BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2020

UOT 517.927

YARIMOXDA İKİNCİ TƏRTİB DİFERENSİAL OPERATORLARIN MƏNFİ MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN PAYLANMA FUNKSİYASI İLƏ BAĞLI BƏZİ BƏRZBƏRSİZLİKLƏR

G.M.EYVAZLI
Sumqayıt Dövlət Universiteti
aliyeva_gunel193@mail.ru

Məqalədə yarımoxda verilmiş ikinci tərtib diferensial operatorun mənfi spektri tədqiq edilmişdir. Mənfi spektrin diskretliyi şərtləri müəyyən edilmiş, mənfi məxsusi ədədlərin paylanma funksiyası üçün bəzi qiymətləndirmələr alınmışdır.

Açar sözlər: Diferensial operator, spektr, məxsusi ədədlər, paylanma funksiyası, öz-özünə qoşma operator, aşağıdan məhdud operator, Hilbert fəzası.

Məlum olduğu kimi diskret spektrə malik olan operatorların kvant mexanikasında və nəzəri fizikanın bir çox məsələlərinin öyrənilməsində mühüm əhəmiyyəti və rolu vardır. Ona görə də verilmiş operatorun məxsusi ədədlərinin xassələrinin öyrənilməsi və asimptotik paylanmasının tədqiqi xüsusi maraq doöuran məsələlərdir.

İlk dəfə C.Titcmarş [9] bütün həqiqi oxda verilmiş sonsuzluqda artan potensiala malik Şturm-Liuvill operatorunun məxsusi ədədlərinin asimptotik paylanma düsturunu almışdır. Daha sonra onun tərəfindən Şredinger operatorunun məxsusi əddlərinin paylanma funksiyası üçün asimptotik düstur isbat edilmişdir. Məxsusi ədədlərin asimptotik paylanma düsturunun alınması üçün Titcmarş metodu B.M.Levitan [5] tərəfindən təkmilləşdirilmişdir.

Diferensial operatorların məxsusi ədədlərinin asimptotik paylanmasını öyrənmək üçün G.Veyl və R.Kurant [2] tərəfindən daxil edilmiş variasiya üsulundan da istifadə olunur. Bu üsul M.Ş.Birman [1] tərəfindən inkişaf etdirilmişdir. Bu B.Y.Skacekin [7] qiymətli tədqiqatları vardır. Bəzi hallarda verilmiş məsələnin spektri yalnız yeganə limit nöqtəsi sıfır olan mənfi məxsusi ədədlərdən ibarət olur. Bu halda $(-\varepsilon)$ dan kiçik olan məxsusi ədədlər sayının asimptotikasının tapılması xüsusi əhəmiyyətə malikdir. M.Ş.Birman yuxarıda qeyd olunan məqaləsində yarımoxda verilmiş ikinci tərtib diferensial tənliyin mənfi məxsusi ədədlərinin paylanması üçün qiymətləndirmələr alınmışdır. Sinqulyar diferensial operatorların mənfi məxsusi ədədləri üçün asimptotik düsturlar B.Y.Skacek [7], Q.Rozenblyum [6], A.Laptev [3], A.laptev və M.Z.Solomyak [4] tərəfindən alınmışdır.

1. Məsələnin qoyuluşu.Məsələnin məxsusi ədədləri ilə bağlı bəzi bərzbərsizliklər.

$L_2[0,\infty)$ fəzasında

$$l(y) = -y'' - q(x)y \qquad (1)$$

diferensial ifadəsi və

$$y'(0) = 0 \qquad (2)$$

sərhəd şərtləri ilə təyin olunmuş L operatoruna baxaq.

Fərz edilir ki, $q(x)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1) $q(x)$ funksiyası $[0,\infty)$ intervalında kəsilməz, monoton azalan, müsbət funksiyadır.

2) $\lim_{x\to\infty} q(x) = 0$.

L operatorunun təyin oblastı $D(L)$ elə $y(x) \in L_2[0,\infty)$ funksiyalarından ibarətdir ki, $y'(x)$ hər bir $[a,b] \subset [0,\infty)$ parçasında mütləq kəsilməz olsun, $l(y) = -y'' - q(x)y, l(y) \in L_2[0,\infty)$ və $y'(0) = 0$ şərti ödənilsin. Bu halda L operatoru $D(L)-$ dən $L_2[0,\infty)$ fəzasına $Ly = l(y)$ kimi təsir edən operatordur:

$$L : D(L) \to L_2[0,\infty)$$

Bu qayda ilə təyin edilmiş L operatoru öz-özünə qoşma, aşağıdan məhduddur və spektrinin mənfi hissəsi diskretdir [1]. L operatorunun mənfi məxsusi ədədlərini $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le$ kimi işarə edək.

$q(x)$ funksiyası üzərinə qoyulan şərtlərdən onun tərs funksiyasının varlığı alınır. Bu tərs funksiyanı $p(x)$ ilə işarə edək. $\varepsilon \in (0, q(0))$ ədədini götürək və aşağıdakı operatorları təyin edək:

1) $L_2[p(\varepsilon),\infty)$ fəzasında

$$l(y) = -y'' - q(x)y$$

diferensial ifadəsi və $y'(p(\varepsilon)) = 0$ sərhəd şərti ilə təyin olunmuş operatoru L' ilə işarə edək.

2) $L_2[0, p(\varepsilon))$ fəzasında $l(y) = -y'' - q(x)y$ diferensial ifadəsi və uyğun olaraq $y(0) = y(p(\varepsilon)) = 0$ və $y'(0) = y'(p(\varepsilon)) = 0$ sərhəd şərtləri ilə təyin olunan operatorları L_0 və L_1 ilə işarə edək.

3) $L_2[x_{i-1}, x_i]$ fəzasında (1) diferensial ifadəsi və uyğun olaraq $y(x_{i-1}) = y(x_i) = 0$ və $y'(x_{i-1}) = y'(x_i) = i$ sərhəd şərtləri ilə təyin olunmuş operatorları L_{0i} və L_{1i} ilə işarə edirik.

4) $L_2[x_{i-1}, x_i]$ fəzasında (1) $l(y) = -y'' - q(x_i)y(x)$ diferensial ifadəsi

və $(y(x_i)) = y(x_i) = 0$ sərhəd şərti ilə təyin olunmuş operatoru $\overline{L}_{0i}$ ilə, $l(y) = -y'' - q(x_{i-1})y(x)$ diferensial ifadəsi və $(y'(x_{i-1})) = y'(x_i) = 0$ sərhəd şərti ilə təyin olunan operatoru isə $\overline{L}_{1i}$ ilə işarə edək.

Əvvəlcə aşağıdakı teoremi isbat edək:

Teorem 1. Əgər $q(x)$ funksiyası 1) şərtini ödəyərsə, onda istənilən $y \in D(L')$ üçün

$$(L'y, y) \geq -\varepsilon(y, y) \tag{3}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. İstənilən $y \in D(L')$ üçün aşağıdakı bərabərlikləri yaza bilərik:

$$(L'y, y) = \int\limits_{p(\varepsilon)}^{\infty} \left[- y''(x) - q(x)y(x)\right] \cdot \overline{y(x)}dx = -y'(x)\bar{y}(x)\Bigg|_{p(\varepsilon)}^{\infty} +$$

$$+ \int\limits_{p(\varepsilon)}^{\infty} y'(x)\bar{y}^1(x)dx - \int\limits_{p(\varepsilon)}^{\infty} q(x)y^2(x)dx = \int\limits_{p(\varepsilon)}^{\infty} (y'(x))^2 dx - \int\limits_{p(\varepsilon)}^{\infty} q(x)y^2(x)dx \tag{4}$$

şərtə görə $q(x)$ funksiyası monoton azalan olduğundan $[p(\varepsilon), \infty)$ intervalında

$$q(x) \leq q(p(\varepsilon)) = \varepsilon \tag{5}$$

bərabərsizliyi doğrudur. Onda (4), (5) münasibətlərində istənilən $y \in D(L')$ üçün $(L'y, y) \geq -\varepsilon(y, y)$ olduğunu alırıq; $N(\alpha), N_0(\alpha)$ və $N_1(\alpha)$ ilə uyğun olaraq L, L_0 və L' operatorlarının $-\alpha-$dan $\alpha \in (0, \infty)$ kiçik olan mənfi məxsusi ədədlərinin sayını işarə edək.

L operatorunun $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ məxsusi ədədlərinə uyğun ortonormal məxsusi vektorlarını $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ilə işarə edək.

$T = L + \alpha E, T_0 = L_0 + \alpha E,\ T_1 = L_1 + \alpha E$ işarə edək. Burada E ilə uyğun olaraq $L_2[0, \infty)$ və $L_2[p(\varepsilon), \infty)$ fəzalarında vahid operatorları işarə edirik.

Aydındır ki,

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots \leq \lambda_{N(\alpha)} \leq -\alpha, \lambda_{N(\alpha)+1} > -\alpha \tag{6}$$

olduğundan T operatorunun məxsusi ədədləri

$$\mu_i = \lambda_i + \alpha \quad (i = 1,2,\ldots) \text{ olar.}$$

Onda (6) münasibətinə görə

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_{N(\alpha)} < 0,\ \mu_{N(\alpha)+1} \geq 0$$

olar.

Buradan T operatorunun mənfi məxsusi ədədlərinin sayının $N(\alpha)-$ya bərabər olması alınır.

T_0 operatorunun $\alpha-$dan kiçik olan məxsusi ədədləri sayını $N_0(\alpha), T_1$ operatorunun $\alpha-$dan kiçik məxsusi ədədləri sayını $N_1(\alpha)$ ilə işarə edək.

T_0 və T operatorlarının mənfi məxsusi ədədlərini uyğun olaraq

$$\mu_{(0)1} \le \mu_{(0)2} \le \cdots \le \mu_{(0)N_0(\alpha)} \tag{8}$$

və

$$\mu_{(1)1} \le \mu_{(1)2} \le \cdots \le \mu_{(1)N_1(\alpha)} \tag{9}$$

ilə, bu məxsusi ədədlərə uyğun ortonormal məxsusi vektorlarını isə

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N_0(\alpha)} \tag{10}$$

və

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{N_1(\alpha)} \tag{11}$$

ilə işarə edək.

2. Əsas nəticələr.

Teorem 2. Əgər $q(x)$ funksiyası 1), 2) şərtlərini ödəyərsə, bu halda istənilən $\alpha \in (0, \infty)$ üçün

$$N(\alpha) \ge N_0(\alpha) \tag{12}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. Əksini fərz edək. Yəni fərz edək ki, $N(\alpha) < N_0(\alpha)$. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N_0(\alpha)}$ funksiyaların hər birinə ortoqonal olan, yəni $p(\varepsilon)$

$$(\varphi_i, \varphi) = \int_0^{p(\varepsilon)} \varphi_i(x)\overline{\varphi}(x)dx = 0, \;\; i = 1,2,\ldots N_{0(\alpha)} \tag{13}$$

şərtini ödəyən

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \beta_i \varphi_i \tag{14}$$

elementini götürək.

$$(T_0\varphi, \varphi) = \left(T_0\left(\sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \beta_i \varphi_i \right), \sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \beta_i \varphi_i \right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \beta_i \mu_{(0)i} \varphi_i, \sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \beta_i \varphi_i \right) = \sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \mu_{(0)i} |\beta_i|^2 = \gamma < 0. \tag{15}$$

[2]-dən məlumdur ki, bu halda $\widetilde{\varphi}(x)$ funksiyası vardır ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

a) $\widetilde{\varphi}(x)$ funksiyasının $[0, p(\varepsilon)]$ parçasında ikinci tərtib kəsilməz törəməsi vardır;

b) Elə $[a,b] \subset (0, p(\varepsilon))$ parçasdı vardır ki, bu parça xaricində $\widetilde{\varphi}(x) = 0$.

v) $\left| (T_0\widetilde{\varphi}, \widetilde{\varphi}) - (T_0\varphi, \varphi) \right| < -\dfrac{\gamma}{2}$

e) $(\varphi_i, \widetilde{\varphi}) = 0, \;\; i = 1,2,\ldots N(\alpha)$

Məlum olduğu kimi [ ],

$$\begin{aligned} &\inf (Ty, y) = \mu_{N(\alpha)+1} \\ &y \in D(T),\ \|y\| = 1 \\ &y \perp \varphi_i,\ i = 1,2,\ldots N(\alpha) \end{aligned} \qquad (18)$$

Buradan

$$\left(T_0\left(\frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|}\right), \frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|}\right) = \left(T\left(\frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|}\right), \frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|}\right) \geq \mu_{N(\alpha)+1} \geq 0 \qquad (19)$$

$$(T_0\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) \geq 0 \qquad (20)$$

alırıq. (15) və (20) münasibətlərindən

$$(T_0\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) - (T_0\varphi, \varphi) = (T_0\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) - \gamma \geq -\gamma$$

alırıq. Bu isə v) şərtinə ziddir. Deməli, $N(\alpha) < N_0(\alpha)$ ola bilməz, $N(\alpha) \geq N_0(\alpha)$ olmalıdır. Teorem 2 isbat olundu.

Teorem 3. $q(x)$ funksiyası 1), 2) şərtlərini ödədikdə istənilən $\alpha \in [\varepsilon, \infty)$ üçün

$$N(\alpha) \leq N_i(\alpha) \qquad (21)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. Əksini fərz edək; fərz edək ki, $N(\alpha) > N_i(\alpha)$ Onda $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N(\alpha)}$ funksiyalarına ortoqonal olan sıfırdan fərqli elə

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N(\alpha)} d_i \varphi_i \qquad (22)$$

funksiyası vardır ki,

$$(T\varphi, \varphi) = \left(T\left(\sum_{i=1}^{N(\alpha)} d_i\varphi_i\right), \sum_{i=1}^{N(\alpha)} d_i\varphi_i\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N(\alpha)} d_i\mu_i\varphi_i, \sum_{i=1}^{N(\alpha)} d_i\varphi_i\right) = \sum_{i=1}^{N(\alpha)} \mu_i |d_i|^2 < 0. \qquad (23)$$

Bu ifadəni aşağıdakı kimi göstərə bilərik:

$$(T\varphi, \varphi) = \int_0^{p(\varepsilon)} (T\varphi(x)) \cdot \overline{\varphi}(x)dx + \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} (T\varphi(x)) \cdot \overline{\varphi}(x)dx < 0 \qquad (24)$$

Göstərək ki,

$$\int_0^{p(\varepsilon)} (T\varphi(x)) \cdot \overline{\varphi}(x)dx \geq 0 \qquad (25)$$

Əgər $\int\limits_0^{p(\varepsilon)} |\varphi(x)|^2 dx = 0$ olarsa, onda

$$\left| \int\limits_{p(\varepsilon)}^{\infty} (T\varphi(x))\overline{\varphi}(x)dx \right| \le \left[\int\limits_{p(\varepsilon)}^{\infty} |T\varphi(x)|^2 dx \right]^{1/2} \cdot \left[\int\limits_{p(\varepsilon)}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx \right]^{1/2} = 0 \qquad (27)$$

olar.

Buradan

$$\int\limits_{p(\varepsilon)}^{\infty} T\varphi(x) \cdot \overline{\varphi(x)} dx = 0 \qquad (28)$$

alarıq. İndi isə (25) bərabərsizliyini $\int\limits_0^{p(\varepsilon)} |\varphi(x)|^2 dx > 0$ olduğu halda göstərək.

Əksini fərz edək. Tutaq ki,

$$\int\limits_{p(\varepsilon)}^{\infty} \big(T\varphi(x)\big) \cdot \overline{\varphi(x)} dx < 0 \qquad (29)$$

$y \in L_2[0,\infty)$ üçün

$$\|y\|_1^2 = \int\limits_{p(\varepsilon)}^{\infty} |y(x)|^2 dx \qquad (30)$$

götürək. (29) bərabərsizliyindən çıxır ki,

$$\inf_{\substack{y\in D(T),\ p(\varepsilon) \\ \|y\|_1=1}} \int\limits_{p(\varepsilon)}^{\infty} \big(Ty(x)\big) \cdot \bar{y}(x) dx < 0 \qquad (31)$$

Digər tərəfdən

$$\inf_{\substack{y\in D(T), \\ y'(p(\varepsilon))=0, \\ \|y\|_1=1}} \int\limits_{p(\varepsilon)}^{\infty} \big(Ty(x)\big) \cdot \overline{y(x)} dx = \inf_{\substack{y\in D(T), p(\varepsilon) \\ \|y\|_1=1}} \int\limits_{p(\varepsilon)}^{\infty} \big(Ty(x)\big) \cdot \overline{y(x)} dx \qquad (32)$$

olduğu məlumdur. Onda (31) və (32)-dən alarıq:

$$\inf_{\substack{y\in D(T)(L') \\ \|y\|=1}} \big((L' + \alpha E)y, y\big) < 0$$

və ya

$$\inf_{\substack{y\in D(T)(L') \\ \|y\|=1}} \big(L'y, y\big) < -\alpha \le -\varepsilon. \qquad (33)$$

Alışnmış bu bərzbərsizlik isə teorem 1-ə ziddir. Yəni (25) bərabərsizliyi doörudur.

Nəticədə

$$\int_{0}^{p(\varepsilon)} T\big(y(x)\big)\cdot \bar{y}(x)dx < 0 \tag{34}$$

olduğunu alırıq.
Əgər

$$\big(y,\psi_i\big) = \int_{0}^{p(\varepsilon)} y(x)\overline{\psi_i(x)}dx \tag{35}$$

olduğunu nəzərə alsaq (34) bərabərsizliyindən alarıq:

$$\inf_{\substack{y\in D(T)\\ \|y\|_2=1,\\ y\perp\psi_i,(i=1,2,\ldots N_1(\alpha))}} \int_{0}^{p(\varepsilon)} T\big(y(x)\big)\cdot \overline{y(x)}dx < 0 \tag{36}$$

Burada

$$\|y\|_2 = \left(\int_{0}^{p(\varepsilon)} |y(x)|^2 dx\right)^{1/2} \tag{37}$$

(36) bərabərsizliyindən aşağıdakı bərabərsizlik alınır

$$\inf_{\substack{y\in D(T)\\ \|y\|_2=1,\\ y'(0)=y'(p(\varepsilon)),\\ y\perp\psi_i,(i=1,2,\ldots N_1(\alpha))}} \int_{0}^{p(\varepsilon)} T\big(y(x)\big)\cdot \overline{y(x)}dx < 0.$$

Burada isə aşağıdakı bərabərsizlik alınır:

$$\inf_{\substack{y\in D(T_1)\\ \|y\|=1,\\ y\perp\psi_i,(i=1,2,\ldots N_1(\alpha))}} \int_{0}^{p(\varepsilon)} T\big(y(x)\big)\cdot \overline{y(x)}dx < 0 \tag{38}$$

Digər tərəfdən isə

$$\inf_{\substack{y\in D(T_1)=0\\ \|y\|=1,\\ y\perp\psi_i,(i=1,2,\ldots N_1(\alpha))}} \int_{0}^{p(\varepsilon)} \big(T_1\big(y(x)\big)\big)\cdot \overline{y(x)}dx = \mu_{(1)(N_i(\alpha)+1)} \geq 0 \tag{39}$$

(38) və (39) bərabərsizlikləri ziddiyyət təşkil edir.

Onda alırıq ki, $N(\alpha) > N_i(\alpha)$, $\alpha \in [\varepsilon,\infty)$ ola bilməz. Yəni istənilən $\alpha \in [\varepsilon,\infty)$ üçün $N(\alpha) \leq N_i(\alpha)$ olmalıdır. Teorem 3 isbat edildi.

Məsələnin qoyuluşuna və işin yerinə yetirilməsində göstərdiyi köməyə görə elmi rəhbərim professor Həmidulla Aslanova öz dərin təşəkkürümü bildirirəm.

ƏDƏBİYYAT

1. Бирман М.Ш. О спектре сингулярных граничных задач. Матем. сборн. (№5), 55(97), 1961, с.125-174.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.-Л.Гостехиздат, 1951, т.1, 476 с.
3. Laptev N.A. Asymptotics of the negative discrete spectrum of a class of Schrodinger operators with large coupling constant. Proc. Am. Math. Soc. 119 (2), 1993, p.481-488.
4. Laptev A.A., Solomyak M.Z. On the negative spectrum of the two-dimensional Schrodinger operator with radial potential. Commun. Math. Phys. 314 (1), 2012, p.229-241.
5. Левитан Б.М. О разложении по собственным функциям оператора Шредингера в случае неограниченного растущего потенциала. ДАН СССР, 1955, т.103, №2, с.191-194.
6. Rozenbloom G.V. An asymptotics of the negative discrete spectrum of the Schrodinger operators. Math. Notes 21(3), 1977, p.222-227.
7. Скачек Б.Я. Об асимптотике отрицательной части спектра многомерных дифференциальных операторов. Допоbigi АН УРСР, 1964, №1, с.14-17.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. т.5, Изд-во физ-мат. литературы, М.1959, 655с.
9. Титчмарш Е.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т.2, М. ИЛ, 1961, 565с.

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА, СВЯЗАННЫМИ С ФУНКЦИЯМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПОЛУОСИ

Г.М.ЭЙВАЗЛЫ

РЕЗЮМЕ

В данной статье исследован отрицательный спектр дифференциального оператора второго порядка на полуоси. Получены условия дискретности отрицательного спектра и доказаны некоторые оценки для функции распределения отрицательных собственных значений.

Ключевые слова: Дифференциальный оператор, спектр, собственные значения, функция распределения, самосопряженный оператор, ограниченный снизу оператор, гильбертово пространство.

SOME INEQUALITIES RELATED TO DISTRIBUTION FUNCTIONS OF NEGATIVE EIGEN VALUES OF DIFFERENTIAL OPERATORS ON THE SEMI-AXIS

G.M.EYVAZLI

SUMMARY

In this paper we study the negative spectrum of a second-order differential operator on the semi-axis. Discreteness conditions of the negative spectrum are obtained and some estimates are proved for the distribution function of negative eigenvalues.

Keywords: Differential operator, spectrum, eigen values, distribution function, selfadjoint operator, lower bounded operator, Hilbert space