BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2021

УДК 517.9

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА СОДЕРЖАЩАЯ ВТОРЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ, I

М.А.САДЫГОВ, А.М.САДЫГОВ
Бакинский Государственный Университет
misreddin08@rambler.ru

В работе изучены свойства субдифференциала интегрального и терминального функционала в пространстве типа абсолютно непрерывных функций.

Ключевые слова: интегральный функционал, выпуклая функция, субдифференциал.

В работе изучаются субдифференциал интегрального и терминального функционала в пространстве $W^n_{p,2}[t_0,T]$ (см.[1]). Такая задача в $W^n_{p,1}[t_0,T]$ изучены в [2] и [3].

Интегральный выпуклый функционал в пространстве $L_p\,(1\le p\le\infty)$ и C исследованы в статье Р.Т.Рокафеллара [4] и в статье А.Д.Иоффе и В.Л.Левина [5], а также в книгах А.Д.Иоффе и В.М.Тихомирова [6], И.Экланда и Р.Темам [7].

Известно, что пространства Соболева представляют более теоретический интерес. В работе изучены двойственности и субдифференцируемости выпуклых функционалов в пространстве $W^n_{p,2}[t_0,T]$.

1. О субдифференцируемости интегрального функционала

Всякая функция (со значениями из $[-\infty,+\infty]$), определенная на $S\times R^n$, где S произвольное пространство с конечной положительной мерой, называется интегрантом. Интегрант $f(s,x)$ определенный на $S\times R^n$ называется (см.[6,с.344]) измеримым (соответственно нормальным, выпуклым и т.д.), если многозначное отображение $s\to epf_s=\{(x,\alpha)\in R^n\times R:\alpha\ge f(s,x)\}$ измеримо ($s\to epf_s$ измеримо и epf_s замкнутое множество, epf_s выпукло и т.д.). Если f нормальный интегрант на $S\times R^n$, то для всякого измеримого отображения $x(s)$ из S в R^n функция $f(s,x(s))$ измерима (см.[6], предложение 8.1.8). Если f измеримый интегрант на $S\times R^n$ и почти при каждом s функция f^*_s собственная, то из теоремы 8.1.4 [6, с.348] следует, что f^*

нормальный выпуклый ингегрант на $S\times R^n$.

Обозначим $R_\infty = R \bigcup \{+\infty\}$.

Символом $W^n_{p,2}[t_0,T]$ обозначается банахово пространство абсолютно непрерывных вместе со своими производными первого порядка функций из $[t_0,T]$ в R^n вторая производная, которых принадлежит $L^n_p[t_0,T]$, где $1\le p<\infty$. Норма в $W^n_{p,2}[t_0,T]$ может быть задана разными эквивалентными способами. Например

$$\|x(\cdot)\|_{W^n_{p,2}} = |x(t_0)| + |\dot{x}(t_0)| + \left(\int_{t_0}^{T} |\ddot{x}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{или} \quad \|x(\cdot)\|_2 = \max_{t_0\le t\le T}|x(t)| + \max_{t_0\le t\le T}|\dot{x}(t)| + \left(\int_{t_0}^{T} |\ddot{x}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Всякий линейный непрерывный функционал z^* на пространстве $W^n_{p,2}[t_0,T]$, $1\le p<\infty$, можно единственным образом представить в виде

$$z^*(x) = (x(t_0)|a_0) + (\dot{x}(t_0)|a_1) + \int_{t_0}^{T} (\ddot{x}(t)|\upsilon(t))dt,$$

где $a_0, a_1 \in R^n,\ \upsilon(\cdot)\in L^n_{p'}[t_0,T],\ pp' = p + p'$. Функционал $z^*\in W^n_{p,2}[t_0,T]^*$ в дальнейшем обозначается символом $(a_0,a_1,\upsilon(\cdot))$ (см.[6, с.32]).

Пусть g - нормальный выпуклый интегрант на $[t_0,T]\times R^n\times R^n$. Рассмотрим функционал

$$J(x) = \int_{t_0}^{T} g(t,x(t),\dot{x}(t))dt, \quad x\in W^n_{p,2}[t_0,T].$$

Субградиентами $J(x)$ в точке $\overline{x}\in W^n_{p,2}[t_0,T]$ являются по определению элементы $z^*\in W^n_{p,2}[t_0,T]^*$ для которых $J(x) - J(\overline{x}) \ge z^*(x-\overline{x})$ при всех $x\in W^n_{p,2}[t_0,T]$ или, что равносильно, $J^*(z^*) + J(\overline{x}) = z^*(\overline{x})$, где $J^*(z^*) = \sup\{z^*(x) - J(x) : x\in W^n_{p,2}[t_0,T]\}$.

Множество всех таких субградиентов обозначается через $\partial J(\overline{x})$ и называется субдифференциалом функционала $J(x)$ в точке $\overline{x}$.

В этом пункте устанавливается связь между $\partial J(\overline{x})$ и $\partial g(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t))$.

Лемма 1.1. Пусть $g:[t_0,T]\times R^n\times R^n \to R_\infty$ нормальный выпуклый интегрант, существует $\varepsilon>0$ такое, что функция $g(t,x_0(t)+x,\dot{x}_0(t)+y)$ суммируема в $[t_0,T]$ при $(x,y)\in R^n\times R^n$, $|(x,y)|\le\varepsilon$. Тогда функционал $J(x)$ непрерывен в точке $x_0(\cdot)\in W^n_{p,2}[t_0,T]$ относительно нормированной топологии пространства $W^n_{p,2}[t_0,T]$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $C^n[t_0,T]\times C^n[t_0,T]$

функционал $I(x,y)=\int_{t_0}^{T} g(t,x(t),y(t))dt$. Из предложения 8.3.4[6] следует, что функционал $I(x,y)$ непрерывен в пространстве $C^n[t_0,T]\times C^n[t_0,T]$ в точке $(x_0(\cdot),\dot x_0(\cdot))$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $\left|I(x,y)-I(x_0,\dot x_0)\right|\le\varepsilon$ при $(x,y)\in C^n[t_0,T]\times C^n[t_0,T]$, $\|(x,y)-(x_0,\dot x_0)\|_C=\|x-x_0\|_C+\|y-\dot x_0\|_C\le\delta$, где $\|x\|_C=\max\{|x(t)|:t\in[t_0,T]\}$. Обозначим $\overline{T}=\max\{1,\sqrt[p']{T-t_0}\}$. Так как

$$\|x-x_0\|_C+\|\dot x-\dot x_0\|_C\le|x(t_0)-x_0(t_0)|+\int_{t_0}^{T}|\dot x(t)-\dot x_0(t)|dt+$$

$$+|\dot x(t_0)-\dot x_0(t_0)|+\int_{t_0}^{T}|\ddot x(t)-\ddot x_0(t)|dt\le|x(t_0)-x_0(t_0)|+(T-t_0)\|\dot x-\dot x_0\|_C+$$

$$+|\dot x(t_0)-\dot x_0(t_0)|+\int_{t_0}^{T}|\ddot x(t)-\ddot x_0(t)|dt\le|x(t_0)-x_0(t_0)|+(1+T-t_0)(|\dot x(t_0)-\dot x_0(t_0)|+$$

$$+\sqrt[p']{T-t_0}\,(\int_{t_0}^{T}|\ddot x(t)-\ddot x_0(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}})\le(1+T-t_0)\overline{T}\|x-x_0\|_{W^n_{p,2}},$$

то $|J(x)-J(x_0)|\le\varepsilon$ при $\|x-x_0)\|_{W^n_{p,2}}\le\dfrac{\delta}{\overline{T}(1+T-t_0)}$. Лемма доказана.

Лемма 1.2. Пусть $g:[t_0,T]\times R^n\times R^n\to R_\infty$ нормальный выпуклый интегрант, выпуклый функционал $J(x)$ конечен в точке $x_0(\cdot)\in W^n_{p,2}[t_0,T]$. Тогда следующие условия эквивалентны:

a) функционал $J(x)$ непрерывен в точке $x_0(\cdot)\in W^n_{p,2}[t_0,T]$ относительно нормированной топологии пространства $W^n_{p,2}[t_0,T]$.

b) существует $\varepsilon>0$ такое, что функция $g(t,x_0(t)+x,\dot x_0(t)+y)$ суммируема в $[t_0,T]$ при $(x,y)\in R^n\times R^n$, $|(x,y)|\le\varepsilon$.

Доказательство. По лемме 1.1 имеем, что из b) следует a).

Обратно если выполнено a), то положив $x(t)=x_0(t)+x$ и $x(t)=x_0(t)+x+ty$ получим, что существует $\varepsilon>0$ такое, что функция $g(t,x_0(t)+x,\dot x_0(t))$ и $g(t,x_0(t)+x+ty,\dot x_0(t)+y)$ суммируемы в $[t_0,T]$ при $(x,y)\in R^n\times R^n$, $|(x,y)|\le\varepsilon$. Из суммируемости функции $g(t,x_0(t)+x,\dot x_0(t))$ при $x\in R^n$, $|x|\le\varepsilon$ следует, что функционал $x(\cdot)\to\int_{t_0}^{T}g(t,x(t),\dot x_0(t))dt$ непрерывен в пространстве $W^n_{p,2}[t_0,T]$ в точке $x_0(\cdot)$. Поэтому существует $\delta>0$ такое, что функция $g(t,x_0(t)+x-ty,\dot x_0(t))$ суммируема в $[t_0,T]$ при $(x,y)\in R^n\times R^n$, $|(x,y)|\le\delta$. Положив $\nu=\min\{\varepsilon,\delta\}$ получим, что

$$g(t,x_0(t)+x,\ \dot x_0(t)+0{,}5y)\le 0{,}5\,g(t,x_0(t)+x+ty,\ \dot x_0(t)+y)+0{,}5\,g(t,x_0(t)+x-ty,\ \dot x_0(t))$$

при $(x,y)\in R^n\times R^n$, $|(x,y)|\le\nu$. Поэтому функция $g(t,x_0(t)+x,\dot{x}_0(t)+y)$ суммируема в $[t_0,T]$ при $(x,y)\in R^n\times R^n$, $|(x,y)|\le 0{,}5\nu$. Отсюда следует б). Лемма доказана.

Рассмотрим в пространстве $L^n_\infty[t_0,T]\times L^n_\infty[t_0,T]$ функционал

$$\bar{J}(x(\cdot),y(\cdot))=\int_{t_0}^{T} g(t,x(t),y(t))\,dt\,.$$

Лемма 1.3. Если $(x,y)\to g(t,x,y)$ положительно однородная выпуклая функция и для всякого $(x,y)\in R^n\times R^n$ функция $g(t,x,y)$ суммируема, то

$$J^*(z^*)=\begin{cases}0:\ a_0=\int_{t_0}^{T}x^*(s)ds,\ a_1=-\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu+\int_{t_0}^{T}y^*(s)ds,\ \upsilon(t)=\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu-\\ \quad-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu-\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu-\int_{t_0}^{t}y^*(s)ds+\int_{t_0}^{T}y^*(s)ds;\ (x^*,y^*)\in\partial\bar{J}(0,0);\\ +\infty:\ \text{в противном случае.}\end{cases}$$

где $z^*=(a_0,a_1,\upsilon(\cdot))$.

Доказательство. Ясно, что $\bar{J}(x(\cdot),y(\cdot))$ выпуклый положительно однородный и по следствию 2А[4] непрерывный функционал на $L^n_\infty[t_0,T]\times L^n_\infty[t_0,T]$. Поэтому по предложению 4.2.3 ([6], с. 210) и по теореме 8.3.3 ([6], с. 362) $\partial\bar{J}(0)$ непусто, слабо* компактно и $\partial\bar{J}(0)\subset L^n_1[t_0,T]\times L^n_1[t_0,T]$. Из предложения 4.1.1 [6, с.203] следует, что

$$\bar{J}(x(\cdot),y(\cdot))=\max_{(x^*,y^*)\in\partial\bar{J}(0,0)}\int_{t_0}^{T}((x^*(t)|x(t))+(y^*(t)|y(t)))dt.$$

Поэтому, используя теорему о минимаксе (см.например, [8, с.288]) имеем

$$J^*(z^*)=\sup_{x\in W^n_{p,2}[t_0,T]}\{\langle z^*,x\rangle-J(x)\}=\sup_{x\in W^n_{p,2}[t_0,T]}\{(x(t_0)|a_0)+(\dot{x}(t_0)|a_1)+\int_{t_0}^{T}(\ddot{x}(t)|\upsilon(t))dt-$$

$$-\max_{(x^*,y^*)\in\partial\bar{J}(0,0)}\int_{t_0}^{T}((x^*(t)|x(t))+(y^*(t)|\dot{x}(t)))dt\}=\sup_{x\in W^n_{p,2}[t_0,T]}\min_{(x^*,y^*)\in\partial\bar{J}(0,0)}\{(x(t_0)|a_0)+(\dot{x}(t_0)|a_1)+$$

$$+\int_{t_0}^{T}(\ddot{x}(t)|\upsilon(t))dt-\int_{t_0}^{T}((x^*(t)|x(t))+(y^*(t)|\dot{x}(t)))dt\}=\min_{(x^*,y^*)\in\partial\bar{J}(0,0)}\sup_{x\in W^n_{p,2}[t_0,T]}\{(x(t_0)|a_0)+$$

$$+(\dot{x}(t_0)|a_1)+\int_{t_0}^{T}(\ddot{x}(t)|\upsilon(t))dt-\int_{t_0}^{T}((x^*(t)|x(t))+(y^*(t)|\dot{x}(t)))dt\}.$$

Очевидно, что

$$\int_{t_0}^{T}(x^*(t)|x(t))\,dt=\int_{t_0}^{T}\Big(x(t)\Big|d\Big(\int_{t_0}^{t}x^*(s)\,ds-\int_{t_0}^{T}x^*(s)\,ds\Big)\Big)=\Big(x(t_0)\Big|\int_{t_0}^{T}x^*(s)\,ds\Big)-$$

$$-\int_{t_0}^{T}\Big(\dot{x}(t)\Big|\Big(\int_{t_0}^{t}x^*(s)\,ds-\int_{t_0}^{T}x^*(s)\,ds\Big)\Big)dt=\Big(x(t_0)\Big|\int_{t_0}^{T}x^*(s)\,ds\Big)-\int_{t_0}^{T}\Big(\dot{x}(t)\Big|\Big(d\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu-\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu\Big)=\Big(x(t_0)\Big|\int_{t_0}^{T}x^*(s)\,ds\Big)+$$

$$+\Big(\dot{x}(t_0)\Big|\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu-\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu\Big)+\int_{t_0}^{T}\Big(\ddot{x}(t)\Big|\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu-\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu\Big)dt.$$

Также имеем, что

$$\int_{t_0}^{T}(y^*(t)|\dot{x}(t))\,dt=\int_{t_0}^{T}\Big(\dot{x}(t)\Big|d\Big(\int_{t_0}^{t}y^*(s)\,ds-\int_{t_0}^{T}y^*(s)\,ds\Big)\Big)=\Big(\dot{x}(t_0)\Big|\int_{t_0}^{T}y^*(s)\,ds\Big)-\int_{t_0}^{T}\Big(\ddot{x}(t)\Big|\int_{t_0}^{t}y^*(s)\,ds-\int_{t_0}^{T}y^*(s)\,ds\Big)dt.$$

Поэтому получим, что

$$J^*(z^*)=\min_{(x^*,y^*)\in\partial\bar{J}(0,0)}\ \sup_{x\in W^n_{p,2}[t_0,T]}\Big\{(x(t_0)\,|\,a_0)+(\dot{x}(t_0)\,|\,a_1)+\int_{t_0}^{T}(\ddot{x}(t)\,|\,\upsilon(t))\,dt-\Big(x(t_0)\Big|\int_{t_0}^{T}x^*(s)\,ds\Big)-$$

$$-\Big(\dot{x}(t_0)\Big|\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu-\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu\Big)-\int_{t_0}^{T}\Big(\ddot{x}(t)\Big|\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu-\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu\Big)dt-\Big(\dot{x}(t_0)\Big|\int_{t_0}^{T}y^*(s)\,ds\Big)+\int_{t_0}^{T}\Big(\ddot{x}(t)\Big|\Big(\int_{t_0}^{t}y^*(s)\,ds-\int_{t_0}^{T}y^*(s)\,ds\Big)dt\Big\}=$$

$$=\min_{(x^*,y^*)\in\partial\bar{J}(0,0)}\ \sup_{x\in W^n_{p,2}[t_0,T]}\Big\{\Big(x(t_0)\,\Big|\,a_0-\int_{t_0}^{T}x^*(s)ds\Big)+\Big(\dot{x}(t_0)\,\Big|\,a_1-\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu-\int_{t_0}^{T}y^*(s)ds\Big)+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\Big(\ddot{x}(t)\,\Big|\,\upsilon(t)-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu-\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu+\int_{t_0}^{t}y^*(s)\,ds-\int_{t_0}^{T}y^*(s)\,ds\Big)dt=$$

$$=\begin{cases}0:\ a_0=\displaystyle\int_{t_0}^{T}x^*(s)ds,\ a_1=-\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu+\int_{t_0}^{T}y^*(s)ds,\ \upsilon(t)=\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu-\\ \quad -\displaystyle\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu-\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu-\int_{t_0}^{t}y^*(s)ds+\int_{t_0}^{T}y^*(s)ds;\ (x^*,y^*)\in\partial\bar{J}(0,0);\\ \quad +\infty:\ \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Лемма доказана.

Обозначив $\psi_0(t)=\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu-\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{\nu}x^*(s)dsd\nu+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}x^*(s)dsd\nu$,

$\psi_1(t)=-\int_{t_0}^{t}y^*(s)\,ds+\int_{t_0}^{T}y^*(s)\,ds$ получим, что $\upsilon(t)=\psi_0(t)+\psi_1(t)$, $\ddot{\psi}_0(t)=x^*(t)$,

$\dot{\psi}_1(t)=-y^*(t)$, $a_0=-\dot{\psi}_0(t_0)$, $a_1=\psi_0(t_0)+\psi_1(t_0)$, $\dot{\psi}_0(T)=\psi_0(T)=0$, $\psi_1(T)=0$.

Известно, что (см. [4]) если выполняются условия леммы 1.3, то $(x^*,y^*)\in\partial\bar{J}(0,0)$ тогда и только тогда когда $(x^*(t),y^*(t))\in\partial g(t,0,0)$. Поэтому $(\ddot{\psi}_0(t),-\dot{\psi}_1(t))\in\partial g(t,0,0)$.

Следствие 1.1. Если выполняются условия леммы 1.3, то

$$J^*(z^*)=\begin{cases}0: \text{если } a_0=-\dot\psi_0(t_0),\ a_1=\psi_0(t_0)+\psi_1(t_0),\ \upsilon(t)=\psi_0(t)+\psi_1(t),\ \psi_1(T)=0,\\ \quad \dot\psi_0(T)=\psi_0(T)=0,\ (\ddot\psi_0(t),-\dot\psi_1(t))\in\partial g(t,0,0);\\ +\infty: \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Следствие 1.2. Если $(x,y)\to g(t,x,y)$ положительно однородная выпуклая функция и для всякого $(x,y)\in R^n\times R^n$ функция $g(t,x,y)$ суммируема, то $z^*=(a_0,a_1,\upsilon(\cdot))\in\partial J(0)$ в том и только в том случае , когда существуют функции $\psi_0(\cdot)\in W^n_{1,2}[t_0,T]$ и $\psi_1(\cdot)\in W^n_{1,1}[t_0,T]$ такие, что

$$a_0=-\dot\psi_0(t_0),\ a_1=\psi_0(t_0)+\psi_1(t_0),\ \upsilon(t)=\psi_0(t)+\psi_1(t),\ \psi_1(T)=0,\ \dot\psi_0(T)=\psi_0(T)=0,\ (\ddot\psi_0(t),-\dot\psi_1(t))\in\partial g(t,0,0).$$

Теорема 1.1. Пусть $g:[t_0,T]\times R^n\times R^n\to R_\infty$ нормальный выпуклый интегрант и существует $\delta>0$ такое, что функция $g(t,x_0(t)+x,\dot x_0(t)+y)$ суммируема при $(x,y)\in R^n\times R^n$, $\left|(x,y)\right|<\delta$. Тогда $z^*=(a_0,a_1,\upsilon(\cdot))\in\partial J(\bar x)$ в том и только в том случае, когда существуют функции $\psi_0(\cdot)\in W^n_{1,2}[t_0,T]$ и $\psi_1(\cdot)\in W^n_{1,1}[t_0,T]$ такие, что

$$a_0=-\dot\psi_0(t_0),\ a_1=\psi_0(t_0)+\psi_1(t_0),\ \upsilon(t)=\psi_0(t)+\psi_1(t),\ \psi_1(T)=0,\ \dot\psi_0(T)=\psi_0(T)=0$$

и $(\ddot\psi_0(t),-\dot\psi_1(t))\in\partial g(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))$.

Доказательство. Непустота $\partial J(\bar x)$ вытекает из леммы 1.1 и предложения 4.2.3([6], с.210). Докажем второе утверждение теоремы. Так как (см.[9,с.63])

$$g(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))-g(t,\ \bar x(t)-y(t),\dot{\bar x}(t)-\dot y(t))\le\frac{g(t,\bar x(t)+\lambda y(t),\dot{\bar x}(t)+\lambda\dot y(t))-g(t,\ \bar x(t),\dot{\bar x}(t))}{\lambda}\le$$

$$\le g(t,\bar x(t)+y(t),\dot{\bar x}(t)+\dot y(t))-g(t,\ \bar x(t),\dot{\bar x}(t))$$

при $0<\lambda\le1$, то используя лемму 1.1 и теорему Лебега (см. [10]) получим, что

$$J'(\bar x;y)=\lim_{\lambda\downarrow0}\frac{J(\bar x+\lambda y)-J(\bar x)}{\lambda}=\lim_{\lambda\downarrow0}\int_{t_0}^{T}\frac{g(t,\bar x(t)+\lambda y(t),\dot{\bar x}(t)+\lambda\dot y(t))-g(t,\ \bar x(t),\dot{\bar x}(t))}{\lambda}dt=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\lim_{\lambda\downarrow0}\frac{g(t,\bar x(t)+\lambda y(t),\dot{\bar x}(t)+\lambda\dot y(t))-g(t,\ \bar x(t),\dot{\bar x}(t))}{\lambda}\,dt=\int_{t_0}^{T}g'(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t);y(t),\dot y(t))\,dt.$$

Из предложения 4.1.4([6] , с. 206) вытекает, что $y\to J'(\bar x;y)$ конечен и непрерывен на $W^n_{p,2}[t_0,T]$. Поэтому $g'(t,\bar x(t);x,y)$ суммируема при $(x,y)\in R^n\times R^n$. Если учесть, что $\partial J(\bar x)=\partial J'(\bar x,\,0)$, $\partial g(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))=\partial\bar g(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t);0,0)$, то утверждение теоремы вытекает из следствия 1. 2. Теорема доказана.

2. О двойственности терминального функционала

Пусть $\varphi:R^{4n}\to R_\infty$. Рассмотрим в пространстве $W^n_{p,2}[t_0,T]$ функционал вида $I(x)=\varphi(x(t_0),\dot x(t_0),x(T),\dot x(T))$ и определим условия при которых $I^*(x^*)$ конечен.

Лемма 2.1. Если $a_1,a_2,b_1,b_2\in R$, $q(\cdot)\in L_{p'}[t_0,T]$ и

$$\sup_{\substack{x(\cdot)\in W^1_{p,2}[t_0,T]\\ x(t_0)=a_1,x(T)=a_2,\\ \dot x(t_0)=b_1,\dot x(T)=b_2}} \int_{t_0}^{T} q(t)\ddot x(t)dt < +\infty, \quad \text{то} \quad q(t)=\alpha_1 t+\alpha_2$$

в $[t_0,T]$, где $\alpha_1,\alpha_2\in R$.

Доказательство. Пусть $z(t)$ произвольный многочлен, такой что $z(t_0)=b_1,\ z(T)=b_2$. Положим

$$\overline{z}(t)=a_1+\int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau+\left(3\left(\frac{t-t_0}{T-t_0}\right)^2-2\left(\frac{t-t_0}{T-t_0}\right)^3\right)\left(a_2-a_1-\int_{t_0}^{T} z(\tau)d\tau\right).$$

Ясно, что $\overline{z}(t_0)=a_1,\overline{z}(T)=a_2$, $\dot{\overline{z}}(t_0)=b_1,\dot{\overline{z}}(T)=b_2$. Тогда получим, что

$$\sup_{\substack{x(\cdot)\in W^1_{p,2}[t_0,T]\\ x(t_0)=a_1,x(T)=a_2,\\ \dot x(t_0)=b_1,\dot x(T)=b_2}} \int_{t_0}^{T} q(t)\ddot x(t)dt = \sup_{\substack{z(\cdot)\in W^1_{p,2}[t_0,T]\\ z(t_0)=0,z(T)=0,\\ \dot z(t_0)=0,\dot z(T)=0}} \int_{t_0}^{T} q(t)\ddot z(t)dt+\int_{t_0}^{T} q(t)\ddot{\overline{z}}(t)dt<+\infty.$$

Отсюда следует, что $\sup\limits_{\substack{z(\cdot)\in W^1_{p,2}[t_0,T]\\ z(t_0)=0,z(T)=0,\\ \dot z(t_0)=0,\dot z(T)=0}} \int_{t_0}^{T} q(t)\ddot z(t)dt<+\infty$. Поэтому $\int_{t_0}^{T} q(t)\ddot z(t)dt=0$ при $z(\cdot)\in \dot W^1_{p,2}[t_0,T]= \ =\{W^1_{p,2}[t_0,T]$, $x(t_0)=0,\ x(T)=0$, $\dot x(t_0)=0,\ \dot x(T)=0\}$. Так как $C_0^\infty(t_0,T)\subset \dot W^1_{p,2}[t_0,T]$, то получим, что $\int_{t_0}^{T} q(t)\ddot x(t)dt=0$ при $x(\cdot)\in C_0^\infty(t_0,T)$. Ясно, что $\int_{t_0}^{T} q(t)\ddot x(t)dt=\int_{t_0}^{T} \ddot q(t)x(t)dt=0$ при $x(\cdot)\in C_0^\infty(t_0,T)$. Поэтому $\ddot q(t)=0$. Отсюда следует, что $q(t)=\alpha_1 t+\alpha_2$ (см.[10, с.244]). Лемма доказана.

Лемма 2.2. Если $I(x)=\varphi(x(t_0),\dot x(t_0),x(T),\dot x(T))$ и в точке $x^*=(a_0,a_1,\upsilon(\cdot))\in W^n_{p,2}[t_0,T]^*$ функционал $I^*(x^*)$ конечен, то $\upsilon(t)=c_1t+c_2$ при $t\in[t_0,T]$, где $c_1,c_2\in R^n$.

Доказательство. Пусть точка $\overline{x}(\cdot)\in W^n_{p,2}[t_0,T]$, такая, что $J(\overline{x})$ конечен, т.е.
$(\overline{x}(t_0),\dot{\overline{x}}(t_0),\overline{x}(T),\dot{\overline{x}}(T))\in R^{4n}$ такая, что $\varphi(\overline{x}(t_0),\dot{\overline{x}}(t_0),\overline{x}(T),\dot{\overline{x}}(T))<+\infty$. По определению

$$I^*(x^*)=\sup_{x\in W^n_{p,2}[t_0,T]}\{\langle x^*,x\rangle-I(x)\}=\sup_{x\in W^n_{p,2}[t_0,T]}\{(x(t_0)\,|\,a_0)+(\dot x(t_0)\,|\,a_1)+\int_{t_0}^{T}(\ddot x(t)\,|\,\upsilon(t))dt-$$

$$-\ \varphi(x(t_0),\dot x(t_0),x(T),\dot x(T))\}\ge \sup_{\substack{x(\cdot)\in W^n_{p,2}[t_0,T]\\ x(t_0)=\overline{x}(t_0),x(T)=\overline{x}(T),\\ \dot x(t_0)=\dot{\overline{x}}(t_0),\dot x(T)=\dot{\overline{x}}(T)}} (x(t_0)\,|\,a_0)+(\dot x(t_0)\,|\,a_1)+\int_{t_0}^{T}(\ddot x(t)\,|\,\upsilon(t))dt-$$

$$-\ \varphi(\overline{x}(t_0),\dot{\overline{x}}(t_0),\overline{x}(T),\dot{\overline{x}}(T)).$$

Так как $I^*(x^*)$ конечен, то отсюда вытекает, что

$\sup\limits_{\substack{x(\cdot)\in W^n_{p,2}[t_0,T] \\ x(t_0)=\bar{x}(t_0),x(T)=\bar{x}(T), \\ \dot{x}(t_0)=\dot{\bar{x}}(t_0),\dot{x}(T)=\dot{\bar{x}}(T)}} \int\limits_{t_0}^{T} (\ddot{x}(t)\,|\,\upsilon(t))\,dt < +\infty.$ Тогда из леммы 2.1 получим, что $\upsilon(t) = c_1 t + c_2 = (c_1^1,\ldots,c_1^n)t + (c_2^1,\ldots,c_2^n)$ постоянная вектор-функция. Лемма доказана.

Теорема 2.1. Если $\varphi: R^n \to R_\infty$ собственная выпуклая функция и $x^* = (a_0, a_1, \upsilon(\cdot)) \in \partial I(\bar{x})$, где $x^* \in W^n_{p,2}[t_0,T]^*$, то существуют векторы $c_1, c_2 \in R^n$ такие, что $\upsilon(t) = c_1 t + c_2$ и

$$(a_0 + c_1, a_1 - c_1 t_0 - c_2, -c_1,\ c_1 T + c_2) \in \partial\varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)).$$

Доказательство. По определению субдифференциала $x^* \in \partial J(\bar{x})$ в том и только в том случае, когда $I^*(x^*) + I(\bar{x}) = x^*(\bar{x})$. Так как $I^*(x^*)$ конечен, где $x^* \in W^n_{p,2}[t_0,T]^*$, $x^* = (a_0, a_1, \upsilon(\cdot))$, то $\upsilon(t) = c_1 t + c_2$, где $c_1, c_2 \in R^n$. Поэтому

$$I^*(x^*) = \sup_{x\in W^n_{p,2}[t_0,T]} \{\langle x^*, x\rangle - I(x)\} = \sup_{x\in W^n_{p,2}[t_0,T]} \{(x(t_0)\,|\,a_0) + (\dot{x}(t_0)\,|\,a_1) + \int\limits_{t_0}^{T} (\ddot{x}(t)\,|\,c_1 t + c_2)\,dt -$$

$$- \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T))\} = \sup_{x(\cdot)\in W^n_{p,2}[t_0,T]} \{(x(t_0)\,|\,a_0) + (\dot{x}(t_0)\,|\,a_1) + (\dot{x}(t)\,|\,c_1 t + c_2)\Big|_{t_0}^{T} -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{T} (\dot{x}(t)\,|\,c_1)\,dt - \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T))\} = \sup_{x(\cdot)\in W^n_{p,2}[t_0,T]} \{(x(t_0)\,|\,a_0) + (\dot{x}(t_0)\,|\,a_1) +$$

$$+ (\dot{x}(T)\,|\,c_1 T + c_2) - (\dot{x}(t_0)\,|\,c_1 t_0 + c_2) - (x(T)\,|\,c_1) + (x(t_0)\,|\,c_1) - \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T))\} =$$

$$= \sup_{x(\cdot)\in W^n_{p,2}[t_0,T]} \{(x(t_0)\,|\,a_0 + c_1) + (\dot{x}(t_0)\,|\,a_1 - c_1 t_0 - c_2) - (x(T)\,|\,c_1) + (\dot{x}(T)\,|\,c_1 T + c_2) -$$

$$- \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T))\} = \varphi^*(a_0 + c_1, a_1 - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2).$$

Тогда получим, что

$$\varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)) + \varphi^*(a_0 + c_1, a_1 - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) =$$

$$= (\bar{x}(t_0)\,|\,a_0 + c_1) + (\dot{\bar{x}}(t_0)\,|\,a_1 - c_1 t_0 - c_2) + (\bar{x}(T)\,|\,-c_1) + (\dot{\bar{x}}(T)\,|\,c_1 T + c_2).$$

Отсюда следует, что $(a_0 + c_1, a_1 - c_1 t_0 - c_2, -c_1,\ c_1 T + c_2) \in \partial\varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)).$
Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садыгов М.А. Об одной экстремальной задаче, заданной на пространстве Соболева. Известия АН Азербайджанский ССР, 1985, №5, с.25-33.
2. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач. Баку: Элм, 2002, 125 с.
3. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 359 p.
4. Рокафеллар Р. Интегралы, являющиеся выпуклыми функционалами, II. В кн. Математическая экономика. М.: Мир, 1974, с. 170-204.
5. Иоффе А.Д., Левин В.Л. Субдифференциалы выпуклых функции. Труды Московского Математического общества, 1972, т.26, с.3-73.
6. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, 479с.
7. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979, 400 с.

8. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988, 510 с.
9. Обен Ж.П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988, 264 с.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989, 623 с.

AXTARILAN FUNKSİYANIN İKİNCİ TƏRTİB TÖRƏMƏSİ DAXİL OLAN VARİASİYA MƏSƏLƏSİ, I

M.A.SADIQOV, A.M.SADIQOV

XÜLASƏ

İşdə mütləq kəsiməz funksiyalar fəzası tipli fəzada inteqral və terminal funksionalların subdiferensialının xassəsi öyrənilmişdir.

Açar sözlər: inteqral funksional, qabarıq funksiya, subdiferensial.

VARIATION PROBLEM CONTAINING SECOND DERIVATIVES OF UNKNOWN FUNCTIONS, I

M.A.SADYGOV, A.M.SADYGOV

SUMMARY

The property subdifferential of an integral and terminal functional in a space of the type of absolutely continuous functions is studied.

Keywords: integral functional, convex function, subdifferential.