BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2021

УДК 517.642

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА С ПОЛУРАСПАДАЮЩИМИСЯ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.М.ГАСАНЛИ*, Л.И.МАММАДОВА, И.М.НАБИЕВ*,***

Бакинский Государственный Университет

***** Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности***

****** Институт Математики и Механики НАН Азербайджана***

aytachasanli9900@gmail.com

leylaimae@yahoo.com

nabievim@yahoo.com

В статье рассматривается система Дирака при некоторых граничных условиях, одно из которых содержит спектральный параметр. Доказана теорема единственности и построен алгоритм решения обратной задачи восстановления краевых задач по спектральным данным.

Ключевые слова: система Дирака, собственные значения, обратная задача, теорема единственности, алгоритм решения.

Рассматривается краевая задача, порожденная одномерной стационарной системой Дирака (связанной с поведением релятивистского электрона в электростатическом поле)

$$BY'(x)+Q(x)Y(x)=\lambda Y(x), \quad x\in[0,\pi] \tag{1}$$

и полураспадающимися граничными условиями вида

$$\begin{aligned} &y_2(0)+\alpha y_1(0)=0,\\ &y_1(0)+\lambda[\beta y_1(\pi)+\gamma y_2(\pi)]=0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$, $Y(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix}$,

$\lambda-$спектральный параметр, α,β и γ – положительные числа. Эту задачу будем обозначать через $D(\alpha,\beta,\gamma)$. Предполагается, что элементы $p(x)$ и $q(x)$ матрицы $Q(x)$ в (1) являются вещественными функциями, принадлежащими пространству $W_2^1[0,\pi]$. Через $W_2^1[0,\pi]$ мы обозначаем пространство, состоящее из заданных на отрезке $[0,\pi]$ абсолютно непрерывных функций, которые имеют производную, суммируемую с квадратом на $[0,\pi]$.

Многие вопросы прямых и обратных спектральных задач для системы Дирака в случае разделенных и неразделенных граничных условий хорошо изучены (см. [1-13] и литературу в них). В настоящей работе доказана теорема единственности и составлен алгоритм восстановления системы Дирака по спектральным данным, которыми являются спектры двух краевых задач и некоторое число.

Краевая задача $D(\alpha,\beta,\gamma)$ всегда имеет тривиальное решение $Y(x)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Значения параметра λ, при которых задача $D(\alpha,\beta,\gamma)$ имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями этой задачи. Множество собственных значений называется спектром $D(\alpha,\beta,\gamma)$. Характеристическая функция, нули которой являются собственными значениями краевой задачи $D(\alpha,\beta,\gamma)$, имеет вид

$$\Delta(\lambda)=1+\lambda\left[\beta\left(c_1(\pi,\lambda)-\alpha s_1(\pi,\lambda)\right)+\gamma\left(c_2(\pi,\lambda)-\alpha s_2(\pi,\lambda)\right)\right], \quad (3)$$

где $S(x,\lambda)=\begin{pmatrix}s_1(x,\lambda)\\s_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ и $C(x,\lambda)=\begin{pmatrix}c_1(x,\lambda)\\c_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $S(0,\lambda)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $C(0,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Лемма [11]. *Для функций* $s_1(\pi,\lambda)$, $s_2(\pi,\lambda)$, $c_1(\pi,\lambda)$ *и* $c_2(\pi,\lambda)$ *имеют место следующие представления:*

$$s_1(\pi,\lambda)=-\sin\lambda\pi+A_1\frac{\cos\lambda\pi}{\lambda}+B_1\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}+\frac{\psi_1(\lambda)}{\lambda},$$

$$s_2(\pi,\lambda)=\cos\lambda\pi+A_2\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}+B_2\frac{\cos\lambda\pi}{\lambda}+\frac{\psi_2(\lambda)}{\lambda},$$

$$c_1(\pi,\lambda)=\cos\lambda\pi+A_3\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}-B_2\frac{\cos\lambda\pi}{\lambda}+\frac{\psi_3(\lambda)}{\lambda},$$

$$c_2(\pi,\lambda)=\sin\lambda\pi+A_4\frac{\cos\lambda\pi}{\lambda}+B_1\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}+\frac{\psi_4(\lambda)}{\lambda},$$

где $$A_1=A+Q_1,\ A_2=A+Q_2,\ A_3=A-Q_2,\ A_4=-A+Q_1,$$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[p^2(x)+q^2(x)\right]dx,\ Q_1=\frac{q(\pi)-q(0)}{2},\ Q_2=-\frac{q(\pi)+q(0)}{2},$$

$$B_1=-\frac{p(0)+p(\pi)}{2},\ B_2=\frac{p(0)-p(\pi)}{2},$$

$$\psi_p(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{\psi}_p(t)e^{i\lambda t}dt,\ \tilde{\psi}_p(t)\in L_2[-\pi,\pi],\ p=1,2,3,4.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $p(0)=p(\pi)=q(0)=q(\pi)=0$. Используя лемму, характеристическую функцию (3) можно преобразовать к виду

$$\Delta(\lambda)=1+\lambda(d_2\sin\lambda\pi-d_1\cos\lambda\pi)-A(d_2\cos\lambda\pi+d_1\sin\lambda\pi)+\psi_5(\lambda), \qquad (4)$$

где

$$d_1=\alpha\gamma-\beta,\ d_2=\alpha\beta+\gamma, \qquad (5)$$

$$\psi_5(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{\psi}_5(t)e^{i\lambda t}dt,\ \tilde{\psi}_5(t)\in L_2[-\pi,\pi].$$

С помощью теоремы Руше, леммы 1.4.3 книги [14] и представления (4) стандартным методом (как в [11]) легко доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Собственные значения* μ_k $(k=\pm 0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ *краевой задачи* $D(\alpha,\beta,\gamma)$ *при* $|k|\to\infty$ *удовлетворяют асимптотической формуле*

$$\mu_k=k+a+\frac{A}{\pi k}+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\,\pi k}+\frac{\gamma_k}{k}, \qquad (6)$$

где $$a=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{d_1}{d_2},\qquad \{\gamma_k\}\in l_2.$$

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 2 работы [15].

Теорема 2. *Задание спектра* $\{\mu_k\}$ $(k=\pm 0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ *однозначно определяет характеристическую функцию* $\Delta(\lambda)$ *краевой задачи* $D(\alpha,\beta,\gamma)$ *по формуле*

$$\Delta(\lambda)=\pi\sqrt{d_1^2+d_2^2}\,(\mu_{-0}-\lambda)(\mu_{+0}-\lambda)\prod_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{\mu_k-\lambda}{k}\ . \qquad (7)$$

Наряду с задачей $D(\alpha,\beta,\gamma)$ рассматривается также краевая задача $D(\alpha,\tilde{\beta},\tilde{\gamma})$, порожденная тем же уравнением (1) и граничными условиями

$$\begin{gathered} y_2(0)+\alpha y_1(0)=0,\\ y_1(0)+\lambda\left[\tilde{\beta}y_1(\pi)+\tilde{\gamma}y_2(\pi)\right]=0. \end{gathered} \qquad (8)$$

Спектр этой задачи будем обозначать через $\{\tilde{\mu}_k\}$.

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача P. По заданным спектрам краевых задач $D(\alpha,\beta,\gamma)$ и $D(\alpha,\tilde{\beta},\tilde{\gamma})$ и числу α построить матрицу-функцию

$Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$ в уравнении Дирака (1) и коэффициенты $\beta, \gamma, \widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ в граничных условиях (2) и (8).

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 3. *Если* $\lim\limits_{k\to\infty}(\mu_k-\widetilde{\mu}_k)\neq 0$, *то задание спектров* $\{\mu_k\}$, $\{\widetilde{\mu}_k\}$ *и числа* α *однозначно определяет краевые задачи* $D(\alpha,\beta,\gamma)$ *и* $D\left(\alpha,\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}\right)$.

Доказательство. Согласно теореме 1 собственные значения $\widetilde{\mu}_k$ $(k=\pm 0,\pm 1,\pm 2,...)$ краевой задачи $D\left(\alpha,\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}\right)$ при $|k|\to\infty$ удовлетворяют асимптотической формуле

$$\widetilde{\mu}_k=k+\widetilde{a}+\frac{A}{\pi k}+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{\widetilde{d}_1^2+\widetilde{d}_2^2}\,\pi k}+\frac{\widetilde{\gamma}_k}{k}, \tag{9}$$

где $\quad \widetilde{a}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\widetilde{d}_1}{\widetilde{d}_2}, \qquad \{\widetilde{\gamma}_k\}\in l_2,$

$$\widetilde{d}_1=\alpha\widetilde{\gamma}-\widetilde{\beta},\ \widetilde{d}_2=\alpha\widetilde{\beta}+\widetilde{\gamma}. \tag{10}$$

С помощью асимптотических формул (6) и (9) находим

$$\sqrt{d_1^2+d_2^2}=\frac{1}{\pi\lim\limits_{k\to\infty}k\left(\mu_{2k+1}-\mu_{2k}-1\right)}, \qquad \sqrt{\widetilde{d}_1^2+\widetilde{d}_2^2}=\frac{1}{\pi\lim\limits_{k\to\infty}k\left(\widetilde{\mu}_{2k+1}-\widetilde{\mu}_{2k}-1\right)}. \tag{11}$$

Тогда по заданным последовательностям $\{\mu_k\}$ и $\{\widetilde{\mu}_k\}$ можно восстановить характеристические функции $\Delta(\lambda)$ и $\widetilde{\Delta}(\lambda)$ краевых задач $D(\alpha,\beta,\gamma)$ и $D\left(\alpha,\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}\right)$ в виде бесконечного произведения по формулам (7) и

$$\widetilde{\Delta}(\lambda)=\pi\sqrt{\widetilde{d}_1^2+\widetilde{d}_2^2}\,(\widetilde{\mu}_{-0}-\lambda)(\widetilde{\mu}_{+0}-\lambda)\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{\widetilde{\mu}_k-\lambda}{k}. \tag{12}$$

Согласно представлению (4)

$$\Delta(2k)=1-2kd_1-Ad_2+\psi_5(2k),$$

$$\Delta\left(2k+\frac{1}{2}\right)=1+\left(2k+\frac{1}{2}\right)d_2-Ad_1+\psi_5\left(2k+\frac{1}{2}\right).$$

Отсюда

$$d_1=-\lim_{k\to\infty}\frac{\Delta(2k)}{2k}, \qquad d_2=2\lim_{k\to\infty}\frac{\Delta\left(2k+\frac{1}{2}\right)}{4k+1}\ . \tag{13}$$

так как в силу леммы Римана-Лебега $\lim\limits_{k\to\infty}\psi_5(2k)=\lim\limits_{k\to\infty}\psi_5\left(2k+\frac{1}{2}\right)=0.$

Аналогично

$$\tilde{d}_1 = -\lim_{k\to\infty}\frac{\tilde{\Delta}(2k)}{2k}, \qquad \tilde{d}_2 = 2\lim_{k\to\infty}\frac{\tilde{\Delta}\left(2k+\frac{1}{2}\right)}{4k+1}. \tag{14}$$

Зная α, $d_1, d_2, \tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$, из (5) и (10) однозначно определяются коэффициенты $\beta, \gamma, \tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$ в граничных условиях (2) и (8) по следующим формулам:

$$\beta = \frac{\alpha d_2 - d_1}{\alpha^2+1}, \qquad \gamma = \frac{d_2 + \alpha d_1}{\alpha^2+1},$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\alpha\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1}{\alpha^2+1}, \qquad \tilde{\gamma} = \frac{\tilde{d}_2 + \alpha\tilde{d}_1}{\alpha^2+1}. \tag{15}$$

Из условия теоремы следует, что $a - \tilde{a} \neq 0$ или $\operatorname{arctg}\frac{d_1}{d_2} \neq \operatorname{arctg}\frac{\tilde{d}_1}{\tilde{d}_2}$.

Значит, $d_1\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1 d_2 \neq 0$. Отсюда принимая во внимание соотношения (5) и (10), имеем $\beta\tilde{\gamma} - \tilde{\beta}\gamma \neq 0$. Это означает, что определитель системы уравнений

$$\begin{cases} \Delta(\lambda) = 1 + \lambda\left[\beta\left(c_1(\pi,\lambda) - \alpha s_1(\pi,\lambda)\right) + \gamma\left(c_2(\pi,\lambda) - \alpha s_2(\pi,\lambda)\right)\right], \\ \tilde{\Delta}(\lambda) = 1 + \lambda\left[\tilde{\beta}\left(c_1(\pi,\lambda) - \alpha s_1(\pi,\lambda)\right) + \tilde{\gamma}\left(c_2(\pi,\lambda) - \alpha s_2(\pi,\lambda)\right)\right] \end{cases} \tag{16}$$

относительно неизвестных $\delta_1(\lambda) = c_1(\pi,\lambda) - \alpha s_1(\pi,\lambda)$ и $\delta_2(\lambda) = c_2(\pi,\lambda) - \alpha s_2(\pi,\lambda)$, отличен от нуля. Решая систему (16), находим функции $\delta_1(\lambda)$ и $\delta_2(\lambda)$. Легко заметить, что $\delta_j(\lambda)$ $(j=1,2)$ является характеристической функцией задачи, порожденной уравнением (1) и граничными условиями $y_2(0) + \alpha y_1(0) = y_j(\pi) = 0$. Известно [1], что по последовательностям нулей функций $\delta_1(\lambda)$ и $\delta_2(\lambda)$ однозначно определяется коэффициент $Q(x)$ уравнения Дирака (1).

Таким образом, по заданным последовательностям $\{\mu_k\}$, $\{\tilde{\mu}_k\}$ и числу α полностью восстанавливаются краевые задачи $D(\alpha,\beta,\gamma)$ и $D(\alpha,\tilde{\beta},\tilde{\gamma})$. Теорема 3 доказана.

Согласно доказательству теоремы 3 решение обратной задачи Р может быть получено по следующему алгоритму.

Алгоритм. Даны последовательности $\{\mu_k\}$ и $\{\tilde{\mu}_k\}$ – спектры краевых задач D и $\tilde{D}$ и число α .

Шаг 1. С помощью (6) и (9) величины $\sqrt{d_1^2 + d_2^2}, \sqrt{\tilde{d}_1^2 + \tilde{d}_2^2}$ вычислим по формулам (11).

Шаг 2. По последовательностям $\{\mu_k\}$ и $\{\tilde{\mu}_k\}$ построим характеристические функции $\Delta(\lambda)$ и $\tilde{\Delta}(\lambda)$ в виде бесконечного произведения (7) и (12).

Шаг 3. Величины d_1, d_2, $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$ определим по формулам (13) и (14).

Шаг 4. Коэффициенты $\beta, \gamma, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ граничных условий (2) и (8) восстанавливаются по соотношениям (15).

Шаг 5. Решая систему (16), однозначно находим функции

$$\delta_1(\lambda) = c_1(\pi, \lambda) - \alpha s_1(\pi, \alpha), \quad \delta_2(\lambda) = c_2(\pi, \lambda) - \alpha s_2(\pi, \alpha).$$

Шаг 6. По последовательностям нулей функций $\delta_1(\lambda)$ и $\delta_2(\lambda)$ построим коэффициент $Q(x)$ уравнения Дирака (1) по известной процедуре (см., например, [1,3]).

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики –
Грант № EİF/MQM/Elm-Tehsil-1-2016-1(26)-71/05/1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасымов М.Г., Джабиев Т.Т. Решение обратной задачи по двум спектрам для уравнения Дирака на конечном отрезке // ДАН Азерб. ССР, 1966, т. 22, № 7, с. 3-6.
2. Nabiev I.M. The inverse periodic problem for the Dirac operator // Proc. IMM of NAS of Azerb., 2003, v. 19, p. 177-180.
3. Albeverio S., Hryniv R., Mykytyuk Ya. Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials // Russian J. Math. Physics., 2005, v. 12, № 4, p. 406-423.
4. Гусейнов И.М., Лятифова А.Р. Об операторе преобразования для системы уравнений Дирака с суммируемыми потенциалами // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2011, т. 11, вып. 1, с. 19-24.
5. Набиев И.М. Решение обратной квазипериодической задачи для системы Дирака // Матем. заметки, 2011, т. 89, № 6, с. 885-893.
6. Абдуллаев Т.Ш., Набиев И.М. Алгоритм восстановления оператора Дирака со спектральным параметром в граничном условии // Журн. выч. матем. и матем. физики, 2016, т. 56, № 2, с.252-258.
7. Akcay O., Mamedov Kh.R. The main equation of inverse problem for Dirac operators // U.P.B. Sci. Bull., 2017, Series A, v. 79, № 4, p. 159-168.
8. Аббаслы Н.В., Набиев И.М. Единственность восстановления системы Дирака по трем спектрам // Journal of Contemporary Applied Mathematics, 2018, v. 8, № 1, 2018, p. 3-8.
9. Kurbanov V.M., Abdullayeva A.M. Bessel property and basicity of the system of root vector-functions of Dirac operator with summable coefficient // Operators and Matrices, 2018, v. 12, № 4, 943-954.
10. Guo Y., Wei G., Yao R. Inverse problems for Dirac operator with the potential known on an interior subinterval // Anal. Math. Phys., 2019, v. 9, № 1, p. 155–163.
11. Ferzullazadeh A.G., Nabiev I.M. Some properties of the spectrum of the Dirac operator with a spectral parameter in the boundary condition // Proc. IMM of NAS of Azerb., 2020, v. 46, № 2, p. 189-196.
12. Zhang R., Yang C.F., Bondarenko N.P. Inverse spectral problems for the Dirac operator with complex-valued weight and discontinuity // Journal of differential equations, 2021, v.

278, p. 100-110.
13. Güldü Y., Mişe E. On Dirac operator with boundary and transmission conditions depending Herglotz-Nevanlinna type function // AIMS Mathematics, 2021, v. 6, № 4, p. 3686-3702.
14. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977, 332 с.
15. Маммадова Л.И., Набиев И.М. Спектральные свойства оператора Штурма-Лиувилля со спектральным параметром, квадратично входящим в граничное условие // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 237-248.

YARIMAYRILAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ DİRAK SİSTEMİNİN BƏRPASININ YEGANƏLİYİ

A.M.HƏSƏNLİ, L.İ.MƏMMƏDOVA, İ.M.NƏBİYEV

XÜLASƏ

Məqalədə sərhəd şərtlərinin birində spektral parametr olan Dirac sisteminə baxılır. Spektral verilənlər üzrə bərpa etmə haqqında tərs məsələnin həlli üçün yeganəlik teoremi isbat edilmiş və alqoritm qurulmuşdur.

Açar sözlər: Dirac sistemi, məxsusi ədədlər, tərs məsələ, yeganəlik teoremi, həll alqoritmi.

UNIQUENESS OF RECOVERY OF THE DIRAC SYSTEM WITH SEMI-SEPARATED BOUNDARY CONDITIONS

A.M.HASANLI, L.I.MAMMADOVA, I.M.NABIYEV

SUMMARY

In the article we considered the Dirac system with some boundary conditions, one of which contains a spectral parameter. A uniqueness theorem is proved and an algorithm is constructed for solving the inverse problem of recovering boundary value problems from spectral data.

Keywords: Dirac system, eigenvalues, inverse problem, uniqueness theorem, solution algorithm.