BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2020

KƏSR TƏRTİBLİ İNTEQRO-DİFFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN KOŞİ MƏSƏLƏSİNİN ARAŞDIRILMASI

N.Ə.ƏLİYEV, V.Ə.OSMANOV
Bakı Dövlət Universiteti
Saracli@mail.ru

İşdə $\frac{1}{4}$ addımı ilə $\frac{1}{2}$ tərtib törəməli xətti, adi inteqro-differensial tənlik üçün Koşi məsələsinə baxılmışdır. Baxılan Koşi məsələsi ikinci növ Volterra tipli inteqral tənliyə gətirilmişdir. Sonra alınan ikinci növ Volterra tipli inteqral tənliyin həlli ardıcıl yerinə yazma üsulu ilə Neyman sırası şəklində axtarılır. Alınan tənlik volterra tipli olduğundan, Neyman sırasında məxrəcdə faktoriallar yaranır və bu neyman sırası yığılır.

Açar sözlər: Kəsr tərtibdən törəmə, İnteqro-differensial tənlik, Koşi məsələsi, İkinci növ Volterra tipli inteqral tənlik, Ardıcıl yerinə yazma üsulu.

Məlumdur ki, inteqro-differensial tənliklər üçün məsələlər yaxşı araşdırılmışdır. [1]-[3]. Kəsr tərtib törəməli tənliklər üçün də mqxtəlif məsələlərə baxılmışdır [4]-[5]. Artıq kəsr tərtibli inteqro-differensial tənliklər üçün də məsələlərə baxılır [6]. Burada da kəsr tərtib, adi, xətti inteqro-differensial tənlik üçün Koşi məsələsinə baxılır. Qoyulmuş məsələnin tənliyi $\frac{1}{4}$ addımı ilə $\frac{1}{2}$ tərtib törəməli inteqro-differensial tənlikdir. Bu inteqro-differensial tənlik iki dəfə $\frac{1}{4}$ tərtibdən inteqrallanmaqla ikinci növ Volterra tipli inteqral tənliyə gətirilir.

Sonra isə ardıcıl yerinə yazma üsulu ilə bu inteqral tənliyin həlli Neyman sırası şəklində alınır.İnteqral tənlik Volterra tipli olduğundan və Neyman sırasında məxrəcdə faktoriallar yarandığından bu Neyman sırası həmişə yığılır.

Məsələnin qoyuluşu:

$$D^{\frac{1}{2}}y(x) + aD^{\frac{1}{4}}y(x) + by(x) + \int_{x_0}^{x} K(x,t)y(t)dt = 0 \qquad (1)$$

$$y(x_0) = y_0, \qquad D^{\frac{1}{4}}y(x)\Big|_{x=x_0} = y_1 \qquad 0 < x_0 < x \qquad (2)$$

Burada $a, b, y_0, y_1 \in R,\ K(x,t)$ isə kəsilməz funksiyadır.

Bu məsələni həll etmək üçün əvvəlcə tənliyi hər iki tərəfdən $\frac{1}{4}$ tərtibdən inteqrallayırıq:

$$I_{x_0}^{\frac{1}{4}} D^{\frac{1}{2}} y(x) + a I_{x_0}^{\frac{1}{4}} D^{\frac{1}{4}} y(x) + b I_{x_0}^{\frac{1}{4}} y(x) + I_{x_0}^{\frac{1}{4}} \int_{x_0}^{x} K(x,t) y(t) dt = 0 \qquad (3)$$

$$D^{\frac{1}{4}} y(x) + C_1 \frac{x^{-1+\frac{1}{4}}}{\left(-1+\frac{1}{4}\right)!} + a_1 y(x) + a_1 C_2 \frac{x^{-1+\frac{1}{4}}}{\left(-1+\frac{1}{4}\right)!} + b \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{\frac{1}{4}-1}}{\left(\frac{1}{4}-1\right)!} y(\xi) d\xi + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{\frac{1}{4}-1}}{\left(\frac{1}{4}-1\right)!} d\xi \int_{x_0}^{x} K(x,t) y(t) dt = 0 \qquad (4)$$

Yenə $\frac{1}{4}$ tərtibdən inteqrallayarıq:

$$I_{x_0}^{\frac{1}{4}} D^{\frac{1}{4}} y(x) + C_1 I_{x_0}^{\frac{1}{4}} \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} + a_1 I_{x_0}^{\frac{1}{4}} y(x) + a_1 C_2 I_{x_0}^{\frac{1}{4}} \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} b I_{x_0}^{\frac{1}{4}} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} y(\xi) d\xi + I_{x_0}^{\frac{1}{4}} \int_{x_0}^{x} y(t) dt \int_{t}^{x} \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} K(x,t) d\xi = 0 \qquad (5)$$

Bu zaman aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$y(x) + C_3 \frac{x^{-1+\frac{1}{4}}}{\left(-1+\frac{1}{4}\right)!} + C_1 \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{\frac{1}{4}-1}}{\left(\frac{1}{4}-1\right)!} \frac{\xi^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} d\xi + a_1 \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} y(\xi) d\xi + a_1 C_2 \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{\frac{1}{4}-1}}{\left(\frac{1}{4}-1\right)!} \frac{\xi^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} d\xi + b \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{4}-1}}{\left(\frac{1}{4}-1\right)!} d\tau \int_{x_0}^{\tau} \frac{(x-\xi)^{\frac{1}{4}-1}}{\left(\frac{1}{4}-1\right)!} y(\xi) d\xi + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{4}-1}}{\left(\frac{1}{4}-1\right)!} d\tau \int_{x_0}^{\tau} y(t) dt \int_{t}^{\tau} \frac{(\xi-\tau)^{\frac{1}{4}-1}}{\left(\frac{1}{4}-1\right)!} K(\xi,t) d\xi = 0 \qquad (6)$$

Burada C_1, C_2 və C_3 sabitlərini aşağıdakı kimi təyin etmək olar:

$$C_1 = -D^{\frac{1}{4}} y(x) \Big|_{x=x_0}$$

$$C_2 = -y(x_0)$$

$$C_3 = -y(x_0) = C_2$$

Bu əvəzləmədən sonra aşağıdakı kimi ifadə alınar:

$$y(x) + a_1 \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} y(\xi)d\xi + b \int_{x_0}^{x} y(\xi)d\xi \int_{\xi}^{x} \frac{(x-\tau)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} d\tau$$

$$+ \int_{x_0}^{x} y(t)dt \int_{t}^{x} \frac{(x-\tau)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} d\tau \int_{t}^{\tau} \frac{(\tau-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} K(\xi,t)d\xi$$

$$= y(x_0) \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} + D^{\frac{1}{4}} y(x) \Big|_{x=x_0} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} \frac{\xi^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} d\xi$$

$$+ a_1 y(x_0) \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} \frac{\xi^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} d\xi \qquad (7)$$

Əgər burada bütün t-ləri ξ ilə əvəz eləsək və müəyyən çevirmələr aparsaq alarıq:

$$y(x) + \int_{x_0}^{x} \left[a_1 \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} + b \int_{\xi}^{x} \frac{(x-\tau)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} d\tau \right.$$

$$\left. + \int_{\xi}^{x} \frac{(x-\tau)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} d\tau \int_{\xi}^{\tau} \frac{(\tau-t)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} K(t,\xi)dt \right] y(\xi)d\xi = y(x_0) \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!}$$

$$+ D^{\frac{1}{4}} y(x) \Big|_{x=x_0} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} \frac{\xi^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} d\xi$$

$$+ a_1 y(x_0) \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} \frac{\xi^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} d\xi$$

ƏDƏBİYYAT

1. Aliyev N.A, Pashavand A.A, A boundary value problem for a fractional order ordinary linear differential equation with a constant coefficient. Proceedings of the Institute of Applied mathematics Aserbaijan, Baku, v. 4, №1, 2015, p.3-8.

2.Pashavand A.A, Aliyev N.A, A problem for fractional ordinary singular order linear differential equation with constant coefficient and general boundary condition. Abstracts of Aserbaijan-Turkey-Ukrainian International conference mathematical analysis.Differential equations and their applications, Baku, Aserbaijan, 2015, p.133.

3.Jahanshahi m., Aliyev N.A. Boundary value problem for real order differential equations, Caucasian mathematical conference CMC 1 Book of abstracts, Georgia, Tbilisi, 2014, p109.

4. Ahmadhanli A, Jahanshahi m, Aliyev N.A, Boundary value problems for real order differential equations. 4-nd Annual Iranian Mathematical conference University of Tabriz, Iran 2012, p.482-485.

5. Fatemi m, Aliyev N.A, Shahmorad S. Existence and Uniqness of solution for a farctionla order Integro-Differential equation with non-local and Global boundary conditions, Scientific Research Applied Mathematics, 2011, 2, p1292-1296.
6. Xiao-Jun Yang, Feng gao, H.m. Srivastava, Exact treavellingwave solutions for the local fractional two-dimensional Burgers type equations, Computers and mathematics with applications73(2017) 203-210., Elsevier.
7. Xiao-Jun Jang, Zhi-Zhen Zhang, H.m Srivastava, Some new applicationsfor heat and fluid flows with fractional derivatives without singular kernel. Arxiv: 1601.06/144v2[math.AP], 20 apr 2016., p.1-7.
8. Сфмко С.Г, Килбас А.А, Маричев О.Н, Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения-Минск: Наука и техника, 1987, 780 с.
9. Pashavand A.A, Aliyev N.A, A Boundary Value Problem for an Irrational Order Partial Differential Equation, Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and economics, Aserbaijan, Baku, v.3, № 2015, 131-136.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДРОБНО-ИНТЕГРАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.А.АЛИЕВ, В.А.ОСМАНОВ

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматривается задача Коши для обыкновенного интегрально-дифференциального уравнения, линейной производной с шагом 1/4 и 1/2 порядка. Рассматриваемая задача Коши сводится ко второму типу интегральных уравнений типа Вольтерра. Затем решение второго типа интегрального уравнения типа Вольтерра ищется в виде последовательности Неймана путем последовательной подстановки. Поскольку полученное уравнение относится к типу Вольтерра, факториалы формируются на знаменателе ряда Неймана, и этот ряд Неймана сходится.

Ключевые слова: производная дробного порядка, интегро-дифференциальное уравнение, задача Коши, интегральное уравнение типа Вольтерра второго типа, метод последовательной подстановки.

INVESTIGATION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR FRACTIONAL INTEGRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

N.A.ALIYEV, V.A.OSMANOV

SUMMARY

In this work, the Cauchy problem for a Elementary integro-differential equation, a linear derivative with a 1/4 step and a 1/2 order, is considered. The Cauchy problem under consideration is reduced to a second type of Volteire-type integral equation. The solution of the second type of Volteire-type integral equation is then sought in the form of a Neumann sequence by sequential substitution. Since the resulting equation is of the Volteire type, factorials are formed on the denominator in the Neumann series, and this Neumann series converge.

Key words: Derivative of fractional order, Integro-differential equation, Cauchy problem, Volteire type integral equation of the second type, Sequential substitution method.