

UOT 529.539

**ÖZLÜ ELASTİKİ SIXILMAYAN MAYENİN YARIM SONSUZ ÖZLÜ ELASTİKİ, DƏYİŞƏN EN KƏSİKLİ BORUDA DÖYÜNƏN AXINI****K.R.RƏHİMOVA, A.B.ƏLİYEV***Bakı Dövlət Universiteti**kamala.raqimova.mr@gmail.com, alialiyev.b@gmail.com*

*İşdə özlü elastiki sıxılmayan mayenin yarım sonsuz özlü elastiki, en kəsiyi dəyişən olan boruda pulsasiyalı axını öyrənilir. Məsələnin həlli Şturm-Luivil tənliyi üçün sinqulyar sərhəd məsələsinə gətirilir. Sadə halda mayenin reologiyasının dalğa xarakteristikalarının təsiri öyrənilib.*

**Açar sözlər:** dalğa, özlü maye, elastiki boru, dalğa sürəti, sönmə.

İndiki zamanda müxtəlif fiziki xarakterli mayələrin dalğa hərəkətlərinin təsviri ilə bağlı riyazi fizika məsələlərinə çox diqqət yetirilir. Bu maraq yalnız bu məsələlərin tətbiqi vacibliyinə deyil, həm də klassik riyazi fizikada analoji olmayan yeni nəzəri və riyazi tərkibinə də bağlıdır. Burada hidromexanikanın aktual məsələləri arasında deformasiya olunan borularda maye axınının tədqiqi çox vacibdir.

Bu ifadə texnika və canlı orqanizmlərdə mayenin daşınma sistemində geniş yayılması ilə təsdiqlənir (boru kəməri nəqliyyatı, hemodinamika). Belə məsələləri həll edərkən, borunun boşluğunda onun dinamikasının üzərinə hərəkət edən mayenin təsirini nəzərə alaraq, borunun hərəkət tənliyi yazılır [1, 2, 3, 5, 6, 7, 8]. Bu tədqiqatların kökləri L.Eyler, Gromeko, Y.Jukovskinin əsərlərində qoyulub. Bununla yanaşı, mayenin özlü elastik xüsusiyyətləri və boru materialının daralması kimi bir sıra çox vacib amillər kifayət qədər tədqiq olunmayıb. Birölçülü xətti tənliklərə əsaslanaraq, elastik boru içərisində özlü elastik mayenin pulsasiyalı axınının məsələsi üçün daralmanın təsiri nəzərə alınaraq analitik həll olunmuşdur. Burada deformasiya olunan boruya daxil olan mayenin dalğa axını nəzərdən keçirilir. İstifadə olunan sistemin riyazi modeli, sıxılmayan özlü elastik mayenin hərəkətinin tənliyi ilə kəsilməzlik tənliyi və en kəsiyi dəyişən izotrop xətti özlü elastik boru üçün dinamika tənliyi ilə təsvir olunur. Məsələnin həlli Şturm-Luivil tənliyi üçün sinqulyar məsələsinə gətirilir.

## 1. Məsələnin qoyuluşu

Tutaq ki,  $R=R(x)$  yarım sonsuz en kəsiyi dəyişən olan borudur və  $h$ - qalınlığıdır, burada  $R(x)$  monoton azalan  $\forall x \in [0, \infty)$  funksiyadır,  $x$  isə uzununa olan koordinatdır. Birölçülü hidroelastiklik tənliklərinin sistemi kəsilməzlik tənliklərindən [1,4]

$$\frac{\partial}{\partial x}(Su) + L \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

impuls tənliyi

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(-p + \sigma) \quad (1.2)$$

və xətti özlü elastiklik üçün olan borunun hərəkət tənliyindən ibarətdir

$$p = \frac{n}{R^2(x)} E^v w = \rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

(1.3) tənliyini yazarkən, boru nazik divarlı olub və ətraf mühitə sərt bərkidilmişdir. Nəticədə boru  $ox$  boyunca hərəkət edə bilmir. İdeal və özlü Nyuton mayesinin hidrodinamikasının klassik təsvirləri uzun makromolekulyar birləşmələri olan butov mühit axınına təsvir edərkən qəbul edilməzdir. Bu fakt bir çox texnoloji proseslər üçün birinci dərəcəli əhəmiyyətə malikdir ki, kolloid məhulları, suspenziyalar, emulsiyalar və s. bura daxildir. Bunun üçün, yuxarıda göstərilən tənliklərin əlaqələndirilməsi üçün, mayenin reoloji münasibətlərini yazırıq və onu xətti özlü elastiki qəbul edirik.

$$\prod_{j=1}^r \left( 1 + \lambda_j \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \sigma = 2\eta \prod_{j=1}^s \left( 1 + \theta_j \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot e \quad (1.4)$$

(1.1)-(1.4) tənliklərdə  $u(x,t)$  mayenin axın sürəti,  $w(x,t)$ - borunun divarlarının radial yerdəyişməsi,  $p(x,t)$  hidrodinamik təzyiq,  $\sigma(x,t)$ - gərginlik,  $\rho$  və  $\rho_*$ - maye və borunun materialının sıxlığı,  $e(x,t)$ - deformasiyanın sürəti,  $S = \pi R^2$ - en kəsin sahəsi,  $L = 2\pi R(x)$ - borunun çevrəsinin uzunluğu,  $\eta$ - mayenin dinamik özlülük əmsalıdır.  $\lambda_j$  və  $\theta_j$  relaksasiya və retardasiyanı xarakterizə edir. (1.3)-də  $E^v$  - irsi tipli operatorudur[5].

$$E^v = E(1 - \Gamma^*), \quad \Gamma^* w(x,t) = \int_{-\infty}^t \Gamma(t - \tau) w(x, \tau) d\tau$$

burada  $E$ - elastiklik moduludur,  $\Gamma^*$  - relaksasiya operatorudur,  $\Gamma(t - \tau)$ - relaksasiyanın fərq nüvəsidir. (1.3) açıq formada belə yazılır

$$p = \frac{h}{R^2(x)} E \left\{ w(x,t) - \int_{-\infty}^t \Gamma(t - \tau) w(x, \tau) d\tau \right\} \quad (1.5)$$

(1.4)-də  $e = \partial u / \partial x$  bərabərliyini nəzərə alsaq, o belə yazılacaq

$$\prod_{j=1}^r \left( 1 + \lambda_j \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \sigma = 2\eta \prod_{j=1}^s \left( 1 + \theta_j \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.6)$$

$R(x)$  funksiyası  $R(x) = R_\infty g(x)$  kimi yazılır, funksiya  $g(x)$  ikinci tərtib diferensiallandır. Sonsuzluqda boru daimi  $R_\infty$  en kəsiyinə malikdir.

Buradan alırıq ki,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1 \quad (1.7)$$

Eyni zamanda

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g''(x) = 0, \quad (1.8)$$

ştrixlər  $x$  koordinatına görə diferensiallanmanı bildirir. Misal üçün bu funksiyanı aşağıdakı kimi göstərmək olar

$$g(x) = 1 + e^{-\beta x} \quad (\beta > 0), \quad (1.9)$$

hansı ki borunun uzunluğuna görə konus formasında daraldığını göstərir. O zaman (1.5) və (1.6) nəzərə alaraq növbəti qapalı tənliklər sistemini alırıq:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{g'(x)}{g(x)} u + \frac{2}{R_\infty g(x)} \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (1.10)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (1.11)$$

$$p = \frac{h}{R_\infty^2 g'(x)} E \left( w(x, t) - \int_{-\infty}^t \Gamma(t - \tau) w(x, \tau) d\tau \right) \quad (1.12)$$

$$\prod_{j=1}^r \left( \sigma + \lambda_j \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) = 2\eta \prod_{j=1}^s \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \theta_j \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \quad (1.13)$$

Qeyd edək ki, dalğa proseslərində hidroelastiki tənliklərin xəttilləşməsi  $|u \cdot c^{-1}| \ll 1$  bərabərsizliyin olduğu müddətcə etibarlıdır.

$$\left| \frac{u}{c} \right| \ll 1,$$

$c$ -dalğanın kompleks yayılma sürətidir (bütün zamanlar üçün). Kinematik keçirməməzlik şərtindən özlü elastiklik nəzəriyyəsinin tənliklərinin xəttilləşməsi alınır.

## 2. Sürət amplitudası üçün diferensial tənliyin çıxarışı

(1.10)-(1.13) xüsusi törəmələr ilə olan tənliklər sistemini adi diferensial tənliklər sisteminin həllinə gətirək.

Harmonik analiz dalğa proseslərinə xas olan mürəkkəb impulsları təsvir etmək üçün istifadə olunur, yəni mürəkkəb formada olan impulslar Furye sırası əmələ gətirən sinusoidal komponentlərə ayrılırlar. Sistemin xəttilləşmə və bircinsliyi sayəsində hər bir harmonikanın keçməsi izlənilir və hər hansı bir nöqtədə impulsun formasını müəyyən etmək üçün verilmiş koordinata uyğun

komponentlər cəmlənir. Beləliklə, riyaziyyatın əhəmiyyəti sırf sinusoidal rəqslərin öyrənilməsidir. Yuxarıda qeyd olunan bütün axtarılan funksiyaları müvəqqəti  $\exp(i\omega t)$  vuruğuna proporsional olaraq təsvir etməyə imkan verir, burada  $\omega$  – verilmiş həqiqi bucaq tezliyidir,  $i$  – xəyali ədəddir. Buna görə, qayıdan dalğalar üçün yazaq:

$$\begin{aligned} u &= u_1(x) \exp(i\omega t), \\ w &= w_1(x) \exp(i\omega t), \\ p &= p_1(x) \exp(i\omega t), \\ \sigma &= \sigma_1(x) \exp(i\omega t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Burada  $u_1, w_1, p_1, \sigma_1$  - koordinatların kompleks funksiyalarıdır. Əvvəlcə (1.12) tənliyini yazaq. (2.1)-də 2-ci və 3-cü düsturlarını (1.12)-də nəzərə alsaq (2.2)-ni alırıq

$$p_1 = \exp(i\omega t) - \frac{h}{R_\infty^2 g(x)} E \left\{ w_1 \exp(i\omega t) - w_1 \int_{-\infty}^t \Gamma(t-\tau) e^{i\omega \tau} d\tau \right\} \quad (2.2)$$

Burada  $t - \tau = \theta$  qəbul edərək və bir sıra dəyişiklərdən sonra (2.2)-ni aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$p_1 = w_1 h \left\{ \frac{E}{R_\infty^2 g^2(x)} (1 - \alpha) - \rho_* \omega^2 \right\}$$

burada,

$$\alpha = \int_0^\infty \Gamma(\theta) e^{-i\omega \theta} d\theta \quad (2.3)$$

Mümkün relaksasiya nüvələrinə əsasən, düstür ilə müəyyən edilən kompleks dəyər  $\alpha$  analitik və ya cəbri olaraq müəyyən edilə bilər. Yuxarıdakı kimi (1.10), (1.11) və (1.13) tənliklərində dəyişiklərdən sonra tapırıq ki:

$$u_1' + 2 \frac{g'(x)}{g(x)} u_1 + 2i \frac{\omega}{R_\infty g(x)} w_1 = 0, \quad i\omega \rho u_1 = -p_1' + \sigma_1'', \quad (2.4)$$

$$p_1 = k(x) w_1, \quad \sigma_1 = 2\eta \frac{b}{a} u_1', \quad (2.7)$$

və burada

$$a = \prod_{j=1}^r (1 + i\lambda_j \omega), \quad b = \prod_{j=1}^s (1 + i\theta_j \omega), \quad k(x) = h \left\{ \frac{E}{R_\infty^2 g^2(x)} (1 - \alpha) - \rho_* \omega^2 \right\} \quad (2.8)$$

Baxılan (2.4)-(2.7) sistemləri nəzərə alındıqda  $u_1(x)$  funksiyasını təyin etmək və uyğun tənlikləri almaq mümkündür. Əvvəlcə  $x$ -a görə (2.6) və (2.7) tənliklərini diferensiallayaq. Aldığımızı (2.5)-də nəzərə alaraq yazırıq ki:

$$2\eta \frac{b}{a} u_1'' - k' w_1 - k w_1' - i\omega \rho u_1 = 0. \quad (2.10)$$

Görünür ki, (2.4)-dən (2.11) alınacaq

$$w_1 = -\frac{1}{Q_2(x)}u_1' - \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}u_1. \quad (2.11)$$

Burada  $Q_1(x)$ ,  $Q_2(x)$  funksiyaları bunlardır

$$Q_1(x) = 2\frac{g'(x)}{g(x)}, \quad Q_2(x) = 2i\frac{\omega}{R_\infty g(x)}.$$

İndi isə (2.11)-dən  $w_1'$ -i tapmaq olar və onu (2.10)-da yazaraq  $u_1$  funksiyasına nisbətən tənlik almaq olar. Və nəticə olaraq aldıq ki,

$$G_1(x)u_1'' + G_2(x)u_1' + G_3(x)u_1 = 0, \quad (2.12)$$

burada,

$$G_1(x) = 2\eta\frac{b}{a} - i\frac{R_\infty}{2\omega}k(x)g(x), \quad (2.13)$$

$$G_2(x) = -\frac{iR_\infty}{2\omega}\{(gk)' + kg'\}, \quad (2.14)$$

$$G_3(x) = -i\left\{\frac{R_\infty}{2\omega}(kg') + \omega\rho\right\}. \quad (2.15)$$

### 3. Məsələnin həllini Şturm-Luivil tənliyi üçün sinqulyar sərhəd məsələsinə gətirilməsi

Keçək (2.12) tənliyin həllinin qurulmasına. Bunun üçün Luivil əvəzindən istifadə edək

$$y(x) = u_1 \exp\frac{1}{2}\int\frac{G_2(x)}{G_1(x)}dx \equiv u_1(x)\chi(x), \quad (3.1)$$

Buna görə də (2.12) bu cür yazılacaq (dalğa tənliyinin azaldılma forması)

$$y'' + I(x)y = 0 \quad (3.2)$$

$I(x)$  invariantı bu düstür ilə tapılır:

$$I(x) = \frac{G_3}{G_1} - \frac{1}{4}\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{G_2}{G_1}\right)' \quad (3.3)$$

(1.7) və (1.8)-ə əsaslanaraq aşağıdakı bərabərliyi alırıq

$$\lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = h\left\{\frac{E}{R_\infty^2}(1 - \alpha) - \rho_*\omega^2\right\}.$$

Buradan aydındır ki,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G_1(x) = 2\eta\frac{b}{a} - i\frac{R_\infty h}{2\omega}\left\{\frac{E}{R_\infty^2}(1 - \alpha) - \rho_*\omega^2\right\},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G_2(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} G_3(x) = -i\omega\rho.$$

O zaman, yazı bilirik ki,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I(x) = -\frac{i\omega\rho}{2\eta\frac{b}{a} - i\frac{R_\infty h}{2\omega} \left\{ \frac{E}{R_\infty^2} (1-\alpha) - \rho_*\omega^2 \right\}} = \delta^2 \quad (3.4)$$

(3.4) dispersiya tənliyini həqiqi və xəyali hissələrə bölərək aşağıdakını alırıq:

$$\delta^2 = \mu_0 - i\mu_1. \quad (3.5)$$

(3.5) qısdılmış tənlikdə olan qeydlər bunlardır:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{\omega\rho m_3}{4\eta^2 m_1^2 + m_3^2}, \\ \mu_1 &= 2\eta \frac{\omega\rho m_1}{4\eta^2 m_1^2 + m_3^2}, \\ m_1 &= \operatorname{Re} \frac{b}{a}, \\ m_2 &= \operatorname{Im} \frac{b}{a}, \\ m_3 &= -2\eta m_2 + \frac{R_\infty h}{2\omega} \left\{ \frac{E}{R_\infty^2} (1-\alpha) - \rho_*\omega^2 \right\}. \end{aligned}$$

Buradan isə kompleks ədədlərdən kvadrat kökü çıxartmaq qaydası ilə  $\delta$  alırıq

$$\delta = \pm \left\{ \sqrt{\frac{\psi + \mu_0}{2}} - i\sqrt{\frac{\psi - \mu_0}{2}} \right\}, \quad \psi = \sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}$$

Daha sonra isə  $\operatorname{Im} \delta < 0$  olan kökü istifadə ediləcək. Aydındır ki,

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_0 - i\delta_1, \\ \delta_0 &= \sqrt{\frac{\psi + \mu_0}{2}}, \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{\psi - \mu_0}{2}}. \end{aligned}$$

Nəzərə alsaq ki

$$q(x) = 1 - \frac{I(x)}{\delta^2} \quad (3.6)$$

(3.2)-dən məsələnin diferensial tənliyini alırıq:

$$y'' + \delta^2 y = \delta^2 q(x)y. \quad (3.7)$$

Kompleks  $q(x)$  potensial funksiyasına inteqrallanma şərti tətbiq olunur [1]

$$\int_0^\infty |q(x)| dx < +\infty. \quad (3.8)$$

(3.6) düsturuna əsasən alınan funksiya  $q(x)$  (1.9) ilə birlikdə (3.8) şərtini təmin edir.

Daha sonra həllin qurulması üçün (3.6) tənliyinə aşağıdakı sərhəd şərtlərini

əlavə edək

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$y_0$ -ın hesablanması sistemin fəaliyyətindən asılıdır (borunun en kəsiyində olan fərqli sərhəd şərtləri). (3.9) şərti axtarılan şərtin məhdudluğunu göstərir. Beləliklə, alınan hidroelastiklik məsələsi (3.7), (3.9), (3.10) Şturm-Luivil sinqulyar sərhəd məsələsinin həllinə gətirildi.

#### 4. Ekvivalent inteqral tənliyinin çıxarışı və onun həlli

Şturm-Luivil sərhəd məsələsinin həllini inteqral tənliyin həllinə gətirək. Nəzərə alaq ki, bircins tənliyin

$$y'' + \delta^2 y = 0 \quad (4.1)$$

aşağıdakı fundamental həllər sistemi vardır

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-i\delta x}, \\ y_2 &= e^{i\delta x}. \end{aligned}$$

(4.1)-ə sağ tərəfi  $\delta^2 q(x)y$  kimi məlum olan bircins olmayan tənlik kimi baxılır, sərbəst daimi ədədlər üçün variasiya metodunu istifadə edərək, (3.7), (3.9), (3.10) məsələnin həllini ekvivalent inteqral tənliyinə salırıq

$$y(x, -\delta) = Ce^{-i\delta x} + \delta \int_x^{\infty} \sin \delta(\eta - x) q(\eta) y(\eta, -\delta) d\eta, \quad (4.2)$$

o müsbət  $x$  oxu istiqamətində qayıdan dalğanı təsvir edir.  $C$ - inteqral sabitidir.

(4.2) tənliyin bir tək  $y(x, -\delta)$  həlli var və o, həmçinin sonsuzluqda sərhəd şərtini təmin edərək (3.7) tənliyində həllidir.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x, -\delta) = 0 \quad (4.3)$$

(4.2) tənliyi Volter tipli tənlikdir və onu ardıcıl yaxınlaşmalar metodu ilə həll etmək olar.

$$y_0(x, -\delta) = C \exp(-i\delta x) \quad (4.4)$$

$$y_{n+1}(x, -\delta) = Ce^{-i\delta x} + \delta \int_x^{\infty} \sin \delta(\eta - x) q(\eta) y_n(\eta, -\delta) d\eta$$

$\text{Im } \delta < 0$  olduğuna görə

$$|y_0(x, -\delta)| \leq |C| \exp(\text{Im } \delta x).$$

İnduksiya metodu ilə

$$|y_n(x, -\delta) - y_{n-1}(x, -\delta)| \leq |C| e^{(\text{Im } \delta)x} \frac{B_\delta^n(x)}{n!}, \quad (4.5)$$

$$B_\delta(x) = \left| \delta \int_x^\infty q(\eta) d\eta \right|.$$

O zaman

$$B_\delta(x) = \left| \delta \int_x^\infty q(\eta) d\eta \right| \leq \left| \delta \int_0^\infty q(x) dx \right| = B_\delta(0) < +\infty$$

bərabərsizliyindən alırıq

$$\left| y_n(x, -\delta) - y_{n-1}(x, -\delta) \right| \leq |C| \frac{B_\delta^n(0)}{n!}$$

Fikirimizi tamamlamaq üçün

$$\left| \sin \delta(\eta - x) \right| \leq \exp[-Jm\delta(\tau - x)] \quad (\tau \geq x)$$

bərabərsizliyini götürürük,  $n=l$  olanda yazırıq ki

$$\begin{aligned} \left| y_1(x, -\delta) - y_0(x, -\delta) \right| &\leq |C| \left| \delta \int_x^\infty e^{-Im\delta(\eta-x)} |q(\eta)| e^{(Im\delta)\eta} d\eta \right| = \\ &= |C| \left| \delta \right| e^{(Im\delta)x} \int_x^\infty |q(\eta)| d\eta = |C| e^{(Im\delta)x} B_\delta(x) \end{aligned}$$

Tutaq ki, (4.5)  $n=m$  olanda da düzdür. Onun düzgünlüyünü  $n=m+1$  olanda isbat edək. Onda

$$\begin{aligned} \left| y_{m+1}(x, -\delta) - y_m(x, -\delta) \right| &\leq \left| \delta \int_x^\infty \sin \delta(\tau - x) |y_m(\eta, -\delta) - y_{m-1}(\eta, -\delta)| |q(\eta)| d\eta \right| \leq \\ &\leq \frac{|C|}{m!} e^{(Im\delta)x} \int_x^\infty B_\delta^m(\eta) |\delta| |q(\eta)| d\eta = \frac{|C|}{m!} e^{(Im\delta)x} B_\delta^m(\eta) dB_\delta(\eta) = |C| e^{(Im\delta)x} \frac{B_\delta^{m+1}(x)}{(m+1)!} \end{aligned}$$

Nəzərə alsaq ki,

$$\left| y_0(x, -\delta) \right| \leq |C| \exp(Im\delta)x \leq |C|,$$

(4.5) ilə nəticə olaraq tapırıq ki,

$$y_0(x, -\delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \{y_n(x, -\delta) - y_{n-1}(x, -\delta)\} \quad (4.5)$$

sırası yaxınlaşan müsbət saylı sıra ilə  $[0, +\infty)$  intervalda üstnlüyü təşkil edir

$$\left| C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_\delta^n(0)}{n!} \right|.$$

Veyerştrass əsasında  $x \in [0, +\infty)$  üzrə bərabər yaxınlaşır. Buradan aydındır ki, onun  $y(x, -\delta)$  cəmi (4.2) tənliyinin həllidir. (4.6) sırasının  $S_n(x)$  cəmi üçün yazırıq ki,

$$S_n(x) = y_0(x, -\delta) + \sum_{k=1}^n \{y_k(x, -\delta) - y_{k-1}(x, -\delta)\} = y_n(x, -\delta),$$

Onda,



$$y(x, -\delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x, -\delta).$$

(4.4)-də  $n \rightarrow \infty$  olanda limit həddinə keçəndə, alırıq ki,

$$y(x, -\delta) = Ce^{-i\delta x} + \delta \int_x^{\infty} \sin \delta(\eta - x) q(\eta) y(\eta, -\delta) d\eta \quad (4.7)$$

Beləliklə,  $y(x, -\delta)$  funksiyası (4.2) tənliyinin həllidir. Yuxarıdakı hesablamalar, ancaq  $y_n(x, -\delta)$  yaxınlaşmasında düzgündür. Bundan başqa

$$\begin{aligned} |y(x, -\delta)| &\leq |y_0(x, -\delta)| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n(x, -\delta) - y_{n-1}(x, -\delta)| \leq \\ &\leq |C| \exp(\operatorname{Im} \delta)x + |C| \exp(\operatorname{Im} \delta)x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{\delta}^n(x)}{n!} \leq \\ &\leq |C| \exp(\operatorname{Im} \delta)x + |C| \exp(\operatorname{Im} \delta)x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{\delta}^n(0)}{n!} = \\ &= |C| \left\{ \exp(\operatorname{Im} \delta)x + \exp[\operatorname{Im}(\delta)x + B_{\delta}(0)] \right\} \end{aligned}$$

bərabərsizliyindən alırıq ki,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x, -\delta) = 0$$

Nəzərə alsaq ki, (4.7) bərabərliyi doğrudur, onda inteqral işarəsi ilə differensiallana bilər. Buradan alırıq ki,

$$y'(x, -\delta) = -i\delta Ce^{-i\delta x} - \delta^2 \int_x^{\infty} \cos \delta(\eta - x) q(\eta) y(\eta, -\delta) d\eta \quad (4.8)$$

Analoji olaraq (4.8)-də differensiallayaraq alırıq:

$$y''(x, -\delta) = -\delta^2 Ce^{-i\delta x} - \delta^3 \int_x^{\infty} \sin \delta(\eta - x) q(\eta) y(\eta, -\delta) d\eta + \delta^2 q(x) y(x, -\delta)$$

(4.7)-ni nəzərə alaraq

$$\begin{aligned} y''(x, -\delta) &= \delta^2 q(x) y(x, -\delta) - \delta^2 \left\{ Ce^{-i\delta x} + \delta \int_x^{\infty} \sin \delta(\eta - x) q(\eta) y(\eta, -\delta) d\eta \right\} = \\ &= \delta^2 q(x) y(x, -\delta) - \delta^2 y(x, -\delta) \end{aligned}$$

və ya

$$y''(x, -\delta) + \delta^2 y(x, -\delta) = \delta^2 q(x) y(x, -\delta),$$

Yəni  $y(x, -\delta)$  funksiyası (3.7) tənliyinin həllidir.

C- ədədini tapmaq üçün onu elə seçmək lazımdır ki, o (3.9) sərhəd şərtlərini təmin etsin. Buna görə də (4.2) tənliyi üçün aşağıdakı inteqral tənliyi yazaq

$$f(x, -\delta) = e^{-i\delta x} + \delta \int_x^{\infty} \sin \delta(\eta - x) q(\eta) y(\tau, -\delta) d\eta \quad (4.9)$$

$f(x, -\delta)$  -ni onun həlli kimi qeyd edirik və sonar  $C$ -ni tapırıq:

$$C = \frac{y_0}{f(0, -\delta)} \quad (4.10)$$

funksiya

$$y(x, -\delta) = y_0 \frac{f(x, -\delta)}{f(0, -\delta)}$$

(3.7), (3.9), (3.10) Şturm-Luivil sərhəd məsələsinin həllidir.

### 5. Analitik həllin qurulması

Ardıcıl yaxınlaşmalar metodu əsasında (4.9) tənliyinin həlli aşağıdakı kimi yazılır

$$f(x, -\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n f_n(x, -\delta), \quad (5.1)$$

burada,

$$f_0(x, -\delta) = e^{-i\delta x} \quad (5.2)$$

$$f_n(x, -\delta) = \int_x^{\infty} \sin \delta(\eta - x) q(\eta) f_{n-1}(\eta, -\delta) d\eta \quad (n=1, 2, \dots)$$

(2.4)-(2.7) düsturları ilə cari koordinatlardan  $u$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $\sigma$  funsiyalarını tapırıq. Nəzərə alaq ki,

$$F(x) = \frac{1}{\chi(x)} \frac{f(x, -\delta)}{f(0, -\delta)}$$

onda,

$$u = y_0 F(x) \exp(i\omega t) \quad (5.3)$$

$$w = y_0 \frac{iR_{\infty}}{\omega} \left\{ \frac{1}{2} g(x) F'(x) + g'(x) F(x) \right\} \exp(i\omega t) \quad (5.4)$$

$$p = y_0 k(x) \frac{iR_{\infty}}{\omega} \left\{ \frac{1}{2} g(x) F'(x) + g'(x) F(x) \right\} \exp(i\omega t) \quad (5.5)$$

$$\sigma = 2y_0 \eta \frac{b}{a} F'(x) \exp(i\omega t). \quad (5.6)$$

Borunun en kəsiyində sərhəd şərti kimi maye sürətinin, yerdəyişməsini, təzyiqini və özlü elastik gərginliyini yazmaq üçün pulsasiya edən təzyiqli təyin edək

$$p(0, t) = p_0 \exp(i\omega t), \quad (5.7)$$

$p_0$  - verilmiş empirik vahiddir. (5.7) və (5.5) müqayisə etsək,

$$y_0 = p_0 \frac{\omega}{iR_{\infty}k(0) \left\{ \frac{1}{2} g(0)F'(0) + g'(0)F(0) \right\}},$$

və (5.3)-(5.6) düsturlarından alarıq:

$$u(x,t) = -p_0 \frac{i\omega}{R_{\infty}k(0)} \frac{F(x)}{\frac{1}{2} g(0)F'(0) + g'(0)F(0)} \exp(i\omega t),$$

$$w(x,t) = \frac{p_0}{k(0)} \frac{\frac{1}{2} g(x)F'(x) + g'(x)F(x)}{\frac{1}{2} g(0)F'(0) + g'(0)F(0)} \exp(i\omega t), \quad (5.8)$$

$$p(x,t) = p_0 \frac{k(x)}{k(0)} \frac{\frac{1}{2} g(x)F'(x) + g'(x)F(x)}{\frac{1}{2} g(0)F'(0) + g'(0)F(0)} \exp(i\omega t),$$

$$\sigma(x,t) = -2ip_0\eta \frac{b}{a} \frac{\omega}{R_{\infty}k(0)} \frac{F'(x)}{\frac{1}{2} g(0)F'(0) + g'(0)F(0)} \exp(i\omega t).$$

Analoji olaraq borunun en kəsiyində sərhəd şərti kimi pulyasiya edən maye sərfi verilib

$$Q = Q_0 \exp(i\omega t),$$

burada

$$Q(x,t) = S(x)u(x,t)$$

onda,

$$y_0 = \frac{Q_0}{\pi R_{\infty}^2 g(0)} \frac{1}{F(0)}$$

Buradan isə

$$u(x,t) = \frac{Q_0}{\pi R_{\infty}^2 g(0)} \frac{F(x)}{F(0)} \exp(i\omega t),$$

$$w(x,t) = \frac{iQ_0}{\pi R_{\infty} \omega g^2(0)F(0)} \left\{ \frac{1}{2} g(x)F'(x) + g'(x)F(x) \right\} \exp(i\omega t) \quad (5.9)$$

$$p(x,t) = iQ_0 \frac{k(x)}{\pi R_{\infty} \omega g^2(0)F(0)} \left\{ \frac{1}{2} g(x)F'(x) + g'(x)F(x) \right\} \exp(i\omega t),$$

$$\sigma(x,t) = 2Q_0 \frac{\eta}{\pi R_\infty^2 g^2(0)} \frac{b F(x)}{a F(0)} \exp(i\omega t).$$

(5.8) və (5.9) düstürləri həqiqi hissələri təsvir edirik və bizim misal həll edilmiş hesab olunur.

### 6. Ədədi misal

Aşağıdakı nümunəyə baxaq. Burada  $\alpha = 0$ ,  $R = R_\infty = R$ ,  $g(x)=1$  olduğuna görə (2.13)-(2.15) düstürlərinə əsasən, yazırıq ki,

$$G_1 = 2\eta \frac{b}{a} - i \frac{R}{2\omega} k, \quad G_2 = 0, \quad G_3 = -i\omega\rho,$$

Həmçinin

$$k = h \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\},$$

$$\chi(x) = 1, \quad q(x) = 0.$$

İndi isə  $f(0, -\delta) = 1$  olduğuna görə,  $f(x, -\delta)$ ,  $f'(x, -\delta)$  və  $F(x)$  funksiyalar belə yazıla bilərlər

$$f(x, -\delta) = e^{-i\delta x},$$

$$f'(x, -\delta) = -i\delta e^{-i\delta x},$$

$$F(x) = f(x, -\delta) = e^{-i\delta x}.$$

Beləliklə, məsələnin həlli asanlaşır və (5.8) sayəsində bu formada yazılır

$$u(x,t) = 2p_0 \frac{\omega}{\delta} \frac{1}{Rh \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\}} \exp[i(\omega t - \delta x)],$$

$$w(x,t) = p_0 \frac{1}{h \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\}} \exp[i(\omega t - \delta x)],$$

$$p(x,t) = p_0 \exp[i(\omega t - \delta x)],$$

$$\sigma(x,t) = 4p_0 \eta \frac{b}{a} \frac{i\omega}{Rh \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\}} \exp[i(\omega t - \delta x)], \quad c_n = \frac{\omega}{\text{Re } \delta_n},$$

və

$$u(x,t) = \frac{Q_0}{\pi R^2} \exp[i(\omega t - \delta x)],$$

$$w(x,t) = \frac{Q_0}{2\pi R} \frac{\delta}{\omega} \exp[i(\omega t - \delta x)],$$

$$p(x,t) = Q_0 \frac{h \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\}}{2\pi R} \frac{\delta}{\omega} \exp[i(\omega t - \delta x)],$$

$$\sigma(x,t) = -2iQ_0 \frac{\eta}{2\pi R^2} \delta \frac{b}{a} \exp[i(\omega t - \delta x)].$$

Burada axtarılan funsiyaların amplitudları üçün Eylər düsturuna əsasən, yazı bilərik ki,

$$|u| = \frac{2\rho_0\omega}{Rh \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\}} \frac{1}{\sqrt{\delta_0^2 + \delta_1^2}}, \quad |w| = \frac{P_0}{h \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\}}, \quad (6.1)$$

$$|p| = p_0, \quad |\sigma| = 4p_0\eta \frac{\omega}{Rh \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\}} \sqrt{m_1^2 + m_2^2},$$

$$|u| = \frac{Q_0}{\pi R^2}, \quad |w| = \frac{Q_0}{2\pi R\omega} \sqrt{\delta_0^2 + \delta_1^2}, \quad (6.2)$$

$$|p| = \frac{Q_0 h \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\}}{2\pi R\omega} \sqrt{\delta_0^2 + \delta_1^2},$$

$$|\sigma| = 2Q_0 \frac{\eta}{\pi R^2} \sqrt{(\delta_1 m_1 - \delta_0 m_2)^2 + (\delta_0 m_1 + \delta_1 m_2)^2}.$$

Relaksasiya olan zamandan asılı olaraq, yuxarıdakı düstürləri də axtarılan funsiyaların hesablanmasında, dalğanın sürəti  $c = \omega / \delta_0$  və  $\delta_1$  sönmələrinin tapılması üçün istifadə etmək olar.

Birinci hal  $\psi = s + 1$ . ( $\psi = 1, s = 0$ )  $a = 1 + i\lambda\omega$ ,  $b = 1$  mühitli modellər üçün, burada  $\lambda$  - relaksasiyanın gərginlik zamanıdır. Burada  $m_1$  və  $m_2$

$$m_1 = \frac{1}{1 + \lambda^2 \omega^2}, \quad m_2 = -\frac{\lambda\omega}{1 + \lambda^2 \omega^2}.$$

İkinci hal  $\psi = s = 1$ . Burada isə  $a = 1 + i\lambda\omega$ ,  $b = 1 + i\theta\omega$ , və yuxarıdakılar bunlarla əvəz olunur

$$m_1 = \frac{1 + \lambda^2 \omega^2 \xi}{1 + \lambda^2 \omega^2}, \quad m_2 = \frac{\lambda\omega}{1 + \lambda^2 \omega^2} (\xi - 1),$$

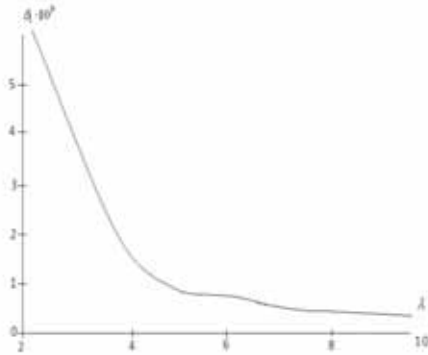
burada  $\xi = \theta / \lambda$ ,  $\theta$  - retardasiyanın zamanıdır.  $\psi = s = 0$  olduqda isə özlü Nyuton mayesinin modelini əldə edirik.

Nəzərdən keçirilmiş mayelərin qeyri-Nyuton xüsusiyyətlərinin təyini üçün eksperiment aparaq, onların asılılıqlarını göstərək. Aşağıdakı parametrlər verilib:

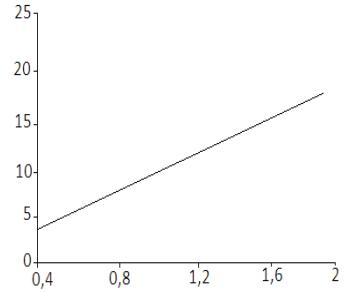
$$E = 4 \cdot 10^6 \text{ dN} / \text{sm}^2, \quad \rho = 1 \text{ q} / \text{sm}^3, \quad \rho_* = 1 \text{ q} / \text{sm}^3, \quad R = 1,2 \text{ sm}, \quad h = 0,2 \text{ sm},$$

$Q_0 = 120 \text{ sm}^3 / \text{san}$ ,  $\omega = 2\pi \text{ san}^{-1}$ ,  $x = 10 \text{ sm}$ ,  $\eta = 5q / \text{sm} \cdot \text{san}$ ,  $\eta = 14$   
 Hesablamalar göstərir ki, qəbul edilmiş modelin hər iki variantında dalğa sürətinin yayılması, demək olar ki,  $\lambda$  və  $\xi$  asılı deyil, və  $c = 577 \text{ sm/san}$  –dir.

1 və 2 şəkillərdə sönmə əmsallarının asılılıq qrafikləri verilib.

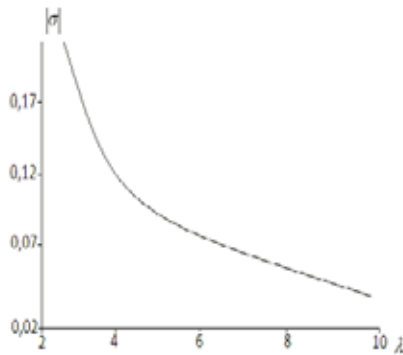


**Şəkil 1.** Sönmə əmsalının  $\lambda$ -dan asılılığı.

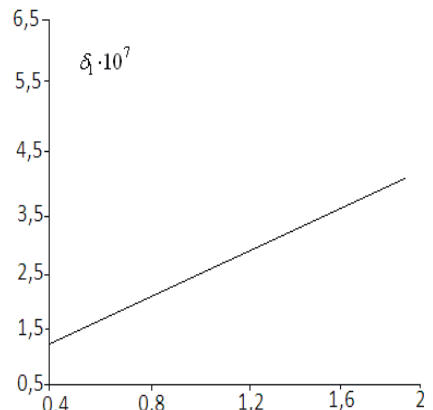


**Şəkil 2.** Sönmə əmsalının  $\xi$ -dan asılılığı.

3 və 4 şəkillərdə özlü gərginlik amplitudası və  $\lambda, \xi$  arasında sistemin 1-ci və 2-ci funksional rejimində olan asılılıq verilib.



**Şəkil 3.** Özlü gərginlik amplitudasının  $\lambda$ -dan asılılığı



**Şəkil 4.** Özlü gərginlik amplitudasının  $\xi$ -dan asılılığı, ( $\lambda = 5$ ).

Müqayisə üçün  $m_1 = 1, m_2 = 0$  olanda rəqəmli nümunələr gətirək, bu da bir Nyuton mayesinin modelinə uyğun gəlir:  $c = 577 \text{ sm/san}$ ,  $\delta_1 = 10^{-6} \text{ 1/sm}$ .  
 olduğda 1-ci rejim üçün  $\sigma = 0,26 \text{ dN / sm}^2$ , 2-ci rejim üçün isə  $\sigma = 2,89 \text{ dN / sm}^2$ .

## NƏTİCƏ

- modelin birinci sinfi üçün, sönmə əmsalı ikinci sinifdən 2 sıra daha kiçikdir;
- ikinci rejimdə özlü gərginlik amplitudası  $\xi$  asılı olaraq artır
- birinci rejimdə özlü gərginlik amplitudası  $\lambda$  asılı olaraq azalır
- mayenin qeyri-nyuton xüsusiyyətləri ikinci sinif modeli istifadə edərkən özünü daha çox büruzə verir.

Örtük daxilində mayenin hərəkəti zamanı dalğaların oxa qeyri-simmetrik yayılması halında örtükdə yayılan və burulğan dalğaların sürəti arasındakı fərq yaranmış dalğaların sayının müxtəlif qiymətlərində çox cüzdür. Bu zaman hər iki dalğanın sürəti həcmdəki qabarcıqların miqdarı artdıqca, demək olar ki, üst-üstə düşür.

Örtük daxilində mayenin oxa qeyri-simmetrik dalğavari hərəkəti zamanı mayenin sıxlığının dəyişməsi örtükdə yayılan dalğaların tezliyinə təsir etmir, sürət isə sıxlığın artması ilə 10,9% azalır. Sıxlığın dəyişməsi burulğan dalğaların tezliyinə təsir etmir, sürəti 10,8% azalır. Mayədə yayılan dalğaların sürəti sıxlığın artması ilə orta hesabla 6% azalır.

## ƏDƏBİYYAT

1. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задача упругости / М.: Наука, 1979, 320 с.
2. Амензаде Р.Ю. Волны в неоднородной трубке с протекающей двухфазной жидкостью // Механика композитных материалов. 2003, т.39, №4, с.555-566.
3. Амензаде Р.Ю., Гурбанов С.А. Волны в многослойной вязко-упругой трубе, содержащей жидкость // Bakı Universitetinin Xəbərləri, 1997, №1, с. 155-162
4. Педли Т.Ж. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов / М.: Мир, 1983, 400 с.
5. Aliev A.B. Waves in the liquid proceeding in the elastic tube considering viscoelastic friction of the environment // Science And World International Scientific journal №12, Volgograd, 2017, p. 8-10
6. Aliev A.B. On the motion of waves in multilayer elastic tube, containing viscoelastic fluid // Science And World International Scientific journal №12, Volgograd, 2017, p. 10-12
7. Aliev A.B. The exact solution of a problem on pulsating flow of a fluid in a deformable tube // Science And World International Scientific journal №12, Volgograd, 2017, p.12-1
8. Aliev G.A. Pulsating flow of bubble liquid in a visco-elastic tube non homogeneous in length// АМЕА-nın xəbərləri, Bakı, 2005, XXV, №1, s. 153-159

## **ВЯЗКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ УПРУГОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ВЯЗКОЙ УПРУГОЙ ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ**

**К.Р.РАГИМОВА, А.Б.АЛИЕВ**

## РЕЗЮМЕ

В работе исследуется пульсирующее течение вязко-упругой несжимаемой жидкости в полубесконечной вязко-упругой трубке переменного кругового сечения. Решение задачи сводится к решению сингулярной краевой задачи Штурма-Лиувилля. В простейшем случае выявлено влияние реологии жидкости на волновые характеристики.

**Ключевые слова:** волна, вязкая жидкость, упругая трубка, скорость волны, затухание.

**VISCOUS FLOW OF VISCOUS ELASTIC INCOMPRESSIBLE FLUID  
IN A SEMI-INFINITE VISCOUS ELASTIC, VARIABLE CROSS-SECTIONAL TUBE**

**K.R.RAHIMOVA, A.B.ALIYEV**

**SUMMARY**

The impulsive stream of the none-pressable liquid in the half-infinite viscous-elastic pipe with variable profile is investigated. The solution of the problem is reduced to the solution of the singular boundary Sturm-Luivill problem. In one simple case the influence of the reology of the liquid on the wave characteristics.

**Keywords:** wave, viscous liquid, elastic tube, velocity of the waves, attenuation.