в направлении* x_3 *с границей* Γ*, являющейся поверхностью Ляпунова.* Первое необходимое условие (9) является регулярным, если правая часть $f(x)$ уравнения (1) удовлетворяет условию Гельдера.

Умножая (1) на $\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,3}$, и интегрируя по области *D*, мы получаем следующее:

$$\int_{D} (\Delta u + k^2 u(x)) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i} dx = -\int_{D} f(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i} dx \ .$$

Интегрируя по частям, мы получим остальные три основных соотношения:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x} dx +$$

$$+ \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_m} \left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i} \cos(\nu_x, x_m) - \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_m} \cos(\nu_x, x_i) \right] dx +$$

$$+ \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_l} \left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i} \cos(\nu_x, x_l) - \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_l} \cos(\nu_x, x_i) \right] dx +$$

$$+ \int_{D} f(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i} dx =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i}, & \xi \in D, \\[2ex] -\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i}, & \xi \in \Gamma, \end{cases} \quad i = \overline{1,3}, \qquad (10)$$

где числа *i,m,l* образуют перестановку чисел 1,2,3.

Вторые выражения в (10) - это остальные **три необходимых усло-**

вия ($\xi \in \Gamma$, $i = \overline{1,3}$):

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i} =$$

$$= \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x} dx +$$

$$+ \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_m} \left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i} \cos(\nu_x, x_m) - \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_m} \cos(\nu_x, x_i) \right] dx +$$

$$+ \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_l} \left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i} \cos(\nu_x, x_l) - \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_l} \cos(\nu_x, x_i) \right] dx +$$

$$+ \int_{D} f(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i} dx \qquad (11)$$

где числа *i,m,l* образуют перестановку чисел 1,2,3.

Так как

$$\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\frac{x_j - \xi_j}{|x-\xi|} e^{ik|x-\xi|} - ik(x_j - \xi_j) e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|^2} \right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\left(\frac{x_j - \xi_j}{|x-\xi|} - ik(x_j - \xi_j) \right) e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|^2} \right) = -\frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi} \left(\frac{\cos(x-\xi, x_j)}{|x-\xi|^2} - ik \frac{\cos(x-\xi, x_j)}{|x-\xi|} \right)$$

то

$$\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_j} = -\frac{\cos(x-\xi, x_j)}{4\pi|x-\xi|^2} e^{ik|x-\xi|} \left(1 - ik|x-\xi|\right). \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (8), получим

$$\frac{1}{2} u(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} u(x) \frac{\cos(x-\xi, \nu_x)}{|x-\xi|^2} e^{ik|x-\xi|} \left(1 - ik|x-\xi|\right) dx -$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} dx - \int_{D} f(x) U(x-\xi) dx \ , \quad \xi \in \Gamma. \qquad (13)$$

Вводя обозначения:

$$K_{ij}(x,\xi) = \cos(x-\xi, x_i)\cos(\nu_x, x_j) - \cos(x-\xi, x_j)\cos(\nu_x, x_i), \qquad (14)$$

мы можем переписать **2-ое, 3-е и 4-ое необходимые условия** (10) в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i} =$$

$$= -\int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x}dx -$$

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\frac{K_{im}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}e^{ik|x-\xi|}\left(1-ik|x-\xi|\right)dx -$$

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\frac{K_{il}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}e^{ik|x-\xi|}\left(1-ik|x-\xi|\right)dx -$$

$$-\int_{D} f(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i}dx\,, \tag{15}$$

где числа i,m,l образуют перестановку чисел 1,2,3.

Поскольку нормальная производная фундаментального решения не имеет особенности в точке $x=\xi$, то при условии Гельдера на функцию $f(x)$ мы имеем сингулярность во втором и третьем интегралах в правой части (15).

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 необходимые условия (15) являются сингулярными.

Выделим только сингулярные слагаемые во 2-ом, 3-ем, 4-ом необходимых условиях (15) ($i=\overline{1,3}$) для k=1,2:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')} =$$

$$(-1)^k\int_S \frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{im}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}\left(1-ik|x-\xi|\right)\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)} +$$

$$+(-1)^k\int_S \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{il}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}\left(1-ik|x-\xi|\right)\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)} + \ldots, \tag{16}$$

где многоточие обозначает сумму несингулярных слагаемых.

Введем обозначения:

$$K_{ij}^{(k)}(x',\xi') == K_{ij}(x,\xi)\left(1-ik|x-\xi|\right)\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}},\ k=1,2. \tag{17}$$

Рассмотрим $|x-\xi|^2\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}$,k=1,2, в знаменателе подынтегральных выражений (16):

$$|x-\xi|^2\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}} = |x'-\xi'|^2 + (\gamma_k(x')-\gamma_k(\xi'))^2 =$$

$$=\left|x'-\xi'\right|^2\left[1+\sum_{m=1}^{2}\left(\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_m}\right)^2\cos^2(x'-\xi',x_m)+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_2}\cos(x'-\xi',x_1)\cos(x'-\xi',x_2)+O(\left|x'-\xi'\right|)\right]. \qquad (18)$$

Введем обозначения:

$$P_k(x',\xi')=1+\sum_{m=1}^{2}\left(\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_m}\right)^2\cos^2(x'-\xi',x_m)+$$
$$+2\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_2}\cos(x'-\xi',x_1)\cos(x'-\xi',x_2)+O(\left|x'-\xi'\right|)$$

откуда мы можем переписать (18) следующим образом:

$$\left|x-\xi\right|^2\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}=\left|x'-\xi'\right|^2 P_k(x',\xi'). \qquad (19)$$

З а м е ч а н и е. Заметим, что для $\xi'=x'$ мы имеем:

$$P_k(x',x')=1+\left(\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_2}\right)^2+2\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_2}\neq 0,\ k=1,2.$$

При помощи обозначений (17), (19) мы можем переписать необходимые условия (16) для k=1, 2 следующим образом:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\xi_i}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}=$$
$$=(-1)^k\int_S\frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\Bigg|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{1}{4\pi\left|x'-\xi'\right|^2}\frac{K_{im}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+$$
$$+(-1)^k\int_S\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{1}{4\pi\left|x'-\xi'\right|^2}\frac{K_{il}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots,\ i=1,2,3, \qquad (20)$$

где числа i,m,l образуют перестановку чисел 1,2,3.

Теорема 3.2. При условиях теоремы *3.1 необходимые условия* (20) *являются сингулярными.*

Чтобы выделить сингулярные слагаемые в подынтегральных выражениях в необходимых условиях (20), мы сначала разложим все коэффициенты вприи производных по формуле Тейлора в точке $\xi'=x'$:

$$\frac{K_{ij}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}=\frac{K_{ij}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}+\sum_{p=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{K_{ij}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}\right)(x_p-\xi_p)+\ldots\ .$$

Подставляя полученное разложение для $\dfrac{K_{ij}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}$ в необходимые условия (20) и учитывая, что слагаемые $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{K_{im}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}\right)\dfrac{(x_j-\xi_j)}{4\pi|x'-\xi'|^2}$, $j=1,2$, имеют слабую сингулярность, мы выделим только сингулярные слагаемые. Тогда необходимые условия (20) примут окончательный вид для регуляризации:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}=$$

$$=(-1)^k\int_S\frac{1}{4\pi|x'-\xi'|^2}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{im}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}+\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{il}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}\right]\times$$

$$\times\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots,\ i=1,2,3;\ k=1,2, \tag{21}$$

где многоточие обозначает несингулярные слагаемые или слагаемые со слабой сингулярностью, а числа i,m,l образуют перестановку чисел 1,2,3.

Регуляризация

Вернемся теперь к 1-ому необходимому условию (8) и раскроем каждый поверхностный интеграл по верхней и нижней полуповерхностям $\Gamma_k=\{\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3):\ \xi_3=\gamma_k(\xi'),\ \xi'=(\xi_1,\xi_2)\in S\}$ $k=1,2$, границы Γ области D:

$$\frac{1}{2}u(\xi)\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}=$$

$$=-\sum_{m=1}^{2}(-1)^m\frac{1}{4\pi}\int_S u(x)\Big|_{x_3=\gamma_m(x')}\left(\frac{\cos(x-\xi,\nu_x)}{|x-\xi|^2}e^{ik|x-\xi|}\left(1-ik|x-\xi|\right)\right)_{\substack{\xi_3=\gamma_k(\xi')\\ x_3=\gamma_{mi}(x')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+$$

$$+\sum_{m=1}^{2}(-1)^i\frac{1}{4\pi}\int_S\left(\frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x}\right)_{\substack{\xi_3=\gamma_k(\xi')\\ x_3=\gamma_m(x')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}-\int_D f(x)\frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}dx,\quad \xi\in\Gamma_k. \tag{22}$$

Очевидно, когда $k\neq m$ в (22), соответствующий интеграл несингулярен. Когда $k=m$ в первой сумме в (22), тогда соответствующий интеграл имеет устранимую особенность при as $x\to\xi$; во второй сумме в (22) соответствующий интеграл имеет слабую особенность, так как порядок особенность меньше кратности интеграла, а в третьем интеграле налагая условие Гельдера на функцию $f(x)$, получаем также устранимую особенность. Поэтому, обозначая несингулярные слагаемые многоточием в (22) и учитывая (17), мы получаем первое необходимое условие в виде (для k=1, 2):

$$\frac{1}{2}u(\xi)\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}=$$

$$=(-1)^{k-1}\frac{1}{4\pi}\int_S u(x)\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{\left(\cos(x-\xi,\nu_x)e^{ik|x-\xi|}\left(1-ik|x-\xi|\right)\right)\Big|_{\substack{\xi_3=\gamma_k(\xi')\\ x_3=\gamma_k(x')}}}{P_k(x',\xi')|x'-\xi'|^2}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+$$

$$+(-1)^k\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{1}{P_k(x',\xi')|x'-\xi'|}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial\nu_x}e^{ik|x-\xi|}\left(1-ik|x-\xi|\right)\right)\Big|_{\substack{\xi_3=\gamma_k(\xi')\\ x_3=\gamma_k(x')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots\,. \quad (23)$$

Построим теперь линейную комбинацию необходимых условий (21) (i=1,2,3; k=1,2):

$$\beta_{ij}^{(1)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_1(\xi')}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_2(\xi')}=$$

$$=\int_S\sum_{k=1}^{2}\beta_{ij}^{(k)}(\xi')(-1)^k\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{jm}^{(k)}(x,\xi)}{P_k(x',\xi')}+\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{jl}^{(k)}(x,\xi)}{P_k(x',\xi')}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots\quad, \quad (24)$$

где числа i,m,l образуют перестановку чисел 1,2,3.

Сформируем сумму из (24) для j=1,2,3, и вынесем общий множитель $\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2}$ под интегралом ($i=1,2$):

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_1(\xi')}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_2(\xi')}\right)=$$

$$=\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij}^{(k)}(\xi')\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{jm}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}+\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{jl}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}\right)+\ldots\,. \quad (25)$$

Прибавляя и вычитая $\beta_{ij}^{(k)}(x')$ из $\beta_{ij}^{(k)}(\xi')$, $k=1,2$, в (25), мы получаем:

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_1(\xi')}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_2(\xi')}\right)=$$

$$=\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij}^{(k)}(x')\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{jm}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}+\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{jl}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}\right)+$$

$$+\int_S\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\beta_{ij}^{(k)}(\xi')-\beta_{ij}^{(k)}(x')}{2\pi|x'-\xi'|^2}\right]\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{jm}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}+\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{jl}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}\right)+\dots\ . \quad (26)$$

Предполагая, что функции $\beta_{ji}^{(k)}(\xi')$ удовлетворяют условию Гёльдера, мы получаем слабые особенности в интегралах с $\dfrac{\beta_{ji}^{(k)}(\xi')-\beta_{ji}^{(k)}(x')}{2\pi|x'-\xi'|^2}$. Отбросив слагаемые со слабыми особенностями и группируя подобные слагаемые, получаем из (26)

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_1(\xi')}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_2(\xi')}\right)=$$

$$=\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij}^{(k)}(x')\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{jm}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}+\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{jl}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}\right)+\dots\ .$$

Разложим все коэффициенты при производных под интегралом по формуле Тейлора в точке $\xi'=x'$:

$$\frac{K_{ij}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}=\frac{K_{ij}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{K_{ij}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}\right)(x_1-\xi_1)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{K_{ij}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}\right)(x_2-\xi_2)+\dots\ .$$

Все слагаемые, кроме первого, понижают порядок сингулярности и делают ее слабее для двукратного интеграла по поверхности S. Вот почему мы будем рассматривать только первый член из каждого такого разложения:

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_1(\xi')}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_2(\xi')}\right)=$$

$$=\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij}^{(k)}(x')\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{jm}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}+\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{jl}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}\right)+....=$$

$$=\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\left(\beta_{il}^{(k)}(x')\frac{K_{lj}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}+\beta_{im}^{(k)}(x')\frac{K_{mj}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}\right)+... \quad (27)$$

где числа i,m,l образуют перестановку чисел 1,2,3.

Для регуляризации интеграла в правой части (27) поставим условия на коэффициенты $\beta_{ij}^{(k)}(x')$: приравняем коэффициенты при производных под знаком интеграла (27) к коэффициентам $\alpha_{ij}^{(k)}(x')$ из граничных условий (2). Тогда мы получим систему 6 уравнений для 6 неизвестных $\beta_{ij}^{(k)}(x'), i=1,2;\ j=1,2,3$, каждого k= 1,2:

$$(-1)^{k+1}\beta_{i2}^{(k)}(x')\frac{K_{21}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}+(-1)^{k+1}\beta_{i3}^{(k)}(x')\frac{K_{31}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}=\alpha_{i1}^{(k)}(x'),$$

$$(-1)^{k+1}\beta_{i1}^{(k)}(x')\frac{K_{12}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}-\beta_{i3}^{(1)}(x')\frac{K_{32}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}=\alpha_{i2}^{(k)}(x'),$$

$$(-1)^{k+1}\beta_{i1}^{(k)}(x')\frac{K_{13}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}+(-1)^{k+1}\beta_{i2}^{(k)}(x')\frac{K_{23}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}=\alpha_{i3}^{(k)}(x'), \quad (28)$$

$$i=1,2$$

Предположим, что неоднородная система (28) имеет единственное решение $\beta_{11}^{(k)}(x')$, $\beta_{12}^{(k)}(x')$, $\beta_{13}^{(k)}(x')$, $\beta_{21}^{(k)}(x'),\beta_{22}^{(k)}(x'),\beta_{23}^{(k)}(x')$ для каждого k=1,2. Тогда подставляя граничные условия (2) в (27), получаем:

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_1(\xi')}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_2(\xi')}\right)=$$

$$=-\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2}\left[\sum_{m=1}^{2}\alpha_i^{(m)}(x')u(x',\gamma_m(x'))\right]\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+.... \ . \quad (29)$$

Подставляя 1-ое необходимое условие (21) для $u(\xi)$ на Γ_k, $k=1,2$, в (29), мы имеем:

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_1(\xi')}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_2(\xi')}\right)=$$

$$=-\int_S\frac{dx'}{2\pi\cos(\nu_x,x_3)|x'-\xi'|^2}\sum_{m=1}^{2}\alpha_i^{(m)}(x')\times$$

$$\times \int_S u(\zeta)\Big|_{\zeta_3=\gamma_m(\zeta')} \frac{\left(\cos(\zeta - x, \nu_\zeta) e^{ik|\zeta - x|}\left(1 - ik|\zeta - x|\right)\right)\Big|_{\substack{\zeta_3=\gamma_m(\zeta') \\ x_3=\gamma_m(x')}}}{2\pi |x'-\zeta'|^2 P_m(x',\zeta')} \frac{d\zeta'}{\cos(\nu_\zeta, \zeta_3)} + \dots .$$

Меняя порядок интегрирования, получаем два регулярных соотношения (k=1,2):

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_1(\xi')} + \beta_{ij}^{(2)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_2(\xi')}\right) =$$

$$= \int_S \frac{u(\zeta)\big|_{\zeta_3=\gamma_1(\zeta')} d\zeta'}{2\pi \cos(\nu_\zeta, \zeta_3)} \int_S \sum_{m=1}^{2}\left(\alpha_i^{(m)}(x')\frac{\left(\cos(\zeta - x, \nu_\zeta) e^{ik|\zeta - x|}\left(1 - ik|\zeta - x|\right)\right)\Big|_{\substack{\zeta_3=\gamma_m(\zeta') \\ x_3=\gamma_m(x')}}}{2\pi|x'-\xi'|^2|x'-\zeta'|^2 P_m(x',\zeta')}\right)\frac{dx'}{\cos(\nu_x, x_3)} + \dots . \quad (30)$$

Внутренние интегралы в правой части (30) являются сингулярными, но они не содержат неизвестную функцию $u(\xi) = u(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и сходятся в смысле Коши. Таким образом, мы регуляризировали соотношения (27) и, следовательно, нами установлена следующая

Теорема 3. Если система (28) имеет единственное решение $\beta_{11}^{(k)}(x'), \beta_{12}^{(k)}(x'), \beta_{13}^{(k)}(x'), \beta_{21}^{(k)}(x'), \beta_{22}^{(k)}(x'), \beta_{23}^{(k)}(x')$, для каждого *k=1,2,* и функции $\beta_{ji}^{(k)}(x'), \varphi_k(x'), i,k = 1,2;\ j = \overline{1,3}$, удовлетворяют условию Гельдера, то соотношения (27) являются регулярными.

Из курса математического анализа известно, что

$$\frac{\partial}{\partial x_p} u(x_1, x_2, \gamma_k(x_1, x_2)) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_p}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')} + \frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_p},$$

$$k=1,2;\ p=1,2,$$

откуда мы имеем

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_p}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')} = \frac{\partial u(x', \gamma_k(x'))}{\partial x_p} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_p}, \quad (31)$$

$$p=1,2;\ k=1,2.$$

Так что производные $\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$ и $\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$ определяются через производную $\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$. Тогда мы имеем только две неизвестные: граничные значения искомой функции $u(x', \gamma_1(x'))$ и $u(x', \gamma_2(x'))$.

Подставим теперь выражения для $\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$ и $\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$ из (31) в левые части граничных условий (2):

$$l_i u = \sum_{j=1}^{2}\left[\sum_{m=1}^{2}\left[\alpha_{ij}^{(m)}(x')\left(\frac{\partial u(x',\gamma_m(x'))}{\partial x_j} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_m(x')}\frac{\partial \gamma_m(x')}{\partial x_j}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left. + \alpha_{i3}^{(m)}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \alpha_i^{(m)}(x')u(x',\gamma_m(x'))\right]\right] = -$$

$$= -\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\left[\sum_{m=1}^{2}\alpha_{im}^{(k)}(x')\frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_m} - \alpha_{i3}^{(k)}(x')\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_{ij}^{(1)}(x')\frac{\partial u(x',\gamma_1(x'))}{\partial x_j} + \alpha_{ij}^{(2)}(x')\frac{\partial u(x',\gamma_2(x'))}{\partial x_j}\right]+$$

$$+\alpha_i^{(1)}(x')u(x',\gamma_1(x')) + \alpha_i^{(2)}(x')u(x',\gamma_2(x')) = 0. \qquad (32)$$

$$x' \in S,\ i = 1,2.$$

Введем обозначения:

$$A_{ij}(x') = -\left[\sum_{m=1}^{2}\alpha_{im}^{(1)}(x')\frac{\partial \gamma_1(x')}{\partial x_m} - \alpha_{i3}^{(1)}(x')\right],\ i, j = 1,2.$$

Тогда система (32) будет переписана в виде:

$$A_{i1}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_1(x')} + A_{i2}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_2(x')} = F_i(x'), i = 1,2, \qquad (33)$$

где правые части системы (30) имеют вид:

$$\mathrm{F_i}(x') = -\sum_{j=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\alpha_{ij}^{(m)}(x')\frac{\partial u(x',\gamma_m(x'))}{\partial x_j}+$$

$$+\alpha_i^{(1)}(x')u(x',\gamma_1(x')) + \alpha_i^{(2)}(x')u(x',\gamma_2(x')), \qquad (34)$$

$$x' \in S,\ i = 1,2.$$

Мы приведем систему (33) к нормальному виду. Для этого мы требуем, чтобы определитель системы был не равен нулю:

$$\Delta(x') = \begin{vmatrix} A_{11}(x') & A_{12}(x') \\ A_{21}(x') & A_{22}(x') \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (35)$$

Если коэффициенты $\alpha_{ij}^{(k)}(x'), i, j, k = 1,2$, и уравнения границ $\gamma_1(x')$ и $\gamma_2(x')$ удовлетворяют условию (35) , тогда по формулам Крамера имеем:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_1(x')} = \frac{1}{\Delta(x')}\begin{vmatrix} F_1(x') & A_{12}(x') \\ F_2(x') & A_{22}(x') \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_2(x')} = \frac{1}{\Delta(x')}\begin{vmatrix} A_{11}(x') & F_1(x') \\ A_{21}(x') & F_2(x') \end{vmatrix}. \qquad (36)$$

Так как определитель $\Delta(x')$ не зависит от неизвестной функции и ее производных, а лишь от граничных значений неизвестной функции

$u(x',\gamma_k(x'))=u\big|_{\Gamma_k}$, $k=1,2$, и их производных $\dfrac{\partial u\big|_{\Gamma_k}}{\partial x_j}$ (k,j=1,2), то решение (36) линейной системы (35) имеет форму линейного функционала:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}=\Phi_k(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2})\ ,\qquad (37)$$

$$k=1,2.$$

Вернемся к регулярным граничным условиям (27) и подставим в них выражения (31) для производных $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$, $j,k=1,2$:

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_1(\xi')}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_2(\xi')}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\beta_{ij}^{(m)}(\xi')\left(\frac{\partial u(\xi',\gamma_m(\xi'))}{\partial \xi_j}-\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_m(\xi')}\frac{\partial \gamma_m(\xi')}{\partial \xi_j}\right)+$$

$$+\beta_{i3}^{(1)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_1(\xi')}+\beta_{i3}^{(2)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_2(\xi')}=$$

$$=-\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2}\left[\sum_{m=1}^{2}\alpha_i^{(m)}(x')u(x',\gamma_m(x'))\right]\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots,$$

$$i=1,2.\qquad (38)$$

Сгруппируем слагаемые и приведем соотношения (38) к виду:

$$\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_1(\xi')}\left[\sum_{m=1}^{2}\beta_{im}^{(1)}(\xi')\frac{\partial \gamma_1(\xi')}{\partial \xi_m}-\beta_{i3}^{(1)}(\xi')\right]+$$

$$+\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_2(\xi')}\left[\sum_{m=1}^{2}\beta_{im}^{(2)}(\xi')\frac{\partial \gamma_2(\xi')}{\partial \xi_m}-\beta_{i3}^{(2)}(\xi')\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\left[\beta_{ij}^{(1)}(\xi')\frac{\partial u(\xi',\gamma_1(\xi'))}{\partial \xi_j}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi')\frac{\partial u(\xi',\gamma_2(\xi'))}{\partial \xi_j}\right]+$$

$$+\int_S\frac{dx'}{2\pi|x'-\xi'|^2\cos(\nu_x,x_3)}\sum_{m=1}^{2}\alpha_i^{(m)}(x')u(x',\gamma_m(x'))+\ldots,$$

$$\xi\in\Gamma,\ \xi'\in S,\ i=1,2.\qquad (39)$$

Слагаемые в (39) - либо со слабо сингулярным либо с регулярным ядром.

Введем обозначения:

$$C_{ij}(\xi')=\left[\sum_{m=1}^{2}\beta_{im}^{(j)}(\xi')\frac{\partial \gamma_j(\xi')}{\partial \xi_m}-\beta_{i3}^{(j)}(\xi')\right],\ i,j=1,2,$$

$$B_i(\xi')=\sum_{j=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\beta_{ij}^{(m)}(\xi')\frac{\partial u(\xi',\gamma_m(\xi'))}{\partial\xi_j}+$$
$$+\int_S\frac{dx'}{2\pi|x'-\xi'|^2\cos(\nu_x,x_3)}\sum_{m=1}^{2}\alpha_i^{(m)}(x')u(x',\gamma_m(x'))+\dots,$$
$$\xi'\in S,\ i=1,2.$$

Тогда система (39) может быть записана в виде:

$$C_{i1}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_1(\xi')}+C_{i2}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_2(\xi')}=B_i(\xi'),\ i=1,2. \qquad (40)$$

Так как в многоточие входят слагаемые интегралы, содержащие производные $\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}$, $k=1,2$, под интегралом, а также граничные значения $u\big|_{\Gamma_k}=u(\xi',\gamma_k(\xi'))$ искомого решения $u(x)$ на поверхностях $\Gamma_k, k=1,2$, и производные граничных значений $\frac{\partial u\big|_{\Gamma_k}}{\partial\xi_j}=\frac{\partial u(\xi',\gamma_k(\xi'))}{\partial\xi_j}$, $j=1,2$, $k=1,2$, то

$$B_k=B_k\left(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2},\frac{\partial u}{\partial x_3}\Big|_{\Gamma_1},\frac{\partial u}{\partial x_3}\Big|_{\Gamma_2}\right)$$

(тогда система (40) представляет собой систему интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма второго рода относительно $\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}$, $k=1,2$, которая имеет единственное решение в виде:

$$\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}=\Psi_k(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial\xi_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial\xi_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial\xi_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial\xi_2}),$$

Теперь давайте подставим выражения (37) для $\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$, $k=1,2$, в систему (40):

$$\sum_{i=1}^{2}C_{kj}\Phi_j(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2})=$$
$$B_k(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2},\Phi_1,\Phi_2),$$
$$k=1,2. \qquad (41)$$

Итак, мы получаем, что правые части (41) есть некоторые линейные функционалы только граничных значений ($u(x',\gamma_k(x'))$, $k=1,2$) неизвестной $u(x)$ и их производных $\frac{\partial u(x',\gamma_k(x'))}{\partial x_i}$ $(k,i=1,2)$:

$$B_k(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2},\Phi_1,\Phi_2)=\Omega_k(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2})$$

и мы получаем систему из двух интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно неизвестных $u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2}$:

$$\sum_{i=1}^{2}C_{kj}\Phi_j(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2})=$$
$$=\Omega_k(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2}),\quad k=1,2. \tag{42}$$

Таким образом, мы пришли к 2-мерной системе линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма 2-го рода 1-го порядка с граничными условиями Дирихле (3) на границе 2-мерной области *S*. Так как эта граница одномерная, то это условие Дирихле не ограничивает общности, так как его коразмерность на две единицы меньше размерности области *D*.

Таким образом, нами установлена

Теорема 4. При условиях теоремы 3, если справедливы условия (36) и система (42) однозначно разрешима, то краевая задача (1)-(2) сводится к двумерной системе линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма 2-го рода (42), к которой примыкает условие Дирихле (3) на границе $\partial S=\overline{S}\setminus S$.

Таким образом, установлена следующая

Теорема 5. При условиях теоремы 4 с учетом ограничения (3) краевая задача (1), (2) является Фредгольмовой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трикоми Ф.Д. Дифференциальные уравнения, М.: Изд. Иностр. Лит., 1962, 352 с.
2. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях в частных производных, М.-Л.: ГИТТЛ, 1961, 400 с.
3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики, М.: Наука, 1992, 432 с.
4. Mustafayeva Y.Y., Aliyev N.A. New Method of Solvability of a Three-dimensional Laplace Equation with Nonlocal Boundary Conditions. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, Kharkov, 2016, vol. 12, No. 3, pp. 185-204.
5. Мустафаева Е.Ю., Алиев Н.А. Об одном методе исследования задачи Стеклова для 3-мерного уравнения Лапласа с нелокальными граничными условиями, Вестник Томского Гос. Университета, 2016, №6(44), сс.19-33.
6. Бицадзе А.В. Краевые задачи для уравнений 2-го порядка эллиптического типа
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики М.: Мир, 1981, 512 с.

PARAMETRDƏN ASILI OLAN QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ ÜÇÖLÇÜLÜ HELMHOLTZ TƏNLİYİNİN BİR HƏLL ÜSULU

Y.Y.MUSTAFAYEVA, N.A.ƏLİYEV

XÜLASƏ

İş parameter asılı olan qeyri-lokal sərhəd şərtli üçölçülü Helmholtz tənliyinin bir həll üsulunun öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Helmholtz tənliyin fundamental həllinin əsasında əsas münasibətlər alınır. Bundan əlavə, zəruri şərtlərdə olan sinqulyar inteqrallar çoxölçülüdür. Ona görə də bu sinqulyarlıqların requlyarizasiyası birölçülü sinqulyar inteqrallar requlyarizasiyasından daha çətindir və özünəməxsus sxemaya görə aparılır.

Açar sözlər: qeyri-lokal sərhəd şərtləri, üçölçülü Helmholtz tənliyi, çoxölçülü sinqulyar inteqral, fundamental həlli, zəruri şərtlər, requlyarizasiya, Fredholmluq.

ONE METHOD OF INVESTIGATION OF THE SOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL HELMGOLZ EQUATION WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS DEPENDING ON THE PARAMETER

Y.Y.MUSTAFAYEVA, N.A.ALIEV

SUMMARY

The present work is devoted to the study of solutions of boundary value problems with nonlocal boundary conditions depending on a parameter for the three-dimensional Helmholtz equation. Based on the well-known fundamental solution of the Helmholtz equation, the basic relations are obtained that give us a complete system of necessary conditions for the solvability of the boundary value problem. Some of these conditions contain singularities the regularization of which is difficult and is carried out according to a peculiar scheme.

Keywords: three-dimensional Helmholtz equation, nonlocal boundary conditions, necessary conditions, fundamental solution, singularity, regularization, Fredholm property.