BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2021

УДК 539.376

ВЫПУЧИВАНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ ТОНКОСТЕННОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Ю.СЕВДИМАЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет

yusifsev@mail.ru

Рассматривается процессы, протекающие при деформировании в условиях ползучести многослойной круговой цилиндрической оболочки, имеющее отклонение от некоторой идеальной формы. Рассматривая процесс течения при заданной системе нагрузок и критическое время, соответствующая потери устойчивости, определяется из условия обращения в бесконечность скоростей деформирования. Оценивается влияние многослойности оболочки на критические значения параметров. Приведен пример расчета.

Ключевые слова: ползучесть, многослойная оболочка, потеря устойчивости при ползучести, оболочечные структуры, квазистатическая неустойчивость, критическая время, математическая модель, вариационный принцип, несущая способность.

В статье [1] содержащий обзор за последнее 50 лет, приводятся исследовании по потери устойчивости круглых цилиндрических оболочек, сферических оболочек, частичные цилиндрические оболочки и другие оболочки, рассматриваются в дополнение к критериям потери устойчивости при ползучести. Выпучивание подразделяется на два типа в зависимости от характера нагружения и конструктивных параметров оболочки. Один из них - потеря устойчивости при ползучести из-за квазистатической неустойчивости, при которой критическое время потери устойчивости при ползучести определяется путем отслеживания зависимости деформации ползучести от времени. Другая потеря устойчивости при ползучести из-за кинетической нестабильности, при которой критическое время можно определить, исследуя форму полной потенциальной энергии в окрестности квазистатического состояния равновесия. Бифуркационное продольное изгибание и выпучивание при ползучести относится выпучивание из-за защелкивания при деформации ползучести. Хофф N.J. и другие [2] обсуждали продольное изгибание стержня и пластины при осевом или плоском сжатии. Он сравнил два критических момента. Один из них был получен квазистатическим методом, в котором критическое время определяется как время, когда скорость поперечного или вне плоского отклонения, принимаемого в качестве начального дефекта, становится бесконечной. В другое было получено из энергетического метода, в котором критическое время определяется как время, когда поперечная или отклонения от плоскости возникают в деформированном в осевом направлении стержне или пластине, деформированной в плоскости. Этот метод изначально был предложено Ю.Н.Работновым и С.А.Шестериковым [3]. Хофф N.J. [4] обнаружил, что кинетическая неустойчивость, судя по энергетическому методу обеспечивает гораздо более консервативное критическое время, чем квазистатическая неустойчивость, оцененная квазистатическим методом. Таким образом он пришел к выводу, что критическое время, полученное с помощью энергетического метода, бесполезно для большинства практических целей. Ямамото [5] также показал эффективность квазистатического метода по потери устойчивости при ползучести, что он может продолжать стабильно деформироваться из-за эффекта ползучести после бифуркационного выпучивания. В работах [6-8] и [9,10] рассматривались потери устойчивости при ползучести круглых цилиндрическая оболочек и пологих арок при осевом сжатии и под действием распределенной по внешнему поверхности нормального давления.

Теоретические и экспериментальные исследования по расчету потери устойчивости многослойной длинной круглой цилиндрической оболочки под внешним давлением для изучения возможности потери устойчивости при ползучести проводятся с целью для предсказания критического времени при высоких температурах с коэффициентов запаса прочности по нагрузке или к запаса прочности по времени по сравнению с экспериментальными данными.

Было обнаружено, что предложенная модель обеспечивает консервативные критические времена во всех случаях и достаточно точный в случае тонких оболочек [12-14].

Постановка задачи и метод решения. Соотношения ползучести для большинства конструкционных материалов являются нелинейными. Задача по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) в элементах конструкций при ползучести с учетом геометрической нелинейности, изготовленных из композитов и различных нелинейно-упругих материалов и соединенные между собой посредством полного сцепления, является математически сложной. Задача является дважды нелинейным и бывает необходимым исследования решений нелинейных краевых задач разрывными коэффициентами. Поэтому разрабатываются приближенные методы, для задач механики деформируемых сред предпочтение отдается вариационным методам при стремлении получить решение в виде формул, а также численным методам с иллюстрацией результатов в виде таблиц и графиков. В предложенной работе оба nметоды совмещаются. Примером сложной задачи устойчивости при ползучести служит задача об устойчивости пологой арки и оболочек, нагруженные распределенным давлением, в которых обнаруживаются потери устойчивости с внезапным скачком [8], [9]. Авторами статьи [10] для гетерогенных сред в трехмерной постановке для процесса ползучести сформулирована вариационная теорема. Функционал, описывающий процесс деформации при ползучести всего многокомпонентного тела, построена модификацией смешанного вариационного принципа [11].

Пусть бесконечная многослойная круговая цилиндрическая оболочка радиуса R и толщиной 2h состоит из s слоев, тогда обозначая толщину через δ_k k-го слоя. Область поперечного сечения оболочки с дискретными слоями, между соседними слоями которого существуют жесткие сцеплении, будем разбивать на интервалы интегрирования $[a_k = -h + \sum_{j=0}^{k} \delta_j, \quad a_{k+1} = a_k + \delta_{k+1}]$, где $\delta_0=0$.

При сделанных предположениях мгновенную упругой деформации для сэндвич пакета принимаем нелинейно упругим следующего вида

$$\varepsilon^{\upsilon} = \frac{\sigma}{E_{k+1}}\left\{1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma^0_{k+1}}\right)^n\right\}, \qquad [n = 2,4,6,....] \tag{1}$$

Зависимость (1) достаточно хорошо аппроксимируют упругое деформировании композитов, армированных композитов, алюминиевых сплавов и т.д. Здесь и далее используются общепринятые обозначении в механике сплошных сред для физических величин, так что E_{k+1} модуль упругости и σ^0_{k+1}значение напряжений в момент возникновения деформации ползучести, в материале соответствующего слоя.

Аналитические выражение для закона упрочнения при ползучести,в виде зависимости скорости деформации ползучести от напряжения выбирается степенной [15]

$$\dot{p} = B_{k+1}\sigma^m \tag{2}$$

и это аппроксимация для начальных участков дает удовлетворительные результаты. Здесь величины B_{k+1} и m постоянные материала, которые определяются из эксперимента. В формуле (2) и далее точкой над величинами обозначаем производную по времени или по любому монотонно изменяющемуся параметру, характеризующему процесс деформации.

В виду независимости НДС от продольной координаты в цилиндрической системе координат с учетом гипотезы Кирхгофа-Лява функционал приведенный в работе [10], принимает вид

$$J = R\int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h}\left\{\dot{\sigma}\dot{\varepsilon} + \frac{1}{2R^2}\sigma\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta}\right)^2\right\}dr\,d\theta - \frac{R}{2}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\dot{\sigma}^2\left[1+(n+1)\left(\frac{\sigma}{\sigma_{k+1}^0}\right)^n\right]dr\,d\theta - \tag{3}$$

$$-R\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{s-1}B_{k+1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\dot{\sigma}\sigma^m\,dr\,d\theta$$

В силу тонкостенности оболочки примем закон распределения нормального мембранного напряжения по толщине линейным

$$\sigma = -\frac{qR}{2h} + \frac{3Mr}{2h^3} \tag{4}$$

Для решения задачи вариационным методом с сочетанием приближенного метода Ритца аппроксимирующие функции для прогиба и изгибающего момента зададим в виде

$$w = a_0(t) + a(t)\cos l\theta, \qquad M = b(t)\cos l\theta \tag{5}$$

В следствии закона плоских сечений

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi r \tag{6}$$

где. для нелинейных тонкостенных оболочек линейная деформация и кривизна определяются формулами

$$\varepsilon_0 = \frac{w}{R} + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2, \qquad \chi = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

Подставив зависимости (1), (2), (4), (5), (6) и их производные по времени t в формулу (3), получаем

$$J = \frac{3}{2h^3R}\int_0^{2\pi}\dot{w}_{,\theta\theta}\dot{M}\,d\theta\int_{-h}^{h}r^2\,dr - \frac{q}{4h}\int_0^{2\pi}\dot{w}_{,\theta}^2 d\theta\int_{-h}^{h}dr - \frac{9R}{8h^6}\int_0^{2\pi}\dot{M}^2\,d\theta\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_{k+1}}r^2\,dr -$$

$$-\frac{9(n+1)R}{8h^6}\sum_{i=0}^{n}c_n^i\left(-\frac{qR}{2h}\right)^{n-i}\left(\frac{3}{2h^3}\right)^i\int_0^{2\pi}\dot{M}^2M^i\,d\theta\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{E_{k+1}\left(\sigma_{k+1}^0\right)^n}\int_{a_k}^{a_{k+1}}r^{i+1}\,dr - \tag{7}$$

$$-\frac{3R}{2h^3}\sum_{j=0}^{m}c_m^j\left(-\frac{qR}{2h}\right)^{m-j}\left(\frac{3}{2h^3}\right)^j\int_0^{2\pi}\dot{M}M^j\,d\theta\sum_{k=0}^{s-1}B_{k+1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}r^{j+1}\,dr$$

После интегрирования

$$J=-\frac{c_1 l^2\dot{a}\dot{b}}{R}-\frac{qc_2 l^2\dot{a}^2}{2}-\frac{9R\Phi_2 c_1\dot{b}^2}{8h^6}-\frac{9(n+1)R\dot{b}^2}{8h^6}\sum_{i=0}^{n}C_n^i\left(-\frac{qR}{2h}\right)^{n-i}\left(\frac{3}{2h^3}\right)^i c_{i+1}b^i\Phi_{i+2}- \tag{8}$$

$$-\frac{3R\dot{b}}{2h^3}\sum_{j=0}^{m}C_m^j\left(-\frac{qR}{2h}\right)^{m-j}\left(\frac{3}{2h^3}\right)^j c_{j+1}b^j\Phi_{j+1}$$

где приняты обозначении

$$c_1=\int_0^{2\pi}\cos^2 l\theta\cdot d\theta,\quad c_2=\int_0^{2\pi}\sin^2 l\theta\cdot d\theta,$$

$$c_{i+1}=\int_0^{2\pi}\cos^{i+1} l\theta\cdot d\theta,\quad c_{j+1}=\int_0^{2\pi}\cos^{j+1} l\theta\cdot d\theta$$

$$\Phi_2=\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_{k+1}}r^2\,dr,$$

$$\Phi_{i+1}=\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{E_{k+1}\left(\sigma_{k+1}^0\right)^n}\int_{a_k}^{a_{k+1}}r^{i+1}\,dr,$$

$$\Phi_{j+1}=\sum_{k=0}^{s-1}B_{k+1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}r^{j+1}\,dr.$$

Из условия стационарности функционала получается система двух дифференциальных уравнений. которое несложным математическим преобразованием приводится к одному дифференциальному уравнению, разрешенной относительно производной. Вводя безразмерные переменные и величины

$$\eta=\frac{a}{h},\ \tau=B_1E_1^m t,\ \omega=\frac{q}{E_1},\ \xi=\frac{R}{h}$$

$$\frac{E_1\Phi_2}{h^3}=\varphi_2,\ \frac{E_1^{n+1}\Phi_{i+1}}{h^{i+1}}=\varphi_{i+1},\ \frac{\Phi_{j+1}}{B_1h^{j+1}}=\varphi_{j+1}$$

получим дифференциальную уравнению, связывающую безразмерную времени от безразмерного прогиба, параметром которого является безразмерная нагрузка ω.

$$\frac{d\tau}{d\eta}=\frac{-c_1l^2+\frac{9c_2}{4}\zeta^3\varphi_2\omega}{\frac{3}{2^{m+1}}\zeta^{m+2}\omega^m\sum_{i=0}^{n}3^jC_m^jc_{j+1}\eta^j\varphi_{j+1}}+\frac{\frac{9(n+1)}{2^{n+1}}\zeta^{n+3}\omega^{n+1}\sum_{i=0}^{n}3^iC_n^ic_{i+2}\eta^i\varphi_{i+1}}{\frac{3}{2^{m+1}}\zeta^{m+2}\omega^m\sum_{i=0}^{n}3^jC_m^jc_{j+1}\eta^j\varphi_{j+1}} \tag{9}$$

Дифференциальное уравнение, с начальным условием для прогиба составит задачу Коши. Определим Начальным условием для задачи выпучивания оболочки при ползучести будет значение прогиба, возникающая немедленно после приложения распределенной нормальной нагрузки, соответствующее решению нелинейно-упругой задачи. Устойчивости при ползучести имеет смысл, когда действующая нагрузка меньше критической, определяемая из решения нелинейно-упругой задачи.

Вариационное уравнение для упругой задачи. Предполагаем, что действующая равномерно распределенная по поверхности сжимающая нагрузка q по значению меньше критической эйлеровой силы q_{kr}, т.е. $q < q_{kr}$. В этом случае оболочка в результате мгновенно-упругой деформации под нагрузкой q принимает новое положение. Это положение должно быть устойчивым, в противном случае теряется устойчивость для этого элемента конструкции в пределах упругости, без возникновения деформации ползучести. Среди кинематических возможных положений оболочки неустойчивому соответствует то состояние в пределах упругости, при котором функционал

$$J = R\int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h}\left\{\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}+\frac{1}{2R^2}\sigma\left(\frac{\partial\dot{w}}{\partial\theta}\right)^2\right\}dr\,d\theta-\frac{R}{2}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\dot{\sigma}^2\left[1+(n+1)\left(\frac{\sigma}{\sigma_{k+1}^0}\right)^n\right]dr\,d\theta+R\int_0^{2\pi}\dot{w}\,d\theta \qquad (10)$$

принимает стационарное значение. Будем аппроксимировать прогиб и изгибающий момент по той же моде, что и при ползучести (5), но с амплитудами зависящие от параметра нагрузки.

$$w = a_0((q))+a((q))\cos\ell\theta,\;\; M = b(q)\cos\ell\theta \qquad (11)$$

Явлении потери устойчивости с выпучиванием оболочки при упругости происходит тогда, когда нагрузка достигает критическое значение и остаются при этом неизменным. Распределение напряжения по толщине оболочки принимаем в виде (4). Дифференцирование напряжений в пределах упругости производим по отношении монотонно изменяющейся нагрузке q, так что

$$\dot{\sigma} = -\frac{R\dot{q}}{2h}+\frac{3\dot{M}r}{2h^3}\,. \quad \text{где} \quad \dot{q}=\frac{dq}{dq}=1, \quad \text{и таким образом}$$

$$\dot{\sigma} = -\frac{R}{2h}+\frac{3\dot{M}r}{2h^3} \qquad (12)$$

из условия стационарности функционала, соответствующее потери упругой устойчивости с выпучиванием получается следующее дифференциальное уравнение в безразмерных величинах

$$\frac{d\omega}{d\eta} = \frac{-\pi l^2+\frac{9\pi}{4}\zeta^3\varphi_2\omega+\frac{9(n+1)}{2^{n+2}}\zeta^{n+3}\omega^{n+1}\sum_{i=0}^{n}3^i c_n^i c_{i+2}\eta^i\varphi_{i+2}}{-\frac{9\pi}{4}\zeta^3\eta\varphi_2+\frac{3}{2^{n+2}}\zeta^{n+3}\omega^n\sum_{i=0}^{n}3^i c_n^i c_{i+1}\eta^i\varphi_{i+1}+\frac{9(n+1)}{2^{n+1}}\zeta^{n+3}\omega^n\sum_{i=0}^{n}3^i c_n^i c_{i+2}\eta^i\varphi_{i+2}} \qquad (13)$$

Из условия равенства числителя в ноль, получаем значении критической нагрузки.

Пример расчета конкретной задачи. Наиболее часто встречающемся на практике несовершенством круговых оболочек является ее начальная эллиптичность. Для решения конкретной задачи начальное отклонение срединной линии от окружности принимается пропорциональным косинусы двойного полярного угля (l=2) [15].

Предположим, что в трехслойной оболочке лицевые слои изготовлены из одного материала, с одинаковой толщиной, тогда $E_1=E_3$, $B_1=B_3$, $\delta_1=\delta_3$, $\sigma_1^0=\sigma_3^0$. Для численного реализации решения задачи с составлением таблицы и построением характерных графиков введем следующие безразмерные величины

$$\xi=R/h,\ \alpha=E_1/E_2,\ \beta=\delta_2/\delta_1,\ \gamma=\sigma_1^0/\sigma_3^0,\ \mu=B_2/B_1 \text{ и } \lambda=E_1/\sigma_1^0.$$

Для этих величин принимаем $\xi=20$, $\beta=2$, $\gamma=\sigma_1^0/\sigma_3^0$ и $\lambda=3$.

Уравнение (13) решается численно, методом Рунге-Кутта, принимая для начального безразмерного отклонения значение $\eta_0=0,1$. Решению упругой задачи будет соответствовать число

$$\eta(0)=0,1273. \tag{14}$$

Задача Коши для уравнения (9)- (14) решается методом Рунге-Кутта для различных значений безразмерных параметров. Для значений безразмерной критической времени, соответствующее момента потери устойчивости с выпучиванием, будем иметь:

При n =2 , m =5 для μ =2 и $\alpha=\gamma=1,75$ критическая время будет $\tau_{kr}=3,92.10^4$:
n =2 , m =5 для μ =1 и $\alpha=\gamma=1$ критическая время будет $\tau_{kr}=3,42.10^4$:
При n =4 , m =5 для μ =2 и $\alpha=\gamma=1,75$ критическая время будет $\tau_{kr}=3,15.10^3$:
n =4 , m =5 для μ =1 и $\alpha=\gamma=1$ критическая время будет $\tau_{kr}=2,6.10^3$:
При n =6 , m =5 для μ =2 и $\alpha=\gamma=1,75$ критическая время будет $\tau_{kr}=342$:
n =6 , m =5 для μ =1 и $\alpha=\gamma=1$ критическая время будет $\tau_{kr}=300$.

При выбранных значениях безразмерных параметров по результатам полученных решений заключаем, что оно хорошо согласуется с результатами теоретических и экспериментальных работ [1,7,14].

ЛИТЕРАТУРА

1.Noriyuki Mizayaki and Seila Hagihara, Creep buckling of shell structures. Mechanical Engineering Reviews, vol.2, №2,2015, pp.1-23.

2.Pittner, E.V. and Hoff, N.J., Creep buckling of simply supported moderately thin circular cylindrical shell. Acta Mechanica,vol.8,№1-2.1969,pp.116-125.

3.Ю.Н.Работнов, С.А.Шестериков Устойчивость стержней и пластинок в состоянии ползучести. ПММ,1957,2, № 3.c.27-34.

4.Hoff N.J., Rules and methods of stress and stability calculations in the presence of creep, Transactions of theASME, Journal of Applied Mechanics, vol.48, №3. 1978. pp.669-675.

5.Yamamota, Y., Consideration of a stability criterion for creep buckling, Journal of Mechanics and Physics of solids, vol.18, №2.1970, pp.165-177.

6.Ю.М. Севдималиев Выпучивание длинных цилиндрических оболочек при ползучести,

Ученые записки МВССО Азерб.ССР Серия физико-математических наук 1978, №4. с.33-39.
7. Р.Ю.Амензаде, Э.Т. Киясбейли, Л.Ф. Фатуллаева Сплющивание разностенной длинной многослойной вязкоупругой цилиндрической оболочки Журнал Механика композитных материалов, 2011, т.47, №2, с.1-18
8.Э.И.Григолюк, Ю.В. Липовцев.Применение вариационного принципа в задачах устойчивости оболочек в условиях ползучести. Инженерный журнал «Механика твердого тела», 1966,№2.с.84-90.
9.Ю.М. Севдималиев Устойчивость нелинейной арки при ползучести, Доклады АН Азерб.ССР,1982, т.XXXVIII.с.13-17.
10.Р.Ю.Амензаде, Ю.Бавафа, Ю.М.Севдималиев Вариационный метод решения задачи предельного состояния многослойного жестко защемленного нелинейно-упругого стержня при ползучести. Вестник ЧГПУ им.И.Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния,2011. №1(9). с.61-70.
11.Sanders G. L., McComb H. G., Schlechte F.R. A variational theorem for Creep with applications to plates and columns. -NASA Report,134,1958.
12.Bockhold, J. and Petryna, Y.S., Creep influence on buckling resistance of reinforced concrete shells. Computers and Structures, vol.86, №7-8, 2008, pp.702-713.
13.Dai, H.L., Dai, T. and Zheng, H.Y., Creep buckling and post-buckling analyses for a hybrid laminated viscoelastic FGM cylindrical shell under in-plane loading. International Journal of Mechanics and Material Design, vol.9, №4, 2013, pp.309-323.
14.Hamed, E., Bradfort, N.A., Gilbert, R.I. and Chang, Z.T., Analytical model and experimental study of failure behavoior of thin -walled shallow concrete domes, Journal of Structural Engineering,vol.137,№1.2011,pp.88-99.
15.Ю.Н. Работнов Ползучесть элементов конструкции М.,1966г.,752с.

PAYLANMIŞ YÜKÜN TƏSİRİNDƏN ÇOXLAYLI NAZİK QALINLIQLI ÖRTÜYÜN SÜRÜNCƏKLİK HALINDA QABARMASI

Y.SEVDİMALIYEV

XÜLASƏ

Məqalədə başlanğıc elliptik eksenstritetli nazikdivarlı çoxlaylı dairəvi uzun silindrik örtükdən ibarət konstruksiya elementinin paylanmış yük təsirindən sürüncəklik (creep) deformasiyası prosesində qabarması məsələsi tədqiq olunur.Silindrik ortüyün qeyri-xətti elastiki materialdan hazırlandığı, deformasiyanın həndəsi qeyri-xətti olması və sürüncəklik qanununun gərginliyin qüvvət funksiyası kimi approksimasiya olunduğu hallara baxılır. Məsələnin fiziki və həndəsi qeyri-xətti münasibətlərlə ifadə olunan riyazi modeli qurulur. Həll qarışıq variyasiya prinsipinin çoxlaylı sendvic tipli örtüklər üçün qurulmuş modifikasiyası və təqribi ədədi üsulların birlikdə tətbiqi ilə həll edilir. Konkret bir məsələ üçün ədədi həllər alınır və elementin yükdaşıma qabiliyyətinin böhran zaman resursu təyin olunur.

Açar sözlər: Sürüncəklik, çoxlaylı örtük, sürüncəklik prosesində qabarma, böhran zaman müddəti, örtük konstruksiyalar, riyazi model, variyasiya prinsipi.

BUCKLING OF A MULTILAYER THIN-WALLED SHELL DURING CREEP UNDER THE ACTION OF A DISTRIBUTED LOAD

Yu.SEVDIMALIYEV

SUMMARY

The processes occurring during deformation under creep conditions of a multilayer circular cylindrical shell deviating from a certain ideal shape are considered. Considering the flow process for a given system of loads and the critical time corresponding to the loss of stability, is determined from the condition that the deformation rates go to infinity. The influence of the multilayer shell on the critical values of the parameters is estimated. An example of calculation is given.

Keywords: creep, multilayer shell, creep buckling, shell structures, quasi-static instability, critical time, mathematical model, variational principle, bearing capacity.