BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2019

УДК 517. 95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНСКА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Я.Т.МЕГРАЛИЕВ, Ф.Х.АЛИЗАДЕ
Бакинский Государственный Университет
yashar_aze@mail.ru, farxad@gmail.com

Исследуется обратная нелинейная краевая задача для одного уравнения Буссинска четвёртого порядка с нелокальными условиями. Задача рассматривается в прямоугольной области. При решении исходной обратной краевой задачи осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной обратной задаче. С помощью сжатых отображений доказываются существование и единственность решения вспомогательной задачи. Затем вновь производится переход к исходной обратной задаче, в результате делается вывод о разрешимости исходной обратной задаче.

Ключевые слова: обратная краевая задача, уравнения Буссинска, метод Фурье, классическое решение.

В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и представляют собой важный раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными. Большой интерес в этой области представляют задачи с нелокальными интегральными условиями. Появление интегральных условий связно с тем, что при изучении некоторых физических процессов границы областей их протекания могут оказаться недоступными для непосредственных измерений, но известно среднее значение искомых величин. Условия такого вида могут появиться при математическом моделировании явлений, связанных с физикой плазмы [1], распространением тепла [2,3], процессом влагопереноса в капилярно – пористых средах [4], вопросами демографии и математической биологии.

В последнее время уделяется большое внимание изучению различных нелинейных эволюционных уравнений, описывающих волновые процессы в средах с дисперсией. Одним из них является уравнение Буссинеска, выведенное автором в [5] и описывающее распространение длинных волн на мелкой воде. Это уравнение интересно как с физической, так и с математической точки зрения

Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи определения дифференциальных уравнений по дополнительной информации об их решениях.

Целью данной работы является доказательство единственности и существования решений обратной краевой задачи для одного уравнения Буссинска четвёртого порядка с периодическим и интегральным условием.

1.Постановка задачи и её сведение к эквивалентной задаче.

Рассмотрим для уравнения [5-7].

$$u_{tt}(x,t)-2\alpha u_{txx}(x,t)+\beta u_{xxxx}(x,t)=a(t)u(x,t)+b(t)g(x,t)+f(x,t) \qquad (1)$$

в области $D_T=\{(x,t):\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le t\le T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi(x)+\int_0^T p_1(t)u(x,t)dt, u_t(x,0)=\psi(x)+\int_0^T p_2(t)u(x,t)dt \ \ (0\le x\le 1), \qquad (2)$$

периодическими условиями

$$u(0,t)=u(1,t), u_x(0,t)=u_x(1,t), u_{xx}(0,t)=u_{xx}(1,t)\ (0\le t\le T), \qquad (3)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx=0 \quad (0\le t\le T) \qquad (4)$$

и с дополнительным условием

$$u(x_i,t)=h_i(t)\ \ (,0<x_i<1,\ i=1,2, \quad x_1\ne x_2,\ 0\le t\le T)\ , \qquad (5)$$

где $x_i\in(0,1)\ (i=1,2)$ - фиксированное число, $\alpha>0, \beta>\alpha^2$ заданные числа , $f(x,t)$, $g(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $p_i(t)$,$h_i(t)(i=1,2)$ - заданные функции, а $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$ - искомые функции.

Обозначим

$$\widetilde{C}^{(4,2)}(D_T)=\{u(x,t): u(x,t)\in C^2(D_T), u_{txx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t)\in C(D_T)\}.$$

Определение *Тройку .* $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ *функций* $u(x,t)$ *,* $a(t)$ *и* $b(t)$*, будем называть классическим решением обратной краевой задачи (1)-(5), если* $u(x,t)\in\widetilde{C}^{(4,2)}(D_T)$, $a(t)\in C[0,T]$, $b(t)\in C[0,T]$ *и* $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ *удовлетворяет (1)-(5) в обычном смысле.*

С целью исследования задачи (1)-(5) сначала рассмотрим следующую задачу:

$$y''(t)=a(t)y(t) \quad (0\le t\le T), \qquad (6)$$

$$y(0)=\int_0^T p_1(t)y(t)dt,\ y'(0)=\int_0^T p_2(t)y(t)dt, \qquad (7)$$

где $p_1(t)$, $p_2(t)$, $a(t)$–заданные функции, а $y=y(t)$–искомая функция, причем под решением задачи (6), (7) понимаем функцию $y(t)$ принадлежащую $C^2[0,T]$ и удовлетворяющую условиям (6), (7) в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1[8].. *Пусть функции* $p_1(t)\in C[0,T],\ p_2(t)\in C[0,T],\ a(t)\in C[0,T]$ *и*

$$\|a(t)\|_{C[0,T]}\le R=const\,.$$

Кроме того

$$\left(T\|p_2(t)\|_{C[0,T]}+\|p_1(t)\|_{C[0,T]}+\frac{T}{2}R\right)T<1.$$

Тогда задача (6), (7) имеет только тривиальное решение.

Наряду с обратной краевой задачей (1)- (5) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу: Требуется определить тройку $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ функций $u(x,t)\in\widetilde{C}^{(4,2)}(D_T)$, $a(t)\in C[0,T]$, $b(t)\in C[0,T]$, из соотношений (1)-(3) ,

$$u_{xxx}(0,t)=u_{xxx}(1,t)\ (0\le t\le T)\,, \tag{8}$$

$$a(t)h_i(t)+b(t)g(x_i,t)+f(x_i,t)=h_i''(t)-2\alpha u_{txx}(x_i,t)+\beta u_{xxxx}(x_i,t)\quad (i=1,2;\ 0\le t\le T). \tag{9}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $f(x,t),g(x,t)\in C(D_T),\varphi(x),\psi(x)\in C[0,1],\ p_i(t)\in C[0,T]\ (i=1,2)$, $h_i(t)\in C^2[0,T]\ (i=1,2)$, $h(t)=h_1(t)g(x_2,t)-h_2(t)g(x_1,t)\ne 0$, $\int_0^1 f(x,t)dx=0,\int_0^1 g(x,t)dx=0$ $(0\le t\le T)$ *и выполняются условия согласования*

$$\int_0^1\varphi(x)dx=0,\quad \int_0^1\psi(x)dx=0\,, \tag{10}$$

$$\varphi(x_i)+\int_0^T p_1(t)h_i(t)dt=h_i(0),\ \ \psi(x_i)+\int_0^T p_2(t)h_i(t)dt=h_i'(0)\ (i=1,2)\,. \tag{11}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

Каждое классическое решение $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ *задачи (1)-(5) является и решением задачи (1)-(3), (8), (9);*

Каждое решение $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ *задачи (1)-(3), (8), (9), такое, что*

$$\left(T\|p_2(t)\|_{C[0,T]}+\|p_1(t)\|_{C[0,T]}+\frac{T}{2}\|a(t)\|_{C[0,T]}\right)T<1 \tag{12}$$

является классическим решением (1)-(5).

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ является классическим решением задачи (1)-(5). Интегрируя уравнение (1) по x от 0 до 1, имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx-2\alpha(u_{tx}(1,t)-u_{tx}(0,t))+\beta(u_{xxx}(1,t)-u_{xxx}(0,t))=$$

$$=a(t)\int_0^1 u(x,t)dx+b(t)\int_0^1 g(x,t)dx+\int_0^1 f(x,t)dx \ \ (0\le t\le T). \qquad (13)$$

Допуская, что $\int_0^1 f(x,t)dx=0$, $\int_0^1 g(x,t)dx=0$ $(0\le t\le T)$ и с учётом (3), (4), легко приходим к выполнению (8).

Подставляя в уравнение (1), $x=x_i$ находим:

$$u_{tt}(x_i,t)-2\alpha u_{txx}(x_i,t)+\beta u_{xxxx}(x_i,t)=a(t)u(x_i,t)+b(t)g(x_i,t)+f(x_i,t)\,(0\le t\le T) \ . \ (14)$$

Далее, считая $h_i(t)\in C^2[0,T]$ $(i=1,2)$ и дифференцируя два раза (5), имеем:

$$u_{tt}(x_i,t)=h_i''(t) \ \ (i=1,2;\ 0\le t\le T) \qquad (15)$$

Из (14), с учетом (5) и (15), приходим к выполнение (9).

Теперь, предположим, что $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (8), (9). Тогда из (13), с учетом

$\int_0^1 f(x,t)dx=0,$ $\int_0^1 g(x,t)dx=0\,(0\le t\le T)$ и (3), (8), находим:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx=a(t)\int_0^1 u(x,t)dx \ \ (0\le t\le T). \qquad (16)$$

В силу (2), с учетом (10), нетрудно видеть, что

$$\int_0^1 u(x,0)dx-\int_0^T p_1(t)\left(\int_0^1 u(x,t)dx\right)dt=\int_0^1\left(u(x,0)-\int_0^T p_1(t)u(x,t)dt\right)dx=\int_0^1\varphi(x)dx=0,$$

$$\int_0^1 u_t(x,0)dx-\int_0^T p_2(t)\left(\int_0^1 u(x,t)dx\right)dt=\int_0^1\left(u_t(x,0)-\int_0^T p_2(t)u(x,t)dt\right)dx=\int_0^1\psi(x)dx=0. \ (17)$$

Так как, в силу Леммы 1, задача (16), (17) имеет только тривиальное решение, то $\int_0^1 u(x,t)dx=0$ $(0\le t\le T)$, т.е выполняется условие (4).

Далее, из (9) и (14) находим:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(x_i,t)-h_i(t))=a(t)(u(x_i,t)-h_i(t)) \ (i=1,2;\ 0\le t\le T). \qquad (18)$$

В силу (2) и условий согласования (11), имеем:

$$u(x_i,0)-h_i(0)-\int_0^T p_1(t)(u(x_i,t)-h_i(t))dt=u(x_i,0)-\int_0^T p_1(t)u(x_i,t)dt-$$

$$-\left(h_i(0)-\int_0^T p_1(t)h_i(t)dt\right)=\varphi(x_i)-\left(h_i(0)-\int_0^T p_1(t)h_i(t)dt\right)=0\ (i=1,2),$$

$$u_t(x_i,0)-h_i'(0)-\int_0^T p_2(t)(u(x_i,t)-h_i(t))dt=u_t(x_i,0)-\int_0^T p_2(t)u(x_i,t)dt-$$

$$-\left(h_i'(0)-\int_0^T p_2(t)h_i(t)dt\right)=\psi(x_i)-\left(h_i'(0)-\int_0^T p_2(t)h_i(t)dt\right)=0\ (i=1,2).$$

(19)

Из (18) и (19), в силу Леммы 1, заключаем, что выполняются условие (5). Теорема доказана.

2. Разрешимость обратной краевой задачи

Известно [9], что система

$$1,\cos\lambda_1 x,\sin\lambda_1 x,\ldots,\cos\lambda_k x,\sin\lambda_k x,\ldots \tag{20}$$

образует базис в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k=2k\pi\ (k=1,2,\ldots)$.

Так как система (20) образует базис в $L_2(0,1)$, то очевидно, что для каждого классического решения $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ задачи (1)-(3),(8),(9) его первая компонента $u(x,t)$ имеет вид:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_{1k}(t)\cos\lambda_k x+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k}(t)\sin\lambda_k x\quad(\lambda_k=2\pi k)\,, \tag{21}$$

где

$$u_{10}(t)=\int_0^1 u(x,t)dx,u_{1k}(t)=2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k xdx\ (k=1,2,\ldots),$$

$$u_{2k}(t)=2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k xdx\ \ (k=1,2,\ldots).$$

Применяя формальную схему метода Фурье, для определения искомых коэффициентов $u_{1k}(t)\ (k=0,1,\ldots)$ и $u_{2k}(t)\ (k=1,2,\ldots)$ функции $u(x,t)$, из (1) и (2) получаем:

$$u_{10}''(t)=F_{10}(t;u,a,b)\ \ (0\le t\le T)\,, \tag{22}$$

$$u_{1k}''(t)+2\alpha\lambda_k^2u_{1k}'(t)+\beta\lambda_k^4u_{1k}(t)=F_{1k}(t;u,a,b)\ \ (k=1,2,\ldots;0\le t\le T)\,, \tag{23}$$

$$u_{1k}(0)=\varphi_{1k}+\int_0^T p_1(t)u_{1k}(t)dt,\ \ u_{1k}'(0)=\psi_{1k}+\int_0^T p_2(t)u_{1k}(t)dt\quad(k=0,1,\ldots), \tag{24}$$

$$u_{2k}''(t)+2\alpha\lambda_k^2u_{2k}'(t)+\beta\lambda_k^4u_{2k}(t)=F_{2k}(t;u,a,b)\ \ (k=1,2,\ldots;0\le t\le T)\,, \tag{25}$$

$$u_{2k}(0)=\varphi_{2k}+\int_0^T p_1(t)u_{2k}(t)dt,,\ \ u_{2k}'(0)=\psi_{2k}+\int_0^T p_2(t)u_{2k}(t)dt,\ (k=1,2,\ldots), \tag{26}$$

где

$$F_{1k}(t;u,a,b)=a(t)u_{1k}(t)+b(t)g_{1k}(t)+f_{1k}(t),\quad (k=0,1,...)\ ,$$

$$f_{10}(t)=\int_0^1 f(x,t)dx,\ f_{1k}(t)=2\int_0^1 f(x,t)\cos\lambda_k xdx\ \ (k=1,2,...),$$

$$g_{10}(t)=\int_0^1 g(x,t)dx,\ g_{1k}(t)=2\int_0^1 g(x,t)\cos\lambda_k xdx\ \ (k=1,2,\ldots),$$

$$\varphi_{10}=\int_0^1\varphi(x)dx,\ \psi_{10}=\int_0^1\psi(x)dx,\ \varphi_{1k}=2\int_0^1\varphi(x)\cos\lambda_k xdx\ ,$$

$$\psi_{1k}=2\int_0^1\psi(x)\cos\lambda_k xdx\quad (k=1,2,...)$$

$$F_{2k}(t;u,a,b)=a(t)u_{2k}(t)+b(t)g_{2k}(t)+f_{2k}(t)\ \ (k=1,2,...),$$

$$f_{2k}(t)=2\int_0^1 f(x,t)\sin\lambda_k xdx,\ g_{2k}(t)=2\int_0^1 g(x,t)\sin\lambda_k xdx\ (k=1,2,\ldots),$$

$$\varphi_{2k}=2\int_0^1\varphi(x)\sin\lambda_k xdx,\ \psi_{2k}=2\int_0^1\psi(x)\sin\lambda_k xdx\ \ (k=1,2,\ldots).$$

Далее, из (22)-(26) находим:

$$u_{10}(t)=\varphi_{10}+\int_0^T p_1(t)u_{10}(t)dt+t\left(\psi_{10}+\int_0^T p_2(t)u_{10}(t)dt\right)+$$
$$+\int_0^t(t-\tau)F_{10}(\tau;u,a,b)d\tau\ \ (0\le t\le T)\ , \tag{27}$$

$$u_{ik}(t)=e^{\alpha_k t}\left[\left(\cos\beta_k t-\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t\right)\left(\varphi_{ik}+\int_0^T p_1(t)u_{ik}(t)dt\right)+\frac{\sin\beta_k t}{\beta_k}\left(\psi_{ik}+\int_0^T p_2(t)u_{ik}(t)dt\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{ik}(\tau;u,a,b)\sin\beta_k(t-\tau)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\ \ (i=1,2;\ k=1,2,...;\ 0\le t\le T)\,, \tag{28}$$

где

$$\alpha_k=-\alpha\lambda_k^2,\beta_k=\lambda_k^2\sqrt{\beta-\alpha^{2\cdot}}\ .$$

После подстановки выражений $u_{1k}(t)\ (k=0,1,...)$ и $u_{2k}(t)\ (k=1,2,...)$ в (9), для определения компоненты $u(x,t)$ классического решения $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ задачи (1)-(3),(6),(7) получаем:

$$u(x,t)=\varphi_{10}+\int_0^T p_1(t)u_{10}(t)dt+t\left(\psi_{10}+\int_0^T p_2(t)u_{10}(t)dt\right)+$$

$$+\int_0^t (t-\tau)F_{10}(\tau;u,a,b)d\tau+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\cos\beta_k t-\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t\right)\left(\varphi_{1k}+\int_0^T p_1(t)u_{1k}(t)dt\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sin\beta_k t}{\beta_k}\left(\psi_{1k}+\int_0^T p_2(t)u_{1k}(t)dt\right)\right]+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{1k}(\tau;u,a,b)\sin\beta_k(t-\tau)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\right\}\cos\lambda_k x+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\cos\beta_k t-\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t\right)\left(\varphi_{2k}+\int_0^T p_1(t)u_{2k}(t)dt\right)+\frac{\sin\beta_k t}{\beta_k}\left(\psi_{2k}+\int_0^T p_2(t)u_{2k}(t)dt\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{2k}(\tau;u,a,b)\sin\beta_k(t-\tau)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\right\}\sin\lambda_k x \quad . \quad (29)$$

Теперь, из (9), с учетом (21), имеем:

$$a(t)=[h(t)]^{-1}\{g(x_2,t)(h_1''(t)-f(x_1,t))-g(x_1,t)(h_2''(t)-f(x_2,t))+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(2\alpha u_{1k}'(t)+\beta\lambda_k^2 u_{1k}(t)\right)\left(g(x_2,t)\cos\lambda_k x_1-g(x_1,t)\cos\lambda_k x_2\right)+$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(2\alpha u_{2k}'(t)+\beta\lambda_k^2 u_{2k}(t)\right)\left(g(x_2,t)\sin\lambda_k x_1-g(x_1,t)\sin\lambda_k x_2\right)\right\}, \quad (30)$$

$$b(t)=[h(t)]^{-1}\{h_1(t)(h_2''(t)-f(x_2,t))-h_2(t)(h_1''(t)-f(x_1,t))+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(2\alpha u_{1k}'(t)+\beta\lambda_k^2 u_{1k}(t)\right)\left(h_1(t)\cos\lambda_k x_2-h_2(t)\cos\lambda_k x_1\right)+$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(2\alpha u_{2k}'(t)+\beta\lambda_k^2 u_{2k}(t)\right)\left(h_1(t)\sin\lambda_k x_2-h_2(t)\sin\lambda_k x_1\right)\right\}. \quad (31)$$

где

$$h(t)=h_1(t)g(x_2,t)-h_2(t)g(x_1,t)\neq 0,$$

Дифференцируя (28) получим:

$$u_{ik}'(t)=e^{\alpha_k t}\left[-\frac{1}{\beta_k}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\left(\varphi_{ik}+\int_0^T p_1(t)u_{ik}(t)dt\right)\sin\beta_k t+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t+\cos\beta_k t\right)\left(\psi_{ik}+\int_0^T p_2(t)u_{ik}(t)dt\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{ik}(\tau;u,a,b)\left(\alpha_k \sin\beta_k(t-\tau)+\beta_k\cos\beta_k(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau (i=1,2;\ 0\le t\le T). \quad (32)$$

Далее, из (28) и (32), получаем:

$$2\alpha u'_{ik}(t)+\beta\lambda_k^2 u_{ik}(t)=$$

$$=e^{\alpha_k t}\left[\left(\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t-\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2\alpha_k+2\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right)\left(\varphi_{ik}+\int_0^T p_1(t)u_{ik}(t)dt\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2+2\alpha\alpha_k\right)\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right)\left(\psi_{ik}+\int_0^T p_2(t)u_{ik}(t)dt\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{ik}(\tau;u,a,b)\left(\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k(t-\tau)+2\alpha\beta_k\cos\beta_k(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\right\}. \quad (33)$$

Тогда из (30), (31) с учетом (33), соответственно находим:

$$a(t)=[h(t)]^{-1}\{g(x_2,t)\left(h_1''(t)-f(x_1,t)\right)-g(x_1,t)\left(h_2''(t)-f(x_2,t)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t-\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2\alpha_k+2\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right)\left(\varphi_{1k}+\int_0^T p_1(t)u_{1k}(t)dt\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2+2\alpha\alpha_k\right)\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right)\left(\psi_{1k}+\int_0^T p_2(t)u_{2k}(t)dt\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{1k}(\tau;u,a,b)\left(\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k(t-\tau)+2\alpha\beta_k\cos\beta_k(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\right\}\times$$

$$\times\left(g(x_2,t)\cos\lambda_k x_1-g(x_1,t)\cos\lambda_k x_2\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t-\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2\alpha_k+2\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right)\left(\varphi_{2k}+\int_0^T p_1(t)u_{2k}(t)dt\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2+2\alpha\alpha_k\right)\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right)\left(\psi_{2k}+\int_0^T p_2(t)u_{2k}(t)dt\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{2k}(\tau;u,a,b)\left(\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k(t-\tau)+2\alpha\beta_k\cos\beta_k(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\right\}\times$$

$$\times\left(g(x_2,t)\sin\lambda_k x_1-g(x_1,t)\sin\lambda_k x_2\right)\}, \quad (34)$$

$$b(t)=[h(t)]^{-1}\{h_1(t)\left(h_2''(t)-f(x_2,t)\right)-h_2(t)\left(h_1''(t)-f(x_1,t)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t-\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2\alpha_k+2\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right)\left(\varphi_{1k}+\int_0^T p_1(t)u_{1k}(t)dt\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2+2\alpha\alpha_k\right)\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right)\left(\psi_{1k}+\int_0^T p_2(t)u_{1k}(t)dt\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{1k}(\tau;u,a)\left(\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k(t-\tau)+2\alpha\beta_k\cos\beta_k(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\right\}\times$$

$$\times\left(h_1(t)\cos\lambda_k x_2-h_2(t)\cos\lambda_k x_1\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t-\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2\alpha_k+2\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right)\left(\varphi_{2k}+\int_0^T p_1(t)u_{2k}(t)dt\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2+2\alpha\alpha_k\right)\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right)\left(\psi_{2k}+\int_0^T p_2(t)u_{2k}(t)dt\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{2k}(\tau;u,a)\left(\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k(t-\tau)+2\alpha\beta_k\cos\beta_k(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\right\}\times$$

$$\times\left(h_1(t)\sin\lambda_k x_2-h_2(t)\sin\lambda_k x_1\right)\Big\}. \qquad (35)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3),(8),(9) сведено к решению системы (29), (34) ,(35) относительно неизвестных функций $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)-(3),(8),(9) важную роль играет следующая

Лемма 2. *Если* $\{u(x,t),a(t)\}$ *- любое решение задачи (1)-(3),(6) ,(7), то функции*

$$u_{10}(t)=\int_0^1 u(x,t)dx, u_{1k}(t)=2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx \quad (k=1,2,\ldots),$$

$$u_{2k}(t)=2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx \quad (k=1,2,\ldots)$$

удовлетворяют системе (27), (28).

Замечание. *Из леммы 2 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1)-(3), (8), (9) достаточно доказать единственность решения системы (29), (34) ,(35).*

Теперь рассмотрим следующие пространства:

Обозначим через $B_{2,T}^5$ [9], совокупность всех функций вида

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_{1k}(t)\cos\lambda_k x+\sum_{k=0}^{\infty}u_{2k}(t)\sin\lambda_k x \quad (\lambda_k=2\pi k),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_{1k}(t)$ $(k=0,1,...)$ и $u_{2k}(t)$ $(k=1,2,...)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J_T(u)\equiv\left\|u_{10}(t)\right\|_{C[0,T]}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\left\|u_{1k}(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\left\|u_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

.

Норму в этом множестве определим так:

$$\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^5}=J_T(u).$$

Через E_T^5 обозначим пространство $B_{2,T}^5\times C[0,T]\times C[0,T]$ вектор-функций $z(x,t)=\{u(x.t),a(t),b(t)\}$ с нормой

$$\left\|z\right\|_{E_T^5}=\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^5}+\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|b(t)\right\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что $B_{2,T}^5$ и E_T^5 являются банаховыми пространствами.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^5 оператор

$$\Phi(u,a,b)=\{\Phi_1(u,a,b),\Phi_2(u,a,b),\Phi_3(u,a,b)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a,b)=\tilde{u}(x,t)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{u}_{1k}(t)\cos\lambda_k x+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_{2k}(t)\sin\lambda_k x,$$

$$\Phi_2(u,a,b)=\tilde{a}(t),\Phi_3(u,a,b)=\tilde{b}(t),$$

где $\tilde{u}_{10}(t)$, $\tilde{u}_{ik}(t)$ $(i=1,2;\ k=1,2,...)$, $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{b}(t)$ равны соответственно правым частям (27), (28), (34) и (35).

Очевидно, что

$$\left|\cos\beta_k t-\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t\right|\le 1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\equiv\varepsilon_1,$$

$$\left|\frac{1}{\beta_k}\sin\beta_k t\right|\le\frac{1}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\frac{1}{\lambda_k^2}\equiv\varepsilon_2\frac{1}{\lambda_k^2},$$

$$\left|\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t-\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2\alpha_k+2\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right|\le\left(\frac{3\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}+1\right)\beta\lambda_k^2\equiv\varepsilon_3\lambda_k^2,$$

$$\left|\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2+2\alpha\alpha_k\right)\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right|\le\frac{\beta+2\alpha^2}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}+2\alpha\equiv\varepsilon_4.$$

$$\frac{1}{\beta_k}\left|\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k\left(t-\tau\right)+2\alpha\beta_k\cos\beta_k\left(t-\tau\right)\right|\le\varepsilon_4.$$

Тогда с помощью нетрудных преобразований находим:

$$\|\tilde{u}_{10}(t)\|_{C[0,T]} \le |\varphi_{10}| + T|\psi_{10}| + T(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + T\|p_2(t)\|_{C[0,T]})\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]} +$$

$$+T\sqrt{T}\left(\int_0^T |f_{10}(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + T^2\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]} + T\sqrt{T}\|b(t)\|_{C[0,T]}\left(\int_0^T |g_{10}(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (36)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|\tilde{u}_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{7}\varepsilon_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\varphi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{7}\varepsilon_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\psi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sqrt{7}(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \|p_2(t)\|_{C[0,T]})T\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1\sqrt{7T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sqrt{7}\varepsilon_1 T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1\sqrt{7T}\|b(t)\|_{C[0,T]}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|g_{ik}(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$(i=1,2)$, (37)

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \le \left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]} \Big\{\|g(x_2,t)(h_1''(t) - f(x_1,t)) - g(x_1,t)(h_2''(t) - f(x_2,t))\|_{C[0,T]} +$$

$$+\big\||g(x_2,t)| + |g(x_1,t)|\big\|_{C[0,T]}\left[\frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_3\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\varphi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_4\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\psi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} +\right.$$

$$+\frac{\sqrt{6}}{12}(\varepsilon_3+\varepsilon_4)T\left(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \|p_2(t)\|_{C[0,T]}\right)\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{\sqrt{6T}}{12}\varepsilon_4\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_4 T\|a(t)\|_{C[0,T]}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\left.+\frac{\sqrt{6T}}{12}\varepsilon_4\|b(t)\|_{C[0,T]}\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|g_{ik}(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right]\Bigg\}, \quad (38)$$

$$\|\tilde{b}(t)\|_{C[0,T]} \le \left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]} \Big\{\|h_1(t)(h_2''(t) - f(x_2,t)) - h_2(t)(h_1''(t) - f(x_1,t))\|_{C[0,T]} +$$

$$+\big\||h_2(,t)| + |h_1(t)|\big\|_{C[0,T]}\left[\frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_3\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\varphi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_4\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\psi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} +\right.$$

$$+\frac{\sqrt{6}}{12}(\varepsilon_3+\varepsilon_4)T\left(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \|p_2(t)\|_{C[0,T]}\right)\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{\sqrt{6T}}{12}\varepsilon_4\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|f_{ik}(\tau)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_4T\|a(t)\|_{C[0,T]}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{\sqrt{6T}}{12}\varepsilon_4\|b(t)\|_{C[0,T]}\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|g_{ik}(\tau)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg]\Bigg\}\quad. \qquad (39)$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3),(8) ,(9) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x)\in C^4[0,1],\ \varphi^{(5)}(x)\in L_2(0,1)$ и
$\varphi(0)=\varphi(1),\ \varphi'(0)=\varphi'(1),\ \varphi''(0)=\varphi''(1),\varphi'''(0)=\varphi'''(1),\varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(1)$.
2. $\psi(x)\in C^2[0,1],\ \psi^{(3)}(x)\in L_2(0,1)$ и $\psi(0)=\psi(1),\ \psi'(0)=\psi'(1),\ \psi''(0)=\psi''(1)$.
3. $f(x,t),\ f_x(x,t),\ f_{xx}(x,t)\in C(D_T),\ f_{xxx}(x,t)\in L_2(D_T)$
и $f(0,t)=f(1,t)$, $f_x(0,t)=f_x(1,t),\ f_{xx}(0,t)=f_{xx}(1,t)$ $(0\le t\le T)$.
4. $g(x,t),\ g_x(x,t),\ g_{xx}(x,t)\in C(D_T),\ g_{xxx}(x,t)\in L_2(D_T)$
и $g(0,t)=g(1,t)$, $g_x(0,t)=g_x(1,t), g_{xx}(0,t)=g_{xx}(1,t)$ $(0\le t\le T)$.
5. $h_i(t)\in C^2[0,T]\ (i=1,2),\ h(t)=h_1(t)g(x_2,t)-h_2(t)g(x_1,t)\ne 0,$
$p_i(t)\in C[0,T]\ (i=1,2)$ $(0\le t\le T)$.

Тогда из (36)- (39) получаем:

$$\|\tilde u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}\le A_1(T)+B_1(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}+C_1(T)\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}+D_1(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}\ , \qquad (40)$$

$$\|\tilde a(t)\|_{C[0,T]}\le A_2(T)+B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}+C_2(T)\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}+D_2(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}\ , \qquad (41)$$

$$\|\tilde b(t)\|_{C[0,T]}\le A_3(T)+B_3(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}+C_3(T)\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}+D_3(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}\ . \qquad (42)$$

где

$$A_1(T)=\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}+T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}+T\sqrt{T}\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}+2\sqrt{7}\varepsilon_1\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+2\sqrt{7}\varepsilon_2\|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)}+2\varepsilon_2\sqrt{7T}\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$B_1(T)=(T+2\sqrt{7}\varepsilon_2)T,$$

$$C_1(T)=T(1+2\sqrt{7})\|p_1(t)\|_{C[0,T]}+T(T+2\sqrt{7})\|p_2(t)\|_{C[0,T]},$$

$$D_1(T)=(T+2\varepsilon_2)\sqrt{5T}\|g_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$A_2(T)=\|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Big\{\|g(x_2,t)\big(h_1''(t)-f(x_1,t)\big)-g(x_1,t)\big(h_2''(t)-f(x_2,t)\big)\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left\| |g(x_2,t)|+|g(x_1,t)| \right\|_{C[0,T]} \left[\frac{\sqrt{6}}{6}\varepsilon_3 \left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \frac{\sqrt{6}}{6}\varepsilon_3 \left\|\psi'''(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \right.$$

$$\left.\left. \frac{\sqrt{6T}}{6}\varepsilon_4 \left\| f_{xxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)} \right]\right\},$$

$$B_2(T)=\frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_4 \left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]} \left\| |g(x_2,t)|+|g(x_1,t)| \right\|_{C[0,T]} T \ ,$$

$$C_2(T)=\frac{\sqrt{6}}{6}(\varepsilon_4+\varepsilon_3)\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]} \left\| |g(x_2,t)|+|g(x_1,t)| \right\|_{C[0,T]} T\left(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \|p_2(t)\|_{C[0,T]} \right).,$$

$$D_2(T)=\frac{\sqrt{6T}}{6}\varepsilon_4 \left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]} \left\| |g(x_2,t)|+|g(x_1,t)| \right\|_{C[0,T]} \left\| g_{xxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)},$$

$$A_3(T)=\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]} \left\{ \left\| h_1(t)\left(h_2''(t)-f(x_2,t)\right)-h_2(t)\left(h_1''(t)-f(x_1,t)\right)\right\|_{C[0,T]} + \right.$$

$$+\left\| |h_2(,t)|+|h_1(t)| \right\|_{C[0,T]} \left[\frac{\sqrt{6}}{6}\varepsilon_3 \left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \frac{\sqrt{6}}{6}\varepsilon_3 \left\|\psi'''(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \right.$$

$$\left.\left. \frac{\sqrt{6T}}{6}\varepsilon_4 \left\| f_{xxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)} \right]\right\},$$

$$B_3(T)=\frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_4 \left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]} \left\| |h_2(,t)|+|h_1(t)| \right\|_{C[0,T]} T \ ,$$

$$C_3(T)=\frac{\sqrt{6}}{6}(\varepsilon_4+\varepsilon_3)\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]} \left\| |h_2(,t)|+|h_1(t)| \right\|_{C[0,T]} T\left(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \|p_2(t)\|_{C[0,T]} \right).,$$

$$D_3(T)=\frac{\sqrt{6T}}{6}\varepsilon_4 \left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]} \left\| |h_2(,t)|+|h_1(t)| \right\|_{C[0,T]} \left\| g_{xxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}.$$

Из неравенств (40)-(42) заключаем:

$$\left\|\tilde{u}(x,t)\right\|_{B^5_{2,T}} + \left\|\tilde{a}(t)\right\|_{C[0,T]} + \left\|\tilde{b}(t)\right\|_{C[0,T]} \le$$

$$\le A(T)+B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}} + C(T)\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}} + D(T)\|b(t)\|_{C[0,T]} \ , \quad (43)$$

где

$$A(T)=A_1(T)+A_2(T)+A_3(T),\ B(T)=B_1(T)+B_2(T)+B_3(T),$$

$$C(T)=C_1(T)+C_2(T)+C_3(T),\ D(T)=D_1(T)+D_2(T)+D_3(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1-5 и*

$$(B(T)((A(T)+2)+C(T)+D(T))(A(T)+2)<1. \quad (44)$$

Тогда задача (1)-(3),(8) ,(9) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^5} \le R = A(T)+2)$ *из* E_T^5 *единственное решение.*

Доказательство. В пространстве E_T^5 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z\,, \tag{45}$$

где $z = \{u, a, b\}$, а компоненты Φ_i $(i = 1,2,3)$ оператора $\Phi(u, a, b)$ определены правыми частями (29), (34), (35) соответственно.

Рассмотрим, оператор $\Phi(u, a, b)$ в шаре $K = K_R$ из E_T^5. Аналогично (43) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^5} \le A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + C(T)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + D(T)\|b(t)\|_{C[0,T]} \le A(T) +$$
$$+ B(T)R^2 + C(T)R + D(T)R = A(T) + (B(T)((A(T)+2) + C(T) + D(T))(A(T)+2)\,, \tag{46}$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^5} \le B(T)R(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^5}) +$$
$$+ C(T)\|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + D(T)\|b_1(t) - b_2(t)\|_{C[0,T]}\,. \tag{47}$$

Тогда из оценок (46) и (47), с учетом (44), следует, что оператор *Ф* действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор *Ф* имеет единственную неподвижную точку $\{u, a, b\}$, которая является единственным в шаре $K = K_R$ решением (35), т.е. является единственным в шаре $K = K_R$ решением системы (29), (34), (35).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^5$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t)$ в D_T.

Аналогично [11].можно доказывает, что $u_t(x,t), u_{tx}(x,t), u_{txx}(x,t)$, $u_{tt}(x,t)$ непрерывны в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3), (8) и (9) удовлетворяются в обычном смысле. Значит, $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ является классическим решением задачи (1)-(3),(8), (9) и в силу леммы 2 это решение единственно. Теорема доказана.

С помощью теоремы 1, легко доказывается следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и*

$$\int_0^1 f(x,t)dx = 0, \int_0^1 g(x,t)dx = 0 \qquad (0 \le t \le T), \quad \int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x)dx = 0\,,$$

$$\varphi(x_i) + \int_0^T p_1(t)h_i(t)dt = h_i(0), \ \psi(x_i) + \int_0^T p_2(t)h_i(t)dt = h_i'(0) \ (i = 1,2)\,.$$

Тогда задача (1)-(5) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^5} \le R = A(T)+2)$ *из* E_T^5 *единственное классическое решение.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1980, т.16, №11, с.1925-1935.
2. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math., 1963, v.5, 21, p.155-160.
3. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения, 1977, т.13, №2, с.294-304.
4. Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения, 1982, т.18, №1, с.72-81.
5. Boussinesq J. Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide content dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de surface au fond//J. Math. Pures Appl. 1872. V. 17. P. 55—108.
6. Varlamov V.V. Asymptoti behavior of solutions of the damped Boussinesq equation in two spa e dimensions // International Journal of Mathemati s and Mathemati al S ien es. 1999. Vol. 22. Issue 1. P. 131 145. DOI: 10.1155/S016117129922131X 7
7. Z.Y., Xie F.D., Zhang H.Q. Symmetry redu tions, integrability and solitary wave solutions to highorder modi ed Boussinesq equations with damping term // Communi ations in Theoreti al Physi s. 2001. Vol. 36. No. 1. P. 1 6. DOI: 10.1088/0253-6102/36/1/1
8. Я. Т. Мегралиев, Ф. Х. Ализаде, "Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода", Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 26:4 (2016), 503–514
9. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972, 668 с.
10. Худавердиев К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью, Баку: Чашыоглы, 2010, 168 с.
11. Я. Т. Мегралиев, Ф. Х. Ализаде, "Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с интегральным условием", Чебышевский сб., **14**:4 2013, т.14. в.4. с. 167–179 .

QEYRİ -LOKAL SƏTRLƏRLİ BİR DÖRD TƏRTİBLİ BUSSİNESK TƏNLİYİ ÜÇÜN QEYRİ-XƏTTİ TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNMASI HAQQİNDA

Y.T.MEHRƏLİYEV, F.H.ALİZADƏ

XÜLASƏ

Qeyri-lokal sərtlərli bir dörd tərtibli Bussinesk tənliyi üçün qeyri-xətti tərs sərhəd məsələsi tədqiq olunur. Məsələyə düzbucaqlı oblastda baxılır. Verilmiş tərs sərhəd məsələsinin həlli köməkçi tərs məsələyə gətirilir. Sıxılmış inikas prinsipinin köməyi ilə köməkçi məsələnin həllinin varlıq və yeganəliyi isbat olunur. Daha sonra isə verilmiş tərs məsələnin həllinin varlıq və yeganəliyi isbat olunur.

Açar sözlər: tərs sərhəd məsələsi, Bussinesk tənliyi, Furye metodu, klassik həll.

ON THE SOLVABILITY OF A NONLINEAR INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SINGLE FOURTH-ORDER BUSSINSK EQUATION WITH NONLOCAL CONDITIONS

Y.T.MEHRALİYEV, F.Kh.ALIZADE

SUMMARY

An nonlinear inverse boundary value problem for one fourth-order Boussinski equation with nonlocal conditions is investigated .The problem is considered in a rectangular domain. To investigate the solvability of the inverse problem, we perform a conversion from the original problem to some auxiliary inverse problem with trivial boundary conditions. By the contraction mapping principle we prove the existence and uniqueness of solutions of the auxiliary problem. Then we make a conversion to the stated problem again and, as a result, we obtain the solvability of the inverse problem.

Key words: inverse boundary value problem, Boussinesq equation, Fourier method, classical solution