BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2021

УДК 517.9

ÜÇÜNCÜ TƏRTİB DİSKRET ADDİTİVO-POVERATİVO-MULTİPLİKATİV TÖRƏMƏLİ TƏNLİK ÜÇÜN KOŞİ VƏ SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLİNİN ARAŞDIRILMASI

N.Ə.ƏLİYEV[1], A.M.MƏMMƏDZADƏ[2],

[1]*Bakı Dövlət Universiteti*

[2]*Lənkəran Dövlət Universiteti*

mammadzada.aygun@mail.ru

Burada üç müxtəlif diskret törəmə tutan bir tənlik üçün Koşi və məsələlərinin həlləri təyin ediləcəkdir. Bunun üçün əvvəlcə baxılan tənliyin ixtiyari üç sabitdən asılı olan ümumi həlli alınacaq, sonar isə baxılan məsələnin həlli müəyyən ediləcəkdir. Hər iki halda məsələnin həlli üçün analitik ifadə alınacaqdır.

Açar sözlər: Diskret additiv, multiplikativ və poverativ törəmə, diskret qeyri-xətti Koşi və sərhəd məsələsi, ardıcıllığın təyini.

Giriş: Diskret additiv törəməli tənliklər üçün məsələlər (xətti məsələlər) yaxşı araşdırılmışdır $[1]-[3]$. Diskret multiplikativ törəməli tənliklər son zamanlar araşdırılmağa başlanılmışdır $[4]-[6]$. Diskret poverativ törəməli tənliklər isə yenicə araşdırılmağa başlanılmışdır $[7]-[8]$. Qeyd edək ki, diskret additivo-multiplikativ, multiplikativo-additiv, multiplikativo-poverativ və poverativo-multiplikativ törəməli tənliklər üçün məsələlərə də axır vaxtlar baxılmağa başlanılmışdır $[9]-[14]$.

Burada isə yuxarıda söylədiyimiz bütün üç diskret törəməni özündə saxlayan tənlik üçün məsələlərin həlli araşdırılacaqdır.

Məsələnin qoyuluşu: Aşağıdakı kimi məsələyə baxaq:

$$\left(\left(y_n^{(I)}\right)^{\{I\}}\right)^{[I]}=f_n,\quad \mathrm{n}\geq 0, \tag{1}$$

burada f_n, $\mathrm{n}\geq 0$ verilmiş ardıcıllıq, y_n, $\mathrm{n}\geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır. Belə ki, (1)-də diskret additiv törəmənin diskret poverativ törəməsinin, diskret multiplikativ törəməsindən alınan üçüncü tərtib törəməli bir tənlik verilmişdir. Bu tənliyin ümumi həllinin tapılması ilə məşğul olaq. Əvvəlcə dikret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etsək alarıq:

$$\frac{\left(y_{n+1}^{(I)}\right)^{\{I\}}}{\left(y_n^{(I)}\right)^{\{I\}}}=f_n,\ \mathrm{n}\geq 0. \tag{2}$$

Burada n dəyişəninə sıfırdan başlayaraq, (n-1)-ə qədər qiymətlər versək, aşağıdakı ifadələri almış olarıq:

$$\frac{(y_1^{(I)})^{\{I\}}}{(y_0^{(I)})^{\{I\}}} = f_0,$$

$$\frac{(y_2^{(I)})^{\{I\}}}{(y_1^{(I)})^{\{I\}}} = 1,$$

....

$$\frac{(y_n^{(I)})^{\{I\}}}{(y_{n-1}^{(I)})^{\{I\}}} = f_{n-1}.$$

Bu ifadələri vursaq, sadələşmədən sonra alarıq:

$$(y_n^{(I)})^{\{I\}} = (y_0^{(I)})^{\{I\}} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k, \quad n\geq 0. \tag{3}$$

Qeyd edək ki, n=0 olduqda (3) ifadəsi eyniliyə çevrilir. Ona görə də (3)-də əsasən n≥ 1 olduğu qəbul olunur. Aldığımız (3) tənliyinin sol tərəfi üçün diskret poverativ törəmənin tərifindən istifadə etsək, alarıq:

$$\sqrt[y_n^{(I)}]{y_{n+1}^{(I)}} = (y_0^{(I)})^{\{I\}} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k,$$

və ya

$$y_n^{(I)} = ((y_0^{(I)})^{\{I\}})^{y_{n-1}^{(I)}} \cdot \left(\prod_{k=0}^{n-2} f_k\right)^{y_{n-1}^{(I)}}, \quad n\geq 2. \tag{4}$$

Burada n-ə qiymətlər versək, alarıq:

$$y_2^{(I)} = y_3 - y_2 = ((y_0^{(I)})^{\{I\}})^{y_1^{(I)}} \cdot f_0^{y_1^{(I)}},$$

$$y_3^{(I)} = y_4 - y_3 = ((y_0^{(I)})^{\{I\}})^{y_1^{(I)}} \cdot \left(\prod_{k=0}^{1} f_k\right)^{y_2^{(I)}} = ((y_0^{(I)})^{\{I\}})^{((y_0^{(I)})^{\{I\}})^{y_1^{(I)}}} \cdot$$

$$\left(\prod_{k=0}^{1} f_k\right)^{((y_0^{(I)})^{\{I\}})^{y_1^{(I)}} \cdot f_0^{y_1^{(I)}}},$$

....

$$y_{n-1}^{(I)} = y_n - y_{n-1} = ((y_0^{(I)})^{\{I\}})^{y_{n-2}^{(I)}} \cdot \left(\prod_{k=0}^{n-3} f_k\right)^{y_{n-2}^{(I)}}.$$

Bu ifadələri topladıqda isə

$$y_n = y_2 + \sum_{s=1}^{n-2} ((y_0^{(I)})^{\{I\}})^{y_s^{(I)}} \cdot \left(\prod_{k=0}^{s-1} f_k\right)^{y_s^{(I)}}, \quad n\geq 3. \tag{5}$$

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış olarıq.

Teorem 1. Əgər f_n, n≥ 0 verilmiş ardıcıllıqdırsa, onda (1)-in ixtiyari həlli (5) vasitəsi ilə verilir.

Koşi məsələsi: Əgər

$$y_0 = \alpha,\ y_1 = \beta,\ y_2 = \gamma, \tag{6}$$

şərtləri verilərsə, onda (1), (6) Koşi məsələsinin həlli

$$y_n = \gamma + \sum_{s=1}^{n-2} \left(\left(\sqrt[\beta-\alpha]{\gamma - \beta}\right)^{y_{s+1}-y_s} \cdot \left(\prod_{k=0}^{s-1} f_k\right)^{y_{s+1}-y_s} \right), \quad n\geq 3, \tag{7}$$

ifadəsi ilə verilmiş olur.

Belə ki, n=3 olarsa,

$$y_3 = \gamma + \sum_{s=1}^{1} \left(\left(\sqrt[\beta-\alpha]{\gamma - \beta}\right)^{y_{s+1}-y_s} \cdot \left(\prod_{k=0}^{s-1} f_k\right)^{y_{s+1}-y_s} \right) =$$

$$= \gamma + \left(\sqrt[\beta-\alpha]{\gamma - \beta}\right)^{y_2-y_1} \cdot f_0^{y_2-y_1} = \gamma + (\gamma - \beta)^{\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}} \cdot f_0^{\gamma-\beta}. \tag{8}$$

Əgər (7)-də n=4 qəbul etsək:

$$y_4 = \gamma + \sum_{s=1}^{2}\left((\sqrt[\beta-\alpha]{\gamma-\beta})^{y_{s+1}-y_s} \cdot \left(\prod_{k=0}^{s-1} f_k\right)^{y_{s+1}-y_s} \right) =$$

$$= \gamma + (\sqrt[\beta-\alpha]{\gamma-\beta})^{y_2-y_1} \cdot f_0^{\,y_2-y_1} + (\sqrt[\beta-\alpha]{\gamma-\beta})^{y_3-y_2} \cdot (f_0 \cdot f_1)^{y_3-y_2} =$$

$$= \gamma + (\sqrt[\beta-\alpha]{\gamma-\beta})^{\gamma-\beta} \cdot f_0^{\,\gamma-\beta} + \sqrt[\beta-\alpha]{\gamma-\beta}^{\;\gamma+(\gamma-\beta)^{\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}} \cdot f_0^{\gamma-\beta}} \cdot (f_0 \cdot$$

$$f_1)^{(\gamma-\beta)^{\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}} \cdot f_0^{\gamma-\beta}} = \gamma + (\gamma-\beta)^{\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}} \cdot f_0^{\,\gamma-\beta} +$$

$$+(\gamma-\beta)^{\frac{(\gamma-\beta)^{\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}} \cdot f_0^{\gamma-\beta}}{\beta-\alpha}} \cdot (f_0 \cdot f_1)^{(\gamma-\beta)^{\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}} \cdot f_0^{\gamma-\beta}}. \qquad (9)$$

Teorem 2. Əgər f_n, n$\geq$ 0 verilmiş ardıcıllıq, α, β və γ verilmiş sabitlərdirsə, onda (1), (6) Koşi məsələsinin həlli (8), (9)-dan göründüyü kimi (5)-dən alınır.

Bu qayda ilə bütün y_n -lər (7)-dən addım-addım alınır.

İndi isə (1) tənliyi üçün aşağıdakı kimi sərhəd məsələsinə baxaq:

$$y_1^{(I)} = \alpha_1,\ (y_0^{(I)})^{\{I\}} = \beta,\ y_m = \gamma. \qquad (10)$$

Onda (3)-dən alarıq:

$$(y_0^{(I)})^{\{I\}} = \beta \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k \equiv F_n, \qquad (11)$$

Burada poverativ törəmənin tərifindən istifadə etsək:

$$\sqrt[y_n^{(I)}]{y_{n+1}^{(I)}} = F_n,$$

və ya

$$y_{n+1}^{(I)} = F_n^{\,y_n^{(I)}}, \qquad n\geq 1. \qquad (12)$$

Koşi məsələsində olduğu kimi burada da n-ə qiymətlər versək, alarıq:

$$y_2^{(I)} = y_3 - y_2 = F_1^{\,y_1^{(I)}} = F_1^{\,\alpha},$$

$$y_3^{(I)} = y_4 - y_3 = F_2^{\,y_2^{(I)}} = F_2^{\,F_1^{\,\alpha}},$$

$$y_4^{(I)} = y_5 - y_4 = F_3^{\,y_3^{(I)}} = F_3^{\,F_2^{\,F_1^{\,\alpha}}},$$

....

$$y_n^{(I)} = y_{n+1} - y_n = F_{n-1}^{\,F_{n-2}^{\,\cdot^{\cdot^{\cdot F_2^{F_1^{\alpha}}}}}}.$$

Bunları cəmləsək, alarıq:

$$y_{n+1} = y_3 + \sum_{k=2}^{n-1} F_k^{\,F_{n-1}^{\,\cdot^{\cdot^{\cdot F_2^{F_1^{\alpha}}}}}}. \qquad (13)$$

Burada axırıncı sərhəd şərtini nəzərə alaq. Yəni n=m-1 qəbul etsək:

$$\gamma = y_m = y_3 + \sum_{k=2}^{n-1} F_k^{\,F_{n-1}^{\,\cdot^{\cdot^{\cdot F_2^{F_1^{\alpha}}}}}}. \qquad (14)$$

olduğunu alarıq. Onda (14)-dən y_3-ü

$$y_3 = \gamma - \sum_{k=2}^{m-2} F_k^{\,F_{n-1}^{\,\cdot^{\cdot^{\cdot F_2^{F_1^{\alpha}}}}}} + \sum_{k=2}^{n-1} F_k^{\,F_{n-1}^{\,\cdot^{\cdot^{\cdot F_2^{F_1^{\alpha}}}}}} =$$

$$= \gamma - \sum_{k=n-1}^{m-2} F_k^{\,F_{n-1}^{\,\cdot^{\cdot^{\cdot F_2^{F_1^{\alpha}}}}}}, \qquad (15)$$

ifadəsini almış oluruq.

Verilmiş (10) sərhəd şərtlərindən:

$$y_2 - y_1 = \alpha, y_1 - y_0 = \log_\beta \alpha, y_m = \gamma$$

olduğu alınır. Onda (15)-dən y_1 üçün

$$y_1 = \gamma - \sum_{k=0}^{m-1} F_k^{\cdot^{\cdot^{\cdot F_1^{\alpha}}}}$$

ifadəsini nəzərə alsaq,

$$y_0 = y_1 - \log_\beta \alpha, y_2 = y_1 + \alpha$$

olduğu alınır ki, doğrudan da bütün y_k - ların alınacağı asanlıqla görünür.

Beləliklə, alırıq:

Teorem 3. Əgər f_n, n$\geq$ 0, α, β və γ verilmiş sabitlərdirsə, onda (1), (10) sərhəd məsələsinin həlli (15) vasitəsi ilə verilmiş olar.

ƏDƏBİYYAT

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967, 376 с.
2. Aliev N., Bagirov G., İzadi F.A. Discrete additive analysis, Book, Tarbiat Moallem University publishers, Tabriz, İran, 1993, pg.144.
3. Aliyev N.A., Fatemi M.R. On discrete derivative and integrals, News of Baku University, series of physico-mathematical sciences, №3б 2014б pg.45-49.
4. Əliyev N.Ə., Məmiyeva T.S. İkinci tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün sərhəd məsələsi, "Ali təhsildə keyfiyyətin təminatı" mövzusunda Respublika Elmi Konfransının Materialları, Lənkəran, 2016, s. 4-5.
5. Əliyev N.Ə., Bağırov Q.A., İsayeva A.N. Diskret multiplikativ analiz, "Riyaziyyat, informatika və iqtisadiyyatın müasir problemləri" mövzusunda respublika elmi konfransının materialları, Bakı, 2010, s. 24-30.
6. Əliyev N.Ə., Məmiyeva T.S. İkinci tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün sərhəd məsələsi, BU-nin Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, №1, 2017, s.15-19.
7. Aliyev N.A., İbrahimov N.S., Mammadzada A.M. On a solution of the Cauchy problem for the discrete equation with powerative-multiplicative-additive derivatives. XXXI İnternational Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU-2018) Abstracts, pg.16-17.
8. Əliyev Nihan, Məmmədzadə Aygün. İkinci tərtib diskret poverativ törəməli tənlik üçün məsələlərin həlli, Elmi Xəbərlər, Təbiət elmləri №1, 2018, s.55-58.
9. Hassani O.H., Aliev N. Analytic Approach to Solve Specific Linear and Nonlinear Differential Equations, Jnt. Math. Forum Journal for Theory and Applications, 33-36 (2008) Vol. 3, pg. 1623-1631.
10. Əliyev N.Ə., Məmiyeva T.S., Problems for the equation with third-order additive multiplicatives. "Funcsional analiz və onun tətbiqləri" adlı Respublika Elmi Konfransının Materialları, Bakı-2016, 17-18.
11. Əliyev N.Ə., İbrahimov N.S., Məmmədzadə A.M. Diskret poverativo-multiplikativ törəməli tənlik üçün məsələlər. Azərbaycan Texniki Universiteti, Elmi Əsərlər, Texnika Elmləri, Bakı , 2018, s.90-94.
12. Aliyev N.A., İbrahimov N.S., Mammadzada A.M. Solution of Couchy and boundary problems for the third compilation discrete additive-multiplicative-powerative derivative equation, ВІСНИК Київського Національного Університетуімені Тараса Шевченка, Київ, 2018, №1, pg., 50-55.
13. Aliyev N.A., İbrahimov N.S., Mammadzada A.M., Solution of Couchy problem for a discrete powerative derivative cubic equation, XXXV İnternational Conference Problems of

Decision Making Under Uncertainties (PDMU-2020) ABSTRACTS, Baku-Sheki, Republic of Azerbaijan, (May 11-15, 2020), pg. 13-15.
14. Mammadzade Aygun Malik, Solution of Couchy and boundary value problems for a discrete powerative derivative cubic equation, вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2020. № 1, pg.24-30.

ИССЛЕДОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ И УРАВНЕНИЙ КОШИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ДИСКРЕТНО АДДИТИВНЫХ ПОВЕРАТИВНЫХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Н.А.АЛИЕВ, А.М.МАММЕДЗАДЕ

РЕЗЮМЕ

В данной работе будут рассматриваться решения Коши и задачи для уравнений содержащие три различные дискретные производные. Для этого сначала находится общее решение рассматриваемого уравнения, которое зависит от трех любых постоянных, затем находится решение данной задачи. В обоих случаях получится аналитическое решение задач.

Ключевые слова: Дискретно аддитивная производная, дискретно мультипликативная производная, дискретно поверативная производная, дискретно нелинейная и граничная задача Коши, установление последовательности.

INVESTIGATION OF THE SOLUTION OF CAUCHY AND BOUNDARY PROBLEMS FOR THE THIRD ORDER DISCRETE ADDITIVE-POVERATIVE-MULTIPLICATIVE DERIVATIVE EQUATION

N.A.ALIYEV, A.M.MAMMADZADE

SUMMARY

Here we will determine the solutions of Cauchy boundary problems for an equation containing three different discrete derivatives. To do this, first obtain a general solution of the equation under consideration, which depends on any three constants, and then determine the solution of the problem under consideration. In both cases? An analytical statement will be taken to resolve the issue.

Keywords: Diskret additive derivative, discrete multiplicative derivative, discrete poverative derivative, discrete nonlinear Cauchy and boundary value problem, definition of sequence.