BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2021

PACS: 03.65.-w, 03.65.Pm, 03.65.Ge, 03.65.Fd

KLEYN–QORDON TƏNLİYİNİN ÜMUMİLƏŞMİŞ VUD–SAKSON POTENSİALI ÜÇÜN HƏLLİ

V.H.BƏDƏLOV
Fizika Problemləri İnstitutu, Bakı Dövlət Universiteti
badalovvatan@yahoo.com

İşdə ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı üçün Pekeris yaxınlaşmasının köməyilə radial Kleyn-Qordon tənliyinin analitik həlləri araşdırılmışdır. İxtiyari l *- halı üçün Nikiforov-Uvarov metodundan istifadə etməklə enerjinin məxsusi qiymətləri və radial dalğa funksiyaları tapılmışdır. Həmçinin potensial çuxurun* V_0 *və* W *dərinliklərindən, radial* n *və orbital* l *kvant ədədlərindən və* R_0 , a *parametrlərindən asılı məhdud sayda enerji spektri müəyyən edilmişdir.*

Açar sözlər: Kleyn-Qordon tənliyi, Ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı, Pekeris yaxınlaşması

Nəzəri fizikanın və eləcə də kvant mexanikasının əsas məsələlərindən biri də bəzi fiziki maraq kəsb edən müəyyən tip potensiallar üçün dalğa tənliklərinin - Şredinger, Kleyn-Qordon və Dirak tənliklərinin analitik həll edilməsidir. Belə ki, dalğa tənliklərini həll edərək tapılan dalğa funksiyalarından kvant sistemləri haqqında mühüm məlumatları müəyyən etmək mümkündür. Bu nöqteyi-nəzərdən dalğa tənliklərinin analitik həlli ciddi əhəmiyyət kəsb edir. Hal-hazırda yüksək texnologiyada - kvant nöqtələrinin alınması və onların idarə olunması nəzəri və tətbiqi fizikanın aktual və ən mühüm problemlərindəndir. Beləliklə, müxtəlif tip potensial sahələr üçün enerji spektri praktiki maraq kəsb etdiyindən ixtiyari parameterə nəzərən enerjinin məxsusi qiymətlərinin xassələrinin öyrənilməsi çox vacib və aktualdır.

Ümumiləşmiş Vuds-Sakson potensialı həcmi (standart) Vuds - Sakson potensialı ilə səth Vuds-Sakson potensialının cəminə bərabərdir [1]:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1+e^{\frac{r-R_0}{a}}} - \frac{We^{\frac{r-R_0}{a}}}{\left(1+e^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^2}, \qquad (1)$$

burada V_0 , W potensial çuxurların dərinliyi, R_0 -potensialın eni və ya nüvənin radiusu, a - parametri isə səth təbəqəsinin qalınlığı və o, ionlaşma enerjisinin təcrübi qiyməti ilə müəyyən olunur. Ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialında səth hissəsi əsasən səthə yaxın oblastda əlavə potensial çuxur yaradır ki, bu da nüvə reaksiyalarında elastiki səpilmələrin izahında çox əhəmiyyətli yer tutur.

Vuds - Sakson tipli potensialları üçün orbital kvant ədədinin $l \neq 0$ ixtiyari qiymətində dalğa tənlikləri dəqiq həll oluna bilmir. Orbital kvant ədədinin $l \neq 0$ halında dalğa tənliklərinin təqribi analitik həllini tapmaq üçün bir neçə yaxınlaşma var ki, onlardan ən çox geniş istifadə ediləni Pekeris tərəfindən təklif olunan yaxınlaşmadır [2]. Pekeris yaxınlaşması mərkəzəqaçma potensialının nüvələr arası məsafəsindən asılı olub, ikinci tərtibə qədər hədləri nəzərə almaqla eksponensiallara görə sıraya ayrılmaya əsaslanır. İlk dəfə Pekeris yaxınlaşmasında Nikiforov-Uvarov metodunun köməyi ilə orbital kvant ədədinin ixtiyari $l \neq 0$ qiymətində Vuds - Sakson tipli potensiallar üçün radial Şredinger və radial Kleyn - Qordon tənlikləri analitik həll olunmuş, enerjinin məxsusi qiymətləri və məxsusi funksiyaları tapılmışdır [4-7]. Bu işlərdə ixtiyari l - halında $V_l(r)$ mərkəzəqaçma potensialı üçün aşağıdakı approksimasiya sxemi – Pekeris yaxınlaşması təklif edilmişdir:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{R_0^2}\left(C_0 + \frac{C_1}{1+\mathrm{e}^{\frac{r-R_0}{a}}} + \frac{C_2}{\left(1+\mathrm{e}^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^2}\right). \qquad (2)$$

Belə ki, [4, 5] işlərində $R_0\,, a$ spesifik potensial parametrlərdən asılı olan $C_0\,, C_1\,, C_2$ kəmiyyətləri (2) münasibətinin hər iki tərəfini nüvənin səthi yaxınlığında - $r = R_0$ nöqtəsi ətrafında Teylor sırasına ayırmaqla müqayisədən təyin olunan parametrlərdir. [6] və [7] – də isə uyğun olaraq ixtiyari l halında effektiv Vuds-Sakson və ümumiləşmiş Vuds - Sakson potensialının $r = r_e$ minimum nöqtəsi ətrafında müəyyən olunan $C_0\,, C_1\,, C_2$ approksimasiya parametrləri əsasında $V_l(r)$ mərkəzəqaçma potensialına (2) Pekeris yaxınlaşmasını tətbiq etməklə Nikiforov - Uvarov və Supersimmetrik kvant mexanikası metodlarının köməyi ilə D - ölçülü radial Şredinger tənliyi analitik həll edilmişdir.

İşdə ümumiləşmiş Vuds - Sakson potensialı üçün radial Kleyn – Qordon tənliyini analitik həll edərək enerji spektri və dalğa funksiyası tapılmışdır. Hesablamalar ixtiyari l halında (1) ümumiləşmiş Vuds - Sakson potensialın $r = r_e$ minimum nöqtəsi ətrafında müəyyən olunan $C_0\,, C_1\,, C_2$ approksimasiya parametrləri əsasında $V_l(r)$ mərkəzəqaçma potensialına (2) Pekeris yaxınlaşmasını tətbiq etməklə Nikiforov-Uvarov metodunun köməyi ilə aparılmışdır.

Radial Kleyn-Qordon tənliyinin həlli

Sferik simmetrik skalyar $S(r)$ və vektor $V(r)$ potensial sahələrdə spini sıfra bərabər olan zərrəcik üçün stasionar Kleyn-Qordon tənliyi aşağıdakı kimidir [8]:

$$\nabla^2\psi(r\,,\theta\,,\varphi) + \frac{1}{\hbar^2 c^2}\left[(E - V(r))^2 - (Mc^2 + S(r))^2\right]\psi(r\,,\theta\,,\varphi) = 0\,, \qquad (3)$$

burada M – zərrəciyin kütləsi, r - radius, θ - polyar bucaq, φ - azimutal bucaq, $\hbar$ - Plank sabiti, c – işığın sürətidir. Laplas operatoru

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla_r^2 + \frac{\nabla_{\theta,\varphi}^2}{r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2} \quad (4)$$

olduğundan (3) tənliyinin həlli sferik koordinat sistemində

$$\psi_{nlm}(r\,,\theta\,,\varphi) = \frac{u_{nl}(r)}{r} Y_{lm}(\theta\,,\varphi) \quad (5)$$

şəklində axtarılır. Verilmiş $Y_{lm}(\theta\,,\varphi)$ sferik funksiyası üçün

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta\,,\varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta\,,\varphi) \quad (6)$$

tənliyi ödənilir, burada l - orbital kvant ədədi və m isə maqnit kvant ədədidir.

(4) - (6) ifadələrini (3) tənliyində yerinə yazıb və müəyyən çevirmələrdən sonra $u(r)$ radial funksiya üçün aşağıdakı tənlik alınır:

$$\frac{d^2 u_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{1}{\hbar^2 c^2}\left[\left(E - V(r)\right)^2 - \left(Mc^2 + S(r)\right)^2 - \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{r^2}\right] u_{nl}(r) = 0, \quad (7)$$

burada $0 \le r < \infty -$ dir.

Skalyar və vektor potensialları ümumiləşmiş Vuds - Sakson potensialına bərabər $S(r) = V(r) = V_{GWS}(r)$ olduqda (7) tənliyi aşağıdakı şəklə düşür:

$$\frac{d^2 u_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{1}{\hbar^2 c^2}\left[E^2 - M^2 c^4 - 2(E + Mc^2)V(r) - \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{r^2}\right] u_{nl}(r) = 0\,, \quad (8)$$

Orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətində Nikiforov-Uvarov, asimptotik iterasiya və s. üsullardan istifadə etməklə bu potensial üçün (8) tənliyini analitik həll etmək mümkün deyildir və buna səbəb mərkəzəqaçma potensialıdır, yəni

$$V_l(r) = \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{r^2}\;. \quad (9)$$

Bu məqsədlə yeni $x = \frac{r-R_0}{R_0}$ dəyişənini daxil edib $r = R_0(1+x)$ orbital mərkəzəqaçma $V_l(r)$ potensialını, ümumiləşmiş Vud-Sakson $V(r)$ potensialının $\frac{dV(r)}{dr} = 0$ ekstremum şərtindən alınan $e^{\frac{r-R_0}{a}} = e^{\alpha x} = \frac{W-V_0}{W+V_0}$ tənliyini ödəyən, yəni onu (1) ümumiləşmiş Vud-Sakson $V(r)$ potensialının $x = x_e \equiv x_{min} = \frac{1}{\alpha} ln\left(\frac{W-V_0}{W+V_0}\right)$ minimum nöqtəsi ətrafında Teylor sırasına ayıraq:

$$V_l(r) = \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{r^2} = \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{R_0^2}\frac{1}{(1+x)^2} =$$

$$= \delta\left[\frac{1}{(1+x_e)^2} - \frac{2}{(1+x_e)^3}(x - x_e) + \frac{3}{(1+x_e)^3}(x - x_e)^2 + \cdots\right] \quad (10)$$

burada $\delta = \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{R_0^2}$-dir. Qeyd edək ki, $e^{\alpha x} = \frac{W-V_0}{W+V_0}$ münasibətinə əsasən $e^{\alpha x} > 0$ olduğundan $W > V_0$ və ya $W < -V_0$ alınır. Əgər bu şərt ödənməzsə, ümumiləşmiş Vud-Sakson $V(r)$ potensialının minimum nöqtəsi olmur. Pekeris approksimasiyasına görə V_l(r) potensialı aşağıdakı kimi götürülür [2, 4-6]:

$$\tilde{V}_l(r) = \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{R_0^2}\left(C_0 + \frac{C_1}{1+e^{\alpha x}} + \frac{C_2}{(1+e^{\alpha x})^2}\right)\;, \quad (11)$$

burada $\alpha = R_0/a$ və $\delta = \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{R_0^2}$-dir.

$\tilde{V}_l(r)$ potensialını $x = x_e = x_{min}$ $(r = r_e = r_{min})$ minimum nöqtəsi ətrafında Teylor sırasına ayıraq:

$$\tilde{V}_l(r) = \delta\left\{C_0 + \frac{C_1}{1+e^{\alpha x_e}} + \frac{C_2}{(1+e^{\alpha x_e})^2} - \left(\frac{\alpha C_1 e^{\alpha x_e}}{(1+e^{\alpha x_e})^2} + \frac{2\alpha C_2 e^{\alpha x_e}}{(1+e^{\alpha x_e})^3}\right)(x - x_e) - \right.$$
$$\left. -\left(\frac{\alpha^2 C_1 e^{\alpha x_e}(1-e^{\alpha x_e})}{2(1+e^{\alpha x_e})^3} + \frac{\alpha^2 C_2 e^{\alpha x_e}(1-2e^{\alpha x_e})}{(1+e^{\alpha x_e})^4}\right)(x-x_e)^2 + \cdots\right\} \quad (12)$$

(10) və (12) ifadələrində x - in eyni tərtibli uyğun hədlərinin müqayisəsindən $C_0\,, C_1\,, C_2$ sabitlərinin təyini üçün aşağıdakı cəbri tənliklər sistemini alarıq:

$$\begin{cases} C_0 + \dfrac{C_1}{1+e^{\alpha x_e}} + \dfrac{C_2}{(1+e^{\alpha x_e})^2} = \dfrac{1}{(1+x_e)^2} \\ \dfrac{\alpha C_1 e^{\alpha x_e}}{(1+e^{\alpha x_e})^2} + \dfrac{2\alpha C_2 e^{\alpha x_e}}{(1+e^{\alpha x_e})^3} = \dfrac{2}{(1+x_e)^3} \\ \dfrac{\alpha^2 C_1 e^{\alpha x_e}(1-e^{\alpha x_e})}{2(1+e^{\alpha x_e})^3} + \dfrac{\alpha^2 C_2 e^{\alpha x_e}(1-2e^{\alpha x_e})}{(1+e^{\alpha x_e})^4} = -\dfrac{3}{(1+x_e)^3} \end{cases} \quad (13)$$

Bu cəbri tənliklər sistemini həll edərək - nəticədə $C_0\,, C_1\,, C_2$ sabitləri üçün aşağıdakı ifadələri taparıq:

$$\begin{cases} C_0 = \dfrac{1}{(1+x_e)^2} + \dfrac{(1+e^{\alpha x_e})^2}{\alpha e^{\alpha x_e}(1+x_e)^3}\left[\dfrac{e^{-\alpha x_e} - 3}{1+e^{\alpha x_e}} + \dfrac{3e^{-\alpha x_e}}{\alpha(1+x_e)}\right] \\ C_1 = \dfrac{2(1+e^{\alpha x_e})^2}{\alpha e^{\alpha x_e}(1+x_e)^3}\left[2 - e^{-\alpha x_e} - \dfrac{3(1+e^{-\alpha x_e})}{\alpha(1+x_e)}\right] \\ C_2 = \dfrac{(1+e^{\alpha x_e})^3}{\alpha e^{\alpha x_e}(1+x_e)^3}\left[e^{-\alpha x_e} - 1 + \dfrac{3(1+e^{-\alpha x_e})}{\alpha(1+x_e)}\right] \end{cases} \quad (14)$$

Radial Kleyn-Qordon tənliyinin (9) münasibətilə verilmiş $V_l(r)$ mərkəzəqaçma potensialı üçün həll etmək əvəzinə Pekeris yaxınlaşmasından alınmış (11) münasibətilə təyin olunan $\tilde{V}_l(r)$ mərkəzəqaçma potensialında yeni radial Kleyn-Qordon tənliyini həll edək. Beləliklə, Pekeris approksimasiyasına əsasən (8) tənliyində $V_l(r)$ yerinə $\tilde{V}_l(r)$ yazsaq, alarıq:

$$\frac{d^2u_{nl}(r)}{dr^2} + \left[\frac{E^2 - M^2c^4}{\hbar^2c^2} - \frac{l(l+1)}{R_0^2}C_0 + \frac{\dfrac{2(E+Mc^2)}{\hbar^2c^2}(V_0+W) - \dfrac{l(l+1)}{R_0^2}C_1}{1+e^{\frac{r-R_0}{a}}} - \frac{\dfrac{2(E+Mc^2)W}{\hbar^2c^2} + \dfrac{l(l+1)C_2}{R_0^2}}{\left(1+e^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^2}\right]u_{nl}(r) = 0\,. \quad (15)$$

Yeni $z = \frac{1}{1+e^{\frac{r-R_0}{a}}}$; $0 \le z \le 1$ dəyişənini daxil etsək, (15) tənliyi

$$\frac{d^2u_{nl}(z)}{dz^2} + \frac{1-2z}{z(1-z)}\frac{du_{nl}(z)}{dz} + \frac{-\varepsilon^2 + \beta^2 z - \gamma^2 z^2}{z^2(1-z)^2}u_{nl}(z) = 0\ , \quad (16)$$

şəklə düşər, burada

$$\varepsilon^2 = -\left(\frac{E^2 - M^2c^4}{\hbar^2c^2} - \frac{l(l+1)C_0}{R_0^2}\right)a^2 > 0\,, \tag{17}$$

$$\beta^2 = \left(\frac{2(E + Mc^2)(V_0 + W)}{\hbar^2c^2} - \frac{l(l+1)C_1}{R_0^2}\right)a^2 > 0\ , \tag{18}$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{2(E + Mc^2)W}{\hbar^2c^2} + \frac{l(l+1)C_2}{R_0^2}\right)a^2 > 0\ , \tag{19}$$

əlaqəli hallar üçün $\varepsilon > 0\ \ (|E| \leq Mc^2)$ olmalıdır.

Nikiforov-Uvarov metoduna [3] əsasən (16) tənliyindən

$$\sigma(z) = z(1-z);\ \ \tilde{\tau}(z) = 1 - 2z\,;\ \tilde{\sigma}(z) = -\varepsilon^2 + \beta^2 z - \gamma^2 z^2\,, \tag{20}$$

alınır. Belə ki, $\pi(z)$ funksiyası (20) və $\sigma'(z) = 1 - 2z$ əsasən

$$\pi(z) = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - (\beta^2 - k)z + (\gamma^2 - k)z^2} \tag{21}$$

olur. Sabit k parametri, kökaltı ifadənin tam kvadrata malik olması, yəni onun diskriminantının sıfıra bərabər olması şərtindən tapılır:

$$k = -\left(\varepsilon \mp \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)^2 + \gamma^2\ . \tag{22}$$

Beləliklə, hər bir k üçün iki mümkün $\pi(z)$ funksiyası vardır:

$$\pi(z) = \pm\begin{cases}\left(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)z - \varepsilon\ \text{ gr }\ k = -\left(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)^2 + \gamma^2 \\ \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)z - \varepsilon\ \text{ gr }\ k = -\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)^2 + \gamma^2\end{cases} \tag{23}$$

NU metoduna [3] əsasən $\pi(z)$ polinomunun (23) dörd mümkün formasından eləsini seçirik ki, bu forma polinom üçün $\tau(z)$ funksiyasının törəməsi mənfidir:

$$\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z) = -2\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} + 1\right)z + 2\varepsilon + 1\ ;$$

$$\tau'(z) = -2\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} + 1\right) < 0$$

və kök $(0\,,1)$ intervalında yerləşir, yəni $\tau'(z) < 0\,,\ 0 \leq z \leq 1\,.$ Buna görə $\pi(z)$ və $\tau(z)$ funksiyaları aşağıdakı formada olur:

$$\pi(z) = -\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)z + \varepsilon \tag{24}$$

$$\tau(z) = -2\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} + 1\right)z + 2\varepsilon + 1 \tag{25}$$

$$k = -\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)^2 + \gamma^2 \tag{26}$$

Onda $\lambda = k + \pi'(z)$ sabiti

$$\lambda = -\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)^2 + \gamma^2 - \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right) \tag{27}$$

olar. NU metoduna [3] əsasən λ_n - in digər alternativ təyininə görə

$$\lambda = \lambda_n = 2\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)n + n(n+1) \tag{28}$$

olur. (27) və (28) münasibətlərin müqayisəsindən

$$-\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)^2 + \gamma^2 - \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)$$
$$= 2\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)n + n(n+1)$$

alarıq:

$$\left(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-\beta^2+\gamma^2}+n+\frac{1}{2}\right)^2-\gamma^2-\frac{1}{4}=0\,.$$

Yuxarıdakı münasibətdən

$$\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-\beta^2+\gamma^2}=n' \qquad (29)$$

alınır, burada

$$n'=\frac{\sqrt{1+4\gamma^2-1}}{2}-n \qquad (30)$$

və n radial kvant ədədidir $(n=0\,,1\,,2\,,\cdots)$. Beləliklə, (30) münasibətindən taparıq:

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(n'+\frac{\beta^2-\gamma^2}{n'}\right) \qquad (31)$$

Əlaqəli halların $E<0$ və dalğa funksiyasının sonlu olması $\varepsilon>0\,,\varepsilon^2-\beta^2+\gamma^2>0$ şərtlərindən $n'>0$ və $|\beta^2-\gamma^2|<n'^2$ alınır.

Uyğun olaraq $\varepsilon\,,\beta$ və γ - nın (17)-(19) ifadələrini (31) – də yerinə yazıb müəyyən çevrilmələrdən sonra enerji spektrinin təyini üçün aşağıdakı enerji səviyyələri tənliyini alırıq:

$$E^2-M^2c^4+V_0E+Mc^2V_0-\frac{\hbar^2c^2l(l+1)}{R_0^2}\left(C_0+\frac{C_1+C_2}{2}\right)$$

$$+\frac{\hbar^2c^2}{16a^2}\left[\left(\sqrt{1+\frac{8(E+Mc^2)a^2W}{\hbar^2c^2}+\frac{4l(l+1)a^2C_2}{R_0^2}}-2n-1\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{16\left(\frac{2(E+Mc^2)a^2V_0}{\hbar^2c^2}-\frac{l(l+1)a^2(C_1+C_2)}{R_0^2}\right)^2}{\left(\sqrt{1+\frac{8(E+Mc^2)a^2W}{\hbar^2c^2}+\frac{4l(l+1)a^2C_2}{R_0^2}}-2n-1\right)^2}\right]=0. \qquad (32)$$

Bu irrasional tənlikdən potensialın V_0 və W dərinliklərindən, potensialın R_0 enindən, səthin a qalınlığından, radial n və orbital l kvant ədədlərindən asılı məhdud sayda enerji spektri tapılır.

Ümumiləşmiş Vuds-Sakson potensialı sahəsində radial dalğa funksiyasını təyin etmək üçün $\sigma(z)\,,\tau(z)\,,\pi(z)$ funksiyalarının ifadələrini

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\frac{\pi(z)}{\sigma(z)} \quad \text{v} \quad \frac{\rho'(z)}{\rho(z)}=\frac{\tau(z)-\sigma'(z)}{\sigma(z)}$$

tənliklərində nəzərə alaraq - birinci tərtib adi diferensial tənlikləri həll etsək,

$(0,1)$ intervalında sonlu $\varphi(z)$ və $\rho(z)$ funksiyalarını taparıq:

$$\varphi(z) = z^{\varepsilon}(1-z)^{\sqrt{\varepsilon^2-\beta^2+\gamma^2}}, \tag{33}$$

$$\rho(z) = z^{2\varepsilon}(1-z)^{2\sqrt{\varepsilon^2-\beta^2+\gamma^2}}. \tag{34}$$

Çəki funksiyasının aşkar şəkli və Rodrigues münasibətinə [3] əsasən radial dalğa funksiyasının ikinci hissəsi

$$y_n(z) = B_n z^{-2\varepsilon}(1-z)^{-2\sqrt{\varepsilon^2-\beta^2+\gamma^2}} \frac{d^n}{dz^n}\left[z^{n+2\varepsilon}(1-z)^{n+2\sqrt{\varepsilon^2-\beta^2+\gamma^2}}\right] \tag{35}$$

olar, burada $B_n = \frac{1}{n!}$ - normallaşma sabitidir [9]. Nəticədə, $y_n(z)$ funksiyasının Yakobi çoxhədlisi ilə verildiyi müəyyən olunur:

$$y_n(z) = P_n^{\left(2\varepsilon, 2\sqrt{\varepsilon^2-\beta^2+\gamma^2}\right)}(1-2z), \tag{36}$$

burada

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2z) = \frac{1}{n!} z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n}\left[z^{n+\alpha}(1-z)^{n+\beta}\right] \tag{37}$$

Yakobi polinomudur. Beləliklə, radial dalğa funksiyasi

$$u_{nl}(z) = C_{nl} z^{\varepsilon}(1-z)^{\sqrt{\varepsilon^2-\beta^2+\gamma^2}} P_n^{\left(2\varepsilon, 2\sqrt{\varepsilon^2-\beta^2+\gamma^2}\right)}(1-2z) \tag{38}$$

olar, burada C_{nl} normalanma sabitidir.

Enerji səviyyələrinin (32) tənliyində qeyri-relyativistik limit halına $(c \to \infty)$ keçsək, yəni $E - Mc^2 \to E, E + Mc^2 \to 2Mc^2, V_0 \to \frac{V_0}{2}, W \to \frac{W}{2}$ çevrilmələrini aparsaq, onda ümumiləşmiş Vuds-Sakson potensialı üçün qeyri-relyativistik E_{nl} enerji spektrinin ifadəsi alınır [7]:

$$E_{nl} = -\frac{V_0}{2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2MR_0^2}\left(C_0 + \frac{C_1 + C_2}{2}\right) - \frac{\hbar^2}{32Ma^2}\left[\left(\sqrt{1 + \frac{8Ma^2W}{\hbar^2} + \frac{4l(l+1)a^2C_2}{R_0^2}} - 2n - 1\right)^2 + \frac{16\left(\frac{2Ma^2V_0}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)a^2(C_1+C_2)}{R_0^2}\right)^2}{\left(\sqrt{1 + \frac{8Ma^2W}{\hbar^2} + \frac{4l(l+1)a^2C_2}{R_0^2}} - 2n - 1\right)^2}\right] \tag{39}$$

Nəticə

Ümumiləşmiş Vuds-Sakson potensialı sahəsində mərkəzəqaçma potensialına Pekeris yaxınlaşması sxemini tətbiq edərək orbital l kvant ədədinin ixtiyari qiymətində Nikiforov-Uvarov metodunun köməyi ilə Kleyn - Qordon tənliyinin əlaqəli hallarının enerjisinin məxsusi qiymətləri və uyğun məxsusi funksiyaların analitik ifadələri tapılmışdır. Belə ki, potensialın V_0 və W dərinliklərindən, radial n və orbital l kvant ədədlərindən, R_0 , a parametrlərindən asılı məhdud sayda enerji spektri müəyyən edilmişdir. Həmçinin relyativistik enerji səviyyələri tənliyində $c \to \infty$ olduqda, yəni qeyri-relyativistik limit halında, ümumiləşmiş Vuds-Sakson potensialı üçün qeyri-relyativistik E_{nl} enerji spektrinin ifadəsi alınmışdır [7].

ƏDƏBİYYAT

1. R.D. Woods and D.S. Saxon, Diffuse surface optical model for nucleon-nuclei scattering, Physical Review, Vol. **95**, No. 2, pp. 577-578, 1954.
2. C.L. Pekeris, The rotation-vibration coupling in diatomic molecules, Physical Review, Vol. **45**, No. 2, pp. 98-103, 1934.
3. А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров, Специальные функции математической физики, М.: Наука, 1984, 344 с.
4. V.H. Badalov, H.I. Ahmadov and A.I. Ahmadov, Analytical solutions of the Schrödinger equation with the Woods - Saxon potentials for arbitrary l - state, International Journal of Modern Physics E, Vol. **18**, No. 3, pp. 631-641, 2009.
5. V.H. Badalov, H.I. Ahmadov and S.V. Badalov, Any l - state analytical solutions of the Klein – Gordon equation for the Woods - Saxon potential, International Journal of Modern Physics E, Vol. **19**, No. 7, pp. 1463-1475, 2010.
6. V.H. Badalov, The bound state solutions of the D - dimensional Schrödinger equation for the Woods - Saxon potential, International Journal of Modern Physics E, Vol. **25**, No. 1, 1650002/1-24, 2016.
7. V.H. Badalov, B. Baris, K. Uzun, Bound states of the D - dimensional Schrödinger equation for the generalized Woods - Saxon potential, Modern Physics Letters **A**, Vol. 34, No. 14, 1950107/1-20, 2019.
8. W. Greiner, Quantum Mechanics, Berlin, Springer, 2001, 512 p.
9. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, М.: Наука, том 2, 1974, 296 с.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ПОТЕНЦИАЛА ВУДСА–САКСОНА

В.Г.БАДАЛОВ

РЕЗЮМЕ

В представленной работе были изучены аналитические решения радиального уравнения Клейна-Гордона для обобщенного потенциала Вудса-Саксона с помощью аппроксимация Пекериса. С использованием метода Никифорова-Уварова были найдены собственные значения энергии и волновой функции для произвольного l состояния. Также, были определены конечные числа энергетического спектра в зависимости от глубины потенциалов V_0 и W, радиального n и орбитального l квантовых чисел и параметров R_0 , a .

Ключевые слова: Уравнения Клейна-Гордона, Обобщенный потенциал Вудса-Саксона, Связанные состояния

SOLUTİON OF THE KLEYN–GORDON EQUATION FOR THE GENERALIZED WOODS–SAXON POTENTIAL

V.H.BADALOV

SUMMARY

In the present work, the analytical solutions of the radial Kleyn-Gordon equation have been studied for the generalized Woods-Saxon potential by using the Pekeris approximation. The energy eigenvalues and radial wavefunctions were found for arbitrary l - state via the Nikiforov-Uvarov methods. Furthermore, a finite number energy spectrum depending on depths of the potential V_0 and W, the radial n and the orbital l quantum numbers and parameters R_0 , a was identified as well.

Keywords: Kleyn-Gordon equation, Generalized Woods-Saxon potential, Bound states