BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2020

KƏSR TƏRTİBLİ 2α TƏRTİBDƏN İNTEQRO-DİFFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN ÜÇ NÖQTƏLİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

N.Ə.ƏLİYEV, V.Ə.OSMANOV

Bakı Dövlət Universiteti

Saracli@mail.ru

Baxılan işdə kəsr tərtib adi, 2α tərtibdən xətti inteqro-differensial tənlik üçün üş nöqtəli sərhəd məsələsinə baxılmışdır. Bu məsələ özü həm Volterra, həm də Fredholm hədli ikinci növ requlyar nüvəli inteqral tənliyə gətirilmişdir.

Bu cür tənliklərin araşdırılması isə ardıcıl yerinə yazma üsuludur. Belə ki, bu üsul bütün hədlərdə aparılarsa, proses mürəkkəbləşər. Ona görə də ardıcıl yerinə yazma üsulu ancaq Volterra həddində aparılmaqla bu həddin nüvəsi istənilən qədər kiçik edilə bildiyindən, bu hədd xəta kimi atılır və alınan ikinci növ Fredholm tənliyi üçün Rezolvent sırası qurulur.

Açar sözlər: Üç nöqtəli məsələ, Sərhəd məsələsi, İnteqro-differensial tənlik, Kəsr tərtibli tənlik

Burada 2α tərtibdən kəsr tərtibli inteqro-differensial tənlik üçün üç nöqtəli sərhəd məsələsinə baxılır. Bu məsələnin həllində Riman-Liuvill mənada kəsr tərtibdən inteqrallamadan istifadə olunur. Məsələni həll edərkən, məsələ ikinci növ, requlyar nüvəli Volterra-Fredholm hədli inteqral tənliyə gətirilir. Volterra-Fredholm tipli inteqral tənliyi həll etmək üçün təqribi hesablama üsulu olan arddıcıl yerinə yazma üsulundan istifadə olunur. Bu üsulu bütün hədlərdə aparsaq məsələ mürəkkəbləşər. Ona görə iteraiya üsulunu ancaq Volterra həddində aparmaqla bu həddi kifayət qədər kiçiltmək mümükündür. Və sonda bu həddi xəta kimi qəbul edərək atılır və alınan ikinci növ Fredholm tənliyi üçün Rezolvent sırası qurulur. Alınan həll təqribi həll kimi qəbul olunur.

Məlumdur ki, adi differensial tənliklər üçün baxılan sərhəd məsələlərinin araşdırılması çox zaman bu məsələləri ikinci növ inteqral tənliyə gətirməklə aparılır [1], [2]. Bəzən bu cür məsələlər Y.Məmmədovun araşdırdığı ikinci növ volterra-Fredholm tipli inteqral tənliyə gətirilərk araşdırırlar [3], [4]. Biz burada törəməsi kəsr tərtibdən olan adi inteqro-differensial tənlik üçün qoyulmuş üç nöqtəli sərhəd məsələsini özündə həm Volterra, həm də Fredholm hədləri tutan ikinci növ inteqral tənliyə gətirməklə kifayətlənmişik.

Bu cür tənliklərin araşdırılması isə ardıcıl yerinə yazma üsuludur. Belə ki, bu üsul bütün hədlərdə aparılarsa, proses mürəkkəbləşər. Ona görə də ardıcıl yerinə yazma üsulu ancaq Volterra həddində aparılmaqla bu həddin nüvəsi istənilən qədər kiçik edilə bildiyindən, bu hədd xəta kimi atılır və alınan ikinci növ Fredholm tənliyi üçün rezolvent sırası qurulur.

Məsələnin qoyuluşu: Aşağıdakı kimi α tərtibdən kəsr tərtibli inteqro-diferensial tənliyə baxılır. Bu tənliyi həll etmək üçün əvvəlcə tənlik hər iki tərəfdən Riman-Liuvill mənada inteqrallanır. Bu məsələnin həlli zamanı Dirakın-Delta funksiyasından istifadə olunur.

$$D^{2\alpha}y(x)+a_1D^{\alpha}y(x)+a_2y(x)+\int_{x_0}^{x}K(x,t)y(t)dt=0,\ \ 0<x_0<x_1<<x_2 \quad (1)$$

$$\begin{cases}\alpha_{11}^{(1)}D^{\alpha}y(x)\big|_{x=x_0}+\alpha_{12}^{(1)}D^{\alpha}y(x)\big|_{x=x_1}+\alpha_{13}^{(1)}D^{\alpha}y(x)\big|_{x=x_2}+\\ \quad +\alpha_{11}^{(0)}y(x_0)+\alpha_{12}^{(0)}y(x_1)+\alpha_{13}^{(0)}y(x_2)=\alpha_1\\ \alpha_{21}^{(1)}D^{\alpha}y(x)\big|_{x=x_0}+\alpha_{22}^{(1)}D^{\alpha}y(x)\big|_{x=x_1}+\alpha_{23}^{(1)}D^{\alpha}y(x)\big|_{x=x_2}+\\ \quad +\alpha_{21}^{(0)}y(x_0)+\alpha_{22}^{(0)}y(x_1)+\alpha_{23}^{(0)}y(x_2)=\alpha_2\end{cases} \quad (2)$$

$$I_{x_0}^{\alpha}D_{x_0}^{2\alpha}y(x)+a_1I_{x_0}^{\alpha}D^{\alpha}y(x)+a_2I_{x_0}^{\alpha}y(x)+I_{x_0}^{\alpha}\int_{x_0}^{x}K(x,t)y(t)dt=0 \quad (3)$$

$$D^{\alpha}y(x)+C_1\frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}+a_1y(x)+\ a_1C_2\frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}+a_2\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}y(\xi)d\xi$$
$$+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}d\xi\int_{x_0}^{\xi}K(\xi,t)y(t)dt=0 \quad (4)$$

$$D^{\alpha}y(x)+C_1\frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}+a_1y(x)+$$
$$+a_1C_2\frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}+a_2\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}y(\xi)d\xi$$
$$+\int_{x_0}^{x}y(t)dt\int_{t}^{x}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)y(\xi)d\xi=0 \quad (5)$$

X-in yerinə x_0 yazsaq və 1-ci həddən başqa qalan hədləri bərabərliyin sağ tərəfinə keçirtsək alarıq:

$$D^{\alpha}y(x)\big|_{x=x_0}=-C_1\frac{x_0^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}-a_1y(x_0)-$$
$$-a_1C_2\frac{x_0^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}-a_2\int_{x_0}^{x_0}\frac{(x_0-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}y(\xi)d\xi$$
$$-\int_{x_0}^{x_0}y(t)dt\int_{t}^{x_0}\frac{(x_0-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)y(\xi)d\xi=0 \quad (6)$$

Burada sonucu iki hədd 0 olur, onda alarıq:

$$D^{\alpha}y(x)\Big|_{x=x_0} = -C_1\frac{x_0^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - a_1 y(x_0) - a_1 C_2\frac{x_0^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} \qquad (7)$$

İndi isə x-ın yerinə x_1 yazsaq, alarıq:

$$D^{\alpha}y(x)\Big|_{x=x_1} = -C_1\frac{x_1^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - a_1 y(x_1) -$$

$$-a_1C_2\frac{x_1^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - a_2\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}y(\xi)d\xi$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}y(t)dt\int_{t}^{x_1}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)y(\xi)d\xi = 0 \qquad (8)$$

Daha sonra isə isə x –ın yerinə x_2 yazaq:

$$D^{\alpha}y(x)\Big|_{x=x_2} = -C_1\frac{x_2^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - a_1 y(x_2) -$$

$$-a_1C_2\frac{x_2^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - a_2\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}y(\xi)d\xi$$

$$-\int_{x_0}^{x_2}y(t)dt\int_{t}^{x_2}\frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)y(\xi)d\xi = 0 \qquad (9)$$

(5)-dən alarıq:

$$I_{x_0}^{\alpha}D^{\alpha}y(x) + C_1 I_{x_0}^{\alpha}\frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} + a_1 I_{x_0}^{\alpha}y(x) +$$

$$+a_1C_2I_{x_0}^{\alpha}\frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} + a_2 I_{x_0}^{\alpha}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}y(\xi)d\xi$$

$$+I_{x_0}^{\alpha}\int_{x_0}^{x}y(t)dt\int_{t}^{x}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)y(\xi)d\xi = 0 \qquad (10)$$

$$y(x) + C_2\frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} + C_1\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}d\xi + a_1\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}y(\xi)d\xi$$

$$+a_1C_2\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}d\xi$$

$$+a_2\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}d\tau\int_{x_0}^{\tau}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}y(\xi)d\xi$$

$$+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}d\tau\int_{x_0}^{\tau}y(t)dt\int_{t}^{x}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)d\xi = 0 \qquad (11)$$

$$y(x_0) = -C_2 \frac{{x_0}^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - C_1 \int_{x_0}^{x_0} \frac{(x_0-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi$$

$$- a_1 \int_{x_0}^{x_0} \frac{(x_0-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi - C_2 \int_{x_0}^{x_0} \frac{(x_0-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi$$

$$- a_2 \int_{x_0}^{x_0} \frac{(x_0-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\tau} \frac{(x_0-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi$$

$$- \int_{x_0}^{x_0} \frac{(x_0-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\xi} y(t) dt \int_{t}^{x} \frac{(x_0-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi,t) d\xi \qquad (12)$$

Burada da sonuncu iki hədd sıfır olur. Onda alarıq:

$$y(x_0) = -C_2 \frac{{x_0}^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} \qquad (13)$$

$$y(x_1) = -C_2 \frac{{x_1}^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - C_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi$$

$$- a_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi - C_2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi$$

$$- a_2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\tau} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi$$

$$- \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\xi} y(t) dt \int_{t}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi,t) d\xi \qquad (14)$$

$$y(x_2) = -C_2 \frac{{x_2}^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - C_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi$$

$$- a_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi - C_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi$$

$$- a_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\tau} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi$$

$$- \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\xi} y(t) dt \int_{t}^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi,t) d\xi \qquad (15)$$

İndi $y(x_0), y(x_1), y(x_2)$ üçün alınmış ifadələri sərhəd şərtlərindən birincisində yerinə yerinə yazaq:

$$\alpha_{11}^{(1)}\left[-C_1\frac{x_0^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}-a_1y(x_0)-a_1C_2\frac{x_0^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\right]+\alpha_{12}^{(1)}[-C_1\frac{x_1^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}-a_1y(x_1)$$

$$-a_1C_2\frac{x_1^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}-a_2\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}y(\xi)d\xi$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}y(t)dt\int_{t}^{x_1}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi?t)d\xi]+\alpha_{13}^{(1)}[-C_1\frac{x_2^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$$

$$-a_1y(x_2)-a_1C_2\frac{x_2^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}-a_2\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}y(\xi)d\xi$$

$$-\int_{x_0}^{x_2}y(t)dt\int_{t}^{x_1}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)d\xi]+\alpha_{11}^{(0)}\left[-C_2\frac{x_0^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\right]$$

$$+\alpha_{12}^{(0)}[-C_2\frac{x_1^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}-C_1\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}*\frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}d\xi$$

$$-a_1\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}y(\xi)d\xi-a_1C_2\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}*\frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}d\xi$$

$$-a_2\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}d\tau\int_{x_0}^{\tau}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}y(\xi)d\xi$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}d\tau\int_{x_0}^{\tau}y(t)dt\int_{t}^{\tau}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)d\xi]$$

$$+\alpha_{13}^{(0)}[-C_2\frac{x_1^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}-C_1\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}*\frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}d\xi$$

$$-a_1\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}y(\xi)d\xi-a_1C_2\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}*\frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}d\xi$$

$$-a_2\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}d\tau\int_{x_0}^{\tau}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}y(\xi)d\xi$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}d\tau\int_{x_0}^{\tau}y(t)dt\int_{t}^{\tau}\frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}K(\xi,t)d\xi]=\alpha_1$$

Analoji olaraq ikinci sərhəd şərtində də həmin ifadələri yerinə yazmaqla aşağıdakı kimi cəbri tənliklər sistemi almış olarıq:

$$\begin{cases} \Delta_{11}C_1 + \Delta_{12}C_2 = \Delta_1 \\ \Delta_{21}C_1 + \Delta_{22}C_1 = \Delta_2 \end{cases}$$

Burada $\Delta = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ olduqda cəbri tənliklər sistemindən C_1 və C_2 sabitlərini tapıb (11) ifadəsində yerinə yazmaqla verilmiş bircins, kəsr tərtibli, üç nöqtəli sərhəd məsələsinin həllini almış olarıq.

Beləliklə qoyulmuş kəsr tərtibli inteqro-differensial tənlik üçün üç nöqtəli sərhəd məsələsi Volterra və Fredholm hədli ikinci növ inteqral tənliyə gətirilmiş oldu.

Teorem1: Əgər $\alpha \in (0,1), a, a_1, b_1$ $və$ c_1 verilmiş sabit ədədlər olmaqla, $0 < x_0 < x_1 < x_2$, $K(x,t)$ və $f(x)$ verilmiş kəsilməz funksiyalardırsa, onda (1)-(2) sərhəd məsələsi (10) ikinci növ inteqral tənliyə gətirilir.

Qeyd. Alınmış (10) inteqral tənliyində Volterra həddinə nəzərən iterasiyalar aparmaqla bu həddin nüvəsini kafi qədər kiçiltmək mümkündür. Onda bu həddi xəta kimi qəbul etməklə alınan ikinci növ Fredholm tipli inteqral tənlik həll olunur. Bu cür alınmış həll qoyulmuş məsələnin təqribi həlli kimi qəbul edilə bilər.

ƏDƏBİYYAT

1.Дезин.А.А., Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980, 208 с.
2.Ловитт У.В., Линейные интегральные уравнения ГИТТЛ., М., 1957, 268 с.
3.Məmmədov Y.C. Təqribi hesablama üsulları. Bakı: Maarif, 1986, 264 s.
4. Mehran Fatemi, Nihan Aliyev, Sadaghat Shahmorad, Existence and uniqueness of solution for a fractional order inteqro-differentian equation with non-local and Scientific research. Applied mathematics, 2011, 2, 1291-1296.

ТРЕХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.А.АЛИЕВ, В.А.ОСМАНОВ

РЕЗЮМЕ

В данном случае рассматривается на о трехточечной граничной задаче для простого линейного интегро-дифференциального уравнения с дробными порядками. Сама проблема сводится к уравнению второго типа регулярного ядра Вольтером и Фредгольмом.

Изучение таких уравнений представляет собой метод последовательной подстановки. Так что, если использовать этот метод во всех членах , процесс будет сложным. Следовательно, поскольку ядро этого члена можно сделать сколь угодно малым путем выполнения метода последовательной подстановки только на члене Вольтерра, этот член отбрасывается как погрешность, и строится последовательность разрешения для второго типа полученного уравнения Фредгольма.

Ключевые слова: Трехточечная задача, Краевая задача, Интегро-дифференциальное уравнение, Уравнение дробного порядка.

THREE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FRACTIONAL INTEQRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

N.A.ALIYEV, V.Ə.OSMANOV

SUMMARY

In the present case, the problem of a three-point boundary for a Elementary, linear integro-differential equation with a fraction is considered. This problem itself is brought to the equation of the second type of regular nucleus by both Voltaire and Fredholm.

The study of such equations is a method of sequential substitution. Thus, if this method is carried out to the fullest term, the process becomes more complicated. Therefore, since the nucleus of this equation can be made as small as desired by performing the sequential substitution method only at the Volterra term, this equation is discarded as an error and a resolution sequence is constructed for the second type of Fredholm equation obtained.

Key words: Three -point problem, Boundary value problem, Inteqro-differential equation, Fractional-order differential equation, global boundary conditions.