BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2022

RİYAZİYYAT

UOT 517. 97

SİMİN RƏQSLƏRİ TƏNLİYİNDƏ KİÇİK HƏDDİN ƏMSALININ TAPILMASI MƏSƏLƏSİ

[1]H.F.QULİYEV, [2]G.Q.İSMAYILOVA
[1]Bakı Dövlət Universiteti
[2]Sumqayıt Dövlət Universiteti
hamletquliyev51@gmail.com
gunay_ismayilova_83@mail.ru

Riyazi fizika tənliklərində tərs məsələlərin özünəməxsus yeri var. Bu tərs məsələlər arasında tənliyin əmsallarının tapılması məsələləri xüsusilə fərqlənir. Belə məsələlərdə tənliyin həlli ilə yanaşı əmsallar da naməlum olur [1,2].

İşdə simin rəqslər tənliyinin kiçik həddinin əmsalının tapılması məsələsi araşdırılır. Bu məsələ optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir və alınan məsələyə optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin üsulları tətbiq olunur. Baxılan məsələdə optimal idarəedicinin varlığı, funksionalın Freşe mənada diferensiallanan olması və optimallıq şərti araşdırılır.

Açar sözlər: rəqs tənliyi, kiçik həddin əmsalı, tərs məsələ, optimal idarəetmə

1. Məsələnin qoyuluşu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i(t) h_i(x) u = f(x,t), (x,t) \in Q = (0,\ell)\times(0,T), \qquad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), \ 0 \le x \le \ell, \qquad (2)$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \ 0 \le t \le T, \qquad (3)$$

$$u(x_i,t) = g_i(t), \ 0 \le t \le T, \ i = 1,...,n \qquad (4)$$

münasibətlərindən $(u(x,t),\upsilon(t)) \in W_2^1(Q)\times(L_\infty(0,T))^n$ cütünün tapılması məsələsinə baxaq, burada $\ell > 0, T > 0$ – verilmiş ədədlər, $f \in L_2(Q), u_0 \in W_2^1(0,\ell)$, $u_1 \in L_2(0,\ell), g_i \in L_2(0,T), h_i \in L_\infty(0,\ell), i = 1,...,n$ – verilmiş funksiyalar, $x_i \in (0,\ell)$, $i = 1,...,n$ - verilmiş müxtəlif nöqtələrdir; $\upsilon(t) = (\upsilon_1(t),...,\upsilon_n(t))$ - vektor funksiyadır.

$\upsilon(t)$ vektor-funksiyası verildikdə (1)-(3) məsələsi Q oblastında düz məsələ olur. (1)-(4) məsələsi isə (1)-(3) məsələsinə tərs məsələ adlandırılır. (1)-(4) tərs məsələsini aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə gətirək:

$V = \{\upsilon(t) \in (L_2(0,T))^n, \ \upsilon(t) = (\upsilon_1(t),...,\upsilon_n(t)) : \alpha_i \le \upsilon_i(t) \le \beta_i \ i = 1,...,n \ (0,T)$ -də sanki hər yerdə} sinfindən elə $\upsilon(t)$ vektor-funksiyasını tapmalı ki, o

$$J_0(\upsilon)=\frac{1}{2}\int_0^T\sum_{i=1}^n[u(x_i,t;\upsilon)-g_i(t)]^2dt \tag{5}$$

funksionalına (1)-(3) məhdudiyyətləri daxilində minimum qiymət versin, burada $u=u(x,t;\upsilon)$ – (1)-(3) məsələsinin $\upsilon=\upsilon(t)$ üçün həllidir, $\alpha_i,\beta_i,\alpha_i<\beta_i, i=1,...,n$ - verilmiş ədədlərdir. $\upsilon=\upsilon(t)$ vektor-funksiyasını idarəedici, V sinfini mümkün idarəedicilər sinfi adlandıraq. Qeyd edək ki, əgər $\min\limits_{\upsilon\in V}J_0(\upsilon)=0$ olarsa, onda (4) əlavə şərtləri ödənir.

(1)-(3), (5) məsələsini requlyarlaşdıraq: elə $\upsilon(t)\in V$ idarəedicisini tapmalı ki, o

$$J_\beta(\upsilon)=\frac{1}{2}\int_0^T\sum_{i=1}^n[u(x_i,t;\upsilon)-g_i(t)]^2dt+\frac{\beta}{2}\int_0^T\sum_{i=1}^n\left|\upsilon_i(t)-\omega_i(t)\right|^2dt \tag{6}$$

funksionalılna minimum versin, burada $\beta>0$ –verilmiş ədəd, $\omega(t)=(\omega_1(t),...,\omega_n(t))\in(L_2(0,T))^n$ - verilmiş vektor funksiyadır. Bu məsələni aşağıda (1)-(3), (6) məsələsi adlandıracağıq.

(1)-(3) sərhəd məsələsinin ümumiləşmiş həllinə baxacağıq. Hər bir qeyd olunmuş $\upsilon=\upsilon(t)\in V$ idarəedicisi üçün (1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həlli dedikdə $W_{2,0}^1(Q)$-dən olan elə $u=u(x,t;\upsilon)$ funksiyasını başa düşəcəyik ki, o $t=0$ –da $u_0(x)$-ə bərabər olsun və ixtiyari $\eta=\eta(x,t)\in W_{2,0}^1(Q), \eta(x,T)=0$ funksiyası üçün

$$\int_Q\left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sum_{i=1}^n\upsilon_i(t)h_i(x)u\eta\right]dxdt-\int_0^\ell u_1(x)\eta(x,0)dx=\int_Q f(x,t)\eta dxdt \tag{7}$$

inteqral eyniliyini ödəsin.

[4, s.209-215]-in nəticələrindən alınır ki, (1)-(3) məsələsinin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulmuş şərtlər daxilində bu məsələnin $W_{2,0}^1(Q)$ fəzasında yeganə ümumiləşmiş həlli var və həmin həll üçün

$$\|u\|_{W_2^1(Q)}\le c[\|u_0\|_{W_2^1(0,\ell)}+\|u_1\|_{L_2(0,\ell)}+\|f\|_{L_2(Q)}] \tag{8}$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Burada və sonralar c ilə qiymətləndirilən kəmiyyətlərdən və mümkün idarəedicilərdən asılı olmayan müxtəlif sabitləri işarə edəcəyik.

Qeyd 1. Qeyd edək ki, (1)-(3) məsələsinin belə ümumiləşmiş həlli həm də

$$U=\{u(x,t):u\in C[0,T];\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell),\ \frac{\partial u}{\partial t}\in C([0,T];L_2[0,\ell])\}$$

sinfinə daxildir və bu həlli $\overline{Q}$ -də kəsilməz hesab etmək olar [5, s.307].

2. Optimal idarəedicinin varlığı məsələsi

Teorem 1. Tutaq ki, (1)-(3), (6) məsələsinin verilənləri yuxarıda qoyulmuş şərtləri ödəyir. Onda $(L_2(0,T))^n$ fəzasının elə G sıx alt çoxluğu var ki, ixtiyari $\omega\in G$ üçün $\beta>0$ olduqda (1)-(3), (6) optimal idarəetmə məsələsinin yeganə həlli var.

İsbatı. $J_0(\upsilon)$ funksionalının V çoxluğunda $(L_2(0,T))^n$ fəzasının norması mənada kəsilməzliyini isbat edək.

Tutaq ki, $\delta\upsilon = \delta\upsilon(t)$ vektor funksiyası $\upsilon \in V$ elementinin elə artımıdır ki, $\upsilon + \delta\upsilon \in V$. $\delta u(x,t) = u(x,t;\upsilon + \delta\upsilon) - u(x,t;\upsilon)$ işarə edək.

Aydındır ki, $\delta u(x,t)$ funksiyası

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^{n}(\upsilon_i + \delta\upsilon_i)h_i\delta u = -u\sum_{i=1}^{n}\delta\upsilon_i h_i, (x,t) \in Q, \tag{9}$$

$$\delta u|_{t=0} = 0, \left.\frac{\partial \delta u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, 0 \le x \le \ell, \tag{10}$$

$$\delta u(0,t) = \delta u(\ell,t) = 0,\ 0 \le t \le T \tag{11}$$

sərhəd məsələsinin $W_{2,0}^1(Q)$–dən olan ümumiləşmiş həllidir.

(9)-(11) sərhəd məsələsinin $W_{2,0}^1(Q)$–dən olan ümumiləşmiş həlli $t=0$–da sıfra bərabərdir və ixtiyari $\eta = \eta(x,t) \in W_{2,0}^1(Q), \eta(x,T) = 0$ üçün o,

$$\int_Q \left[\frac{\partial \delta u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \delta u}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]dxdt = \int_Q \left[\sum_{i=1}^{n}(\upsilon_i + \delta\upsilon_i)h_i\delta u + u\sum_{i=1}^{n}\delta\upsilon_i h_i\right]\eta dxdt \tag{12}$$

inteqral eyniliyini ödəyir.

Göstərək ki, (9)-(11) məsələsinin həlli üçün

$$\|\delta u\|_{W_2^1(Q)} \le c\|\delta\upsilon\|_{(L_2(0,T))^n} \tag{13}$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Faedo-Qalyorkin üsulunu tətbiq edək. Tutaq ki, $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$–də fundamental sistemdir və $\int_0^\ell \varphi_k(x)\varphi_m(x)dx = \delta_k^m$, burada δ_k^m Kroneker simvoludur.

(9)-(11) məsələsinin təqribi həllərini

$$\delta u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\varphi_k(x)$$

kimi axtaraq, burada $c_k^N(t)$ əmsalları

$$\begin{gathered}\int_0^\ell \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial t}\varphi_m(x)dx + \int_0^\ell \frac{\partial \delta u^N}{\partial x}\frac{d\varphi_m(x)}{dx} = -\int_0^\ell \sum_{i=1}^{n}(\upsilon_i + \delta\upsilon_i)h_i\delta u^N\varphi_m(x)dx - \\ -\int_0^\ell u\sum_{i=1}^{n}h_i\delta\upsilon_i\varphi_m(x)dx,\ m = 1,..,N\end{gathered} \tag{14}$$

$$c_K^N(0) = 0,\ \left.\frac{dc_K^N(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0 \tag{15}$$

münasibətlərtindən təyin olunur.

(14) bərabərlikləri $c_K^N(t),\ k = 1,...,N$ naməlum funksiyaları üçün xətti ikitərtibli adi diferensial tənliklər sistemidir. Bu sistem $\frac{d^2c_K^N(t)}{dt^2}, k = 1,...,N$ –lərə nəzərən həll olunmuşdur. Qeyd edək ki, (14) sistemi (15) şərtləri daxilində birqiymətli həll olunandır və $\frac{d^2c_K^N(t)}{dt^2} \in L_2(0,T)$. (14) bərabərliklərinin hər birini öz

$\frac{d}{dt}c_m^N(t)$ funksiyasına vuraq və onları m-ə görə 1-dən N-ə qədər cəmləyək. Onda alarıq

$$\int_0^\ell \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}dx+\int_0^\ell \frac{\partial \delta u^N}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial t\partial x}dx=$$

$$=-\int_0^\ell \sum_{i=1}^n (\upsilon_i+\delta\upsilon_i)h_i\delta u^N\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}dx-\int_0^\ell u\sum_{i=1}^n \delta\upsilon_i h_i\cdot\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}dx.$$

Buradan verilənlər üzərinə qoyulmuş şərtlərdən çıxır ki,

$$\int_0^\ell\left[\left|\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial \delta u^N}{\partial x}\right|^2\right]dx\le c\int_0^t\int_0^\ell\left[\left|\delta u^N\right|^2+\left|\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}\right|^2\right]dxds+c\int_0^t\int_0^\ell u^2\sum_{i=1}^n\left|\delta\upsilon_i\right|^2dxds.$$

Qeyd 1-ə görə (1)-(3) məsələsinin $u=u(x,t)=u(x,t;\upsilon)$ qeyd olunmuş həlli U sinfinə daxildir və bu həll $\overline{Q}$–də məhduddur. Onda sonuncu bərabərsizlikdən alınır ki,

$$\int_0^\ell\left[\left|\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial \delta u^N}{\partial x}\right|^2\right]dx\le c\int_0^t\int_0^\ell\left[\left|\delta u^N\right|^2+\left|\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}\right|^2\right]dxds+c\int_0^T\sum_{i=1}^n\left|\delta\upsilon_i\right|^2dt.$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$-də normaların ekvivalentliyinə görə buradan çıxır ki,

$$\int_0^\ell\left[\left|\delta u^N\right|^2+\left|\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial \delta u^N}{\partial x}\right|^2\right]dx\le$$

$$\le c\int_0^t\int_0^\ell\left[\left|\delta u^N\right|^2+\left|\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial \delta u^N}{\partial x}\right|^2\right]dxds+c\int_0^T\sum_{i=1}^n\left|\delta\upsilon_i\right|^2dt.$$

Bu bərabərsizliyə Qronuol lemmasını tətbiq etsək, alarıq

$$\int_0^\ell\left[\left|\delta u^N\right|^2+\left|\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial \delta u^N}{\partial x}\right|^2\right]dx\le c\int_0^T\sum_{i=1}^n\left|\delta\upsilon_i\right|^2dt,\ \forall t\in[0,T].$$

Buradan t–yə görə 0-dan T–yə qədər inteqrallasaq

$$\left\|\delta u^N\right\|_{W_2^1(Q)}\le c\left\|\delta\upsilon\right\|_{(L_2(0,T))^n}$$

qiymətləndirməsini alarıq.

Bu bərabərsizliyə əsasən $\{\delta u^N\},\ N=1,2,...$ ardıcıllığından elə alt ardıcıllıq ayırmaq olar ki (onu da əvvəlki kimi işarə edirik), o $W_2^1(Q)$–də müəyyən $\delta u\in W_2^1(Q)$ elementinə zəif yığılsın. Norma hilbert fəzasında aşağıdan zəif yarımkəsilməz olduğundan $\{\delta u^N\}$ ardıcıllığının zəif limiti olan bu funksiyası üçün

$$\left\|\delta u\right\|_{W_2^1(Q)}\le c\left\|\delta\upsilon\right\|_{(L_2(0,T))^n}$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Beləliklə, (13) qiymətləndirməsi isbat olundu.
[4, s.70]-dəki daxilolma teoreminə görə $W_2^1(Q)$ fəzası $L_2(0,T)$-yə məhdud daxildir, ona görə (13) qiymətləndirməsindən çıxır ki,

$$\left\|\delta u(x_i,t)\right\|_{L_2(0,T)}\le c\left\|\delta u\right\|_{W_2^1(Q)}\le c\left\|\delta\upsilon\right\|_{(L_2(0,T))^n},\ i=1,...,n$$

Ona görə $\left\|\delta\upsilon\right\|_{(L_2(0,T))^n}\to 0$ olduqda $\left\|\delta u(x_i,t)\right\|_{L_2(0,T)}\to 0$. (16)

$J_0(\upsilon)$ funksionalının artımını

$$\Delta J_0(\upsilon) = J_0(\upsilon + \delta\upsilon) - J_0(\upsilon) =$$
$$= \int_0^T \sum_{i=1}^n [u(x_i,t;\upsilon) - g_i(t)]\delta u(x_i,t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i=1}^n \left|\delta u(x_i,t)\right|^2 dt$$

şəklində göstərək. Buradan və (16) münasibətindən $J_0(\upsilon)$ funksionalının V çoxluğunda $(L_2(0,T))^n$ fəzasının norması mənada kəsilməzliyi alınır.

Beləliklə, $J_0(\upsilon)$ funksionalı V çoxluğunda kəsilməz və aşağıdan məhduddur. V çoxluğu müntəzəm qabarıq $(L_2(0,T))^n$ banax fəzasında qapalı və məhduddur. Onda teorem 1-in hökmü [5]-dəki məlum teoremdən alınır. Teorem 1 isbat olundu.

3. (6) funksionalının diferensiallanması

İndi (6) funksionalının Freşe mənada diferensiallanan olduğunu göstərək.

Tutaq ki, $\psi = \psi(x,t;\upsilon)$ funksiyası

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^n \upsilon_i(t)h_i(x)\psi = -\sum_{i=1}^n [u(x_i,t;\upsilon) - g_i(t)]\delta(x - x_i),\ (x,t)\in Q, \tag{17}$$

$$\psi\big|_{t=T} = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\bigg|_{t=T} = 0,\ 0 \le x \le \ell,\ \psi(0,t) = \psi(\ell,t) = 0,\ 0 \le t \le T \tag{18}$$

qoşma sərhəd məsələsinin həllidir.

(17), (18) sərhəd məsələsinin $\upsilon \in V$ üçün ümumiləşmiş həlli dedikdə elə $\psi = \psi(x,t;\upsilon) \in W_{2,0}^1(Q)$ funksiyası başa düşülür ki, o $t = T$ olduqda sıfra bərabərdir və ixtiyari $\mu = \mu(x,t) \in W_{2,0}^1(Q),\ \mu(x,0) = 0$ üçün

$$\int_Q \left[-\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \upsilon_i(t)h_i(x)\psi\mu \right] dxdt =$$
$$= -\sum_{i=1}^n \int_0^T [u(x_i,t;\upsilon) - g_i(t)]\mu(x_i,t)dt \tag{19}$$

inteqral eyniliyini ödəyir.

Teorem 2. Tutaq ki, (1)-(3), (6) məsələsinin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulmuş şərtləri ödəmir. Onda (17), (18) qoşma məsələsinin $W_{2,0}^1(Q)$–də yeganə ümumiləşmiş həlli var.

İsbatı. Faedo-Qalyorkin üsulundan istifadə edək. $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$–də $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ fundamental sistemi olaraq $\left\{\sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\frac{\pi k}{\ell}x\right\}_{k=1}^\infty$ sistemini götürək.

(17),(18) məsələsinin təqribi həllini $\psi^N(x,t) = \sum_{k=1}^N c_K^N(t)\varphi_k(x)$ şəklində axtaraq, burada $c_K^N(t)$–lər

$$\int_0^\ell \frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2}\psi_m dx + \int_0^\ell \frac{\partial\psi^N}{\partial x}\cdot\frac{d\phi_m}{dx}dx = -\sum_{i=1}^n [u(x_i,t;\upsilon) - g_i(t)]\phi_m(x_i),$$
$$m = 1,\dots,N, \tag{20}$$

$$c_K^N(T)=0,\ \frac{dc_k(T)}{dt}=0 \tag{21}$$

münasibətlərindən təyin olunur.

(20) bərabərlikləri $\frac{d^2c_K^N(t)}{dt^2}$ –yə nəzərən həll olunmuş $c_k^N(t), k=1,...,N$ naməlum funksiyaları üçün ikitərtibli adi diferensial tənliklər sistemidir, $\sum_{i=1}^{m}[u(x_i,t;\upsilon)-g_i(t)]\varphi_m(x_i)$ sərbəst hədləri $L_2(0,T)$–yə daxildir. Bu sistem (21) şərtləri daxilində birqiymətli həll olunandır.

(20) bərabərliklərinin hər birini öz $\frac{dc_m^N(t)}{dt}$ funksiyasına vurub m-ə görə 1-dən N-ə qədər cəmləsək, alarıq:

$$\int_0^{\ell}\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2}\frac{\partial\psi^N}{\partial t}dx+\int_0^{\ell}\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t\partial x}dx=-\sum_{i=1}^{n}[u(x_i,t;\upsilon)-g_i(t)]\frac{\partial\psi^N(x_i,t)}{\partial t}$$

Buradan t-yə görə t-dən T-yə qədər inteqrallasaq, yaza bilərik:

$$\int_0^{\ell}\left[\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2\right]dx=2\int_t^T\sum_{i=1}^{n}[u(x_i,s;\upsilon)-g_i(s)]\frac{\partial\psi^N(x_i,s)}{\partial t}ds \tag{22}$$

(20) adi diferensial tənliklər sistemini (21) şərtləri daxilində $c_1^N(t),...,c_N^N(t)$ naməlum funksiyalarına nəzərən ardıcıl həll edərək və triqonometrik funksiyaların bəzi məlum xassələrindən istifadə edərək

$$\left|\frac{\partial\psi^N(x_i,t)}{\partial t}\right|\le c\int_0^{\ell}\left|\frac{\partial\psi^N(x_i,t)}{\partial x}\right|^2dx,\ i=1,2,...,n$$

olduğunu alarıq. Onda (22) bərabərliyindən

$$\int_0^{\ell}\left[\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2\right]dx\le c\int_t^T\sum_{i=1}^{n}\left|u(x_i,s;\upsilon)-g_i(s)\right|^2ds+$$
$$+c\int_t^T\int_0^{\ell}\left[\left|\psi^N(x,s)\right|^2+\left|\frac{\partial\psi^N(x,s)}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial\psi^N(x,s)}{\partial x}\right|^2\right]dxds$$

olduğunu alarıq. $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$–də normaların ekvivalentliyinə görə

$$\int_0^{\ell}\left[\left|\psi^N\right|^2+\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2\right]dx\le c\int_t^T\sum_{i=1}^{n}\left|u(x_i,s;\upsilon)-g_i(s)\right|^2ds+$$
$$+c\int_t^T\int_0^{\ell}\left[\left|\psi^N\right|^2+\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2\right]dxds$$

olar. Bu bərabərsizliyə Qronuol lemmasını tətbiq etsək,

$$\int_0^{\ell}\left[\left|\psi^N(x,t)\right|^2+\left|\frac{\partial\psi^N(x,t)}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial\psi^N(x,t)}{\partial x}\right|^2\right]dx\le c\int_0^T\sum_{i=1}^{n}\left|u(x_i,t;\upsilon)-g_i(t)\right|^2dt,\ \forall t\in[0,T]$$

və ya

$$\left\|\psi^N\right\|^2_{W_2^1(Q)}\le c\int_0^T\sum_{i=1}^{n}\left|u(x_i,t;\upsilon)-g_i(t)\right|^2dt. \tag{23}$$

olar.
Buradan $\{\psi^N_{(x,t)}\}$ ardıcıllığının $W_2^1(Q)$ –də məhdudluğu alınır və $N\to\infty$ olduqda $\{\psi^N(x,t)\}$ ardıcıllığının $W_2^1(Q)$ –də zəif limiti olan $\psi(x,t)$ funksiyasının (17), (18) məsələsinin həlli olunduğu alınır. Həllin yeganəliyi standart üsulla isbat olunur. Teorem 2 isbat olundu.

Qeyd edək ki, hilbert fəzasında norma aşağıdan zəif yarımkəsilməz olduğundan (23)-dən çıxır ki, $\psi(x,t)$ funksiyası üçün

$$\|\psi\|_{W_2^1(Q)} \le c\left(\int_0^T\sum_{i=1}^n |u(x_i,t;\upsilon)-g_i(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \tag{24}$$

qiymətləndirməsi doğrudur.
Burada (8) qiymətləndirməsini və $W_2^1(Q)$ -nün $L_2(0,T)$ –yə məhdud daxil olmasını nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\|\psi\|_{W_2^1(Q)} \le c[\|u_0\|_{W_2^1(0,\ell)}+\|u_1\|_{L_2(0,\ell)}+\|f\|_{L_2(Q)}+\sum_{i=1}^n\|g_i\|_{L_2(0,T)}]. \tag{25}$$

Bundan əlavə $\psi\in U$ olur.

Teorem 3. Tutaq ki, teorem 1-in şərtləri ödənir. Onda (6) funksionalı V də Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $\upsilon\in V$ nöqtəsində $\delta\upsilon$ artımlı diferensialı

$$\begin{aligned}\langle J'_\beta(\upsilon),\,\delta\upsilon\rangle &= \int_0^T\sum_{i=1}^n\Big(\int_0^\ell u(x,t)\psi(x,t)h_i(x)dx\Big)\delta\upsilon_i(t)dt+\\ &+\beta\int_0^T\sum_{i=1}^n(\upsilon_i(t)-\omega_i(t))\delta\upsilon_i(t)dt\end{aligned} \tag{26}$$

ifadəsi ilə təyin olunur.

İsbatı. (6) funksionalının artımına baxaq:

$$\begin{aligned}\Delta J_\beta(\upsilon) &= J_\beta(\upsilon+\delta\upsilon)-J_\beta(\upsilon)=\int_0^T\sum_{i=1}^n[u(x_i,t;\upsilon)-g_i(t)]\delta u(x_i,t)dt+\\ &+\beta\int_0^T\sum_{i=1}^n(\upsilon_i(t)-\omega_i(t))\delta\upsilon_i(t)dt+\frac12\int_0^T\sum_{i=1}^n|\delta u(x_i,t)|^2dt+\frac{\beta}{2}\int_0^T\sum_{i=1}^n|\delta\upsilon_i(t)|^2dt.\end{aligned} \tag{27}$$

Əgər (12)-də $\eta=\psi(x,t;\upsilon)$, (19)-da $\mu=\delta u(x,t)$ götürüb, alınan münasibətləri toplasaq, yaza bilərik:

$$\begin{aligned}\int_0^T\sum_{i=1}^n(u(x_i,t;\upsilon)-g_i(t))\delta u(x_i,t)dt &= \int_Q u\psi\sum_{i=1}^n\delta\upsilon_i(t)h_i(x)dxdt+\\ &+\int_Q\psi\sum_{i=1}^n\delta\upsilon_i(t)h_i(x)\delta u dxdt.\end{aligned}$$

Bu bərabərliyi (27)-də nəzərə alsaq

$$\Delta J_\beta(\upsilon)=\int_0^T\sum_{i=1}^n\Big(\int_0^\ell u\psi h_i(x)dx\Big)\delta\upsilon_i(t)dt+\beta\int_0^T\sum_{i=1}^n(\upsilon_i(t)-\omega_i(t))\delta\upsilon_i(t)dt+R \tag{28}$$

olar, burada

$$R=\int_0^T\sum_{i=1}^n\Big(\int_0^\ell\psi\delta u h_i(x)dx\Big)\delta\upsilon_i(t)dt+\frac12\int_0^T\sum_{i=1}^n|\delta u(x_i,t)|^2dt+\frac{\beta}{2}\int_0^T\sum_{i=1}^n|\delta\upsilon_i(t)|^2dt \tag{29}$$

qalıq həddir.

Aydındır ki, (26)-nın sağ tərəfindəki ifadə verilmiş $\upsilon\in V$ üçün $\delta\upsilon$ –dən asılı xətti funksional təyin edir. Bundan əlavə $u,\psi \in U$ olduğundan

$$\left|\int_0^T [\sum_{i=1}^n (\int_0^\ell u(x,t)\psi(x,t)h_i(x)dx) + \beta \sum_{i=1}^n (\upsilon_i(t) - \omega_i(t))]\delta\upsilon_i(t)dt\right| \le c\|\delta\upsilon\|_{(L_2(0,T))^n}.$$

Buradan alınır ki, (26)-nın sağ tərəfindəki funksional $\delta\upsilon$ –yə görə məhduddur.

İndi (29) qalıq həddini qiymətləndirək. $\psi \in U$ olduğundan Q-də sanki hər yerdə $|\psi(x,t)| \le c$. Onda Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinə görə yaza bilərik:

$$|R| \le c\int_0^T \left(\sum_{i=1}^n \int_0^\ell |\delta u h_i(x)|dx\right)|\delta\upsilon_i(t)|dt + \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i=1}^n |\delta u(x_i,t)|^2 dt + \frac{\beta}{2}\int_0^T \sum_{i=1}^n |\delta\upsilon_i(t)|^2 dt \le$$

$$\le c\|\delta u\|_{L_2(Q)} \cdot \sum_{i=1}^n \|\delta\upsilon_i\|_{L_2(0,T)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \|\delta u(x_i,t)\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{\beta}{2}\int_0^T \sum_{i=1}^n |\delta\upsilon_i(t)|^2 dt.$$

Burada $W_2^1(Q) \to L_2(0,T)$ daxilolmasının məhdudluğunu [3, s.70] və (13) qiymətləndirməsini nəzərə alsaq $|R| \le c \cdot \sum_{i=1}^n \|\delta\upsilon_i\|^2_{L_2(0,T)}$. Onda (28)-dən çıxır ki, (6) funksionalı V-də Freşe mənada diferensiallanandır və (26) düsturu doğrudur. İndi göstərək ki, (26) ilə təyin olunan $\upsilon \to J'_\beta(\upsilon)$ inikası V-dən $(L_2(0,T))^n$ fəzasına kəsilməz təsir edir.

Tutaq ki, $\delta\psi(x,t) = \psi(x,t;\upsilon+\delta\upsilon) - \psi(x,t;\upsilon)$. (17), (18)-dən çıxır ki, $\delta\psi(x,t)$ funksiyası

$$\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^n \upsilon_i(t)h_i(x)\delta\psi = -\sum_{i=1}^n \delta u(x_i,t)\delta(x-x_i),\ (x,t)\in Q, \tag{30}$$

$$\delta\psi|_{t=T} = 0,\ \left.\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}\right|_{t=T} = 0,\ 0 \le x \le \ell,\ \delta\psi(0,t) = \delta\psi(\ell,t) = 0,\ 0 \le t \le T \tag{31}$$

sərhəd məsələsinin $W_{2,0}^1(Q)$-dan olan ümumiləşmiş həllidir.

(24)-ə analoji olaraq

$$\|\delta\psi\|_{W_2^1(Q)} \le c \cdot \sum_{i=1}^n \|\delta u(x_i,t)\|_{L_2(0,T)}$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

$W_2^1(Q) \to L_2(0,T)$ daxilolmasının məhdudluğuna görə sonuncu bərabərsizlikdən çıxır ki,

$$\|\delta\psi\|_{W_2^1(Q)} \le c\|\delta u\|_{W_2^1(Q)} \tag{32}$$

Onda (32) və (13)-dən alınır ki,

$$\|\delta\psi\|_{W_2^1(Q)} \le c\|\delta\upsilon\|_{(L_2(0,T))^n} \tag{33}$$

(26) düsturundan və Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən çıxır ki,

$$\|J'_\beta(\upsilon+\delta\upsilon) - J'_\beta(\upsilon)\|_{(L_2(0,T))^n} \le c[\|u\|_{L_2(Q)} \cdot \|\delta\psi\|_{L_2(Q)} + \|\psi\|_{L_2(Q)} \cdot \|\delta u\|_{L_2(Q)} +$$

$$+\|\delta u\|_{L_2(Q)} \cdot \|\delta\psi\|_{L_2(Q)}] + \beta \cdot \sum_{i=1}^n \|\delta\upsilon_i\|_{L_2(0,T)}.$$

(13) və (33) düsturlarından alınır ki, $\|\delta\upsilon\|_{L_2(0,T)} \to 0$ olduqda bu bərabərsizliyin sağ tərəfi sıfıra yaxınlaşır.

Buradan alınır ki, $\upsilon \to J'_\beta(\upsilon)$ V-dən $(L_2(0,T))^n$ - ə kəsilməz inikasdır.

Teorem 3 isbat edildi.

4. Optimallıq şərti

Teorem 4. Tutaq ki, teorem 3-ün şərtləri ödənir. Onda $\upsilon_*(t)=(\upsilon_1^*(t),...,\upsilon_n^*(t))\in V$ idarəedicisinin (1),(3), (6) məsələsində optimallığı üçün zəruri şərt

$$\int_0^T\sum_{i=1}^n[\int_0^\ell u_*(x,t)\psi_*(x,t)h_i(x)dx+\beta(\upsilon_i^*(t)-\omega_i(t))](\upsilon_i(t)-\upsilon_i^*(t))dt\ge 0,\ \forall\upsilon\in V \qquad (34)$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir, burada $u_*(x,t)=u(x,t;\upsilon_*)$, $\psi_*(x,t)=\psi(x,t;\upsilon_*)$ funksiyaları uyğun olaraq (1), (3) və (17), (18) məsələlərinin $\upsilon(t)=\upsilon_*(t)$ üçün həlləridir.

İsbatı. V çoxluğu $(L_2(0,T))^n$ –də qabarıqdır. Sonra teorem 3-ə görə $J_\beta(\upsilon)$ funksionalı V çoxluğunda Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $\upsilon\in V$ –də diferensialı (26) bərabərsizliyi ilə təyin olunur. Onda [7, s. 28]-dəki teorem 5-ə görə $\upsilon_*\in V$ elementində $\langle J'_\beta(\upsilon_*),\upsilon-\upsilon_*\rangle\ge 0\ \forall\upsilon\in V$ bərabərsizliyi ödənir. Buradan və (26) düsturundan (34) bərabərsizliyinin doğruluğu alınır. Teorem 4 isbat olundu.

ƏDƏBİYYAT

1. Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Об использовании априорной информации в коэффициентах обратных задачах для гиперболических уравнений. // Труды ИММ Ур Оран. 2012, т. 18.- № 1.- с. 147-164
2. Сафиуллова Р.Р. Обратные задача для гиперболических уравнения второго порядка с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени. Вестник Юур ГУ. Серия “ Математическое моделирование и программирование ”, - 2013. т 6.- № 4
3. Кабанихин С.И., Шишленин М.А., Криворотько О.И. Оптимизационный методы решения обратной задачи термоакустики. // Журнал, Сибирские электронные математические известия //, 2011.- с. 263-292
4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики М.: Наука, 1973, 408 с.
5. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. - Москва: Мир.- 1971.- 372 с.
6. Goebel M. On existence of optimal control// Math. Nachr, 1979, v.93, p.67-73.
7. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. -Москва: Наука.- 1981.- 400 с.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ МЛАДШЕМ ЧЛЕНЕ В УРАВНЕНИИ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Г.Ф.КУЛИЕВ, Г.Г.ИСМАИЛОВА

РЕЗЮМЕ

Обратные задачи занимают особую место в математической физике. Среди этих обратных задач определение коэффициентов уравнения особенно отличаются. В этих задачах помимо решения, коэффициенты уравнений тоже являются неизвестными.

В работе исследуется определение коэффициенты младшего члена в уравнения колебания струны. Эта задача приводится к задаче оптимального управления и полученной задаче применяются методы оптимального управления. В данной задаче исследуется существование оптимального управление, дифференцируемость функционала в смысле Фреше и условие оптимальности.

Ключевые слова: уравнения колебаний, коэффициент младшего члена, обратная задача, оптимальное управление

THE PROBLEM OF DETERMINING THE COEFFICIENT AT THE LOWEST TERM IN THE STRING OSCILLATIONS EQUATION

H.F.GULIYEV, G.G. ISMAYILOVA

SUMMARY

Inverse problems have a special place in the equations of mathematical physics. Among these inverse problems, the problem of finding the coefficients of the equation is particularly differs. In such problems, along with the solution of the equation, the coefficients are also unknown [1, 2, 3].

In this work the problem of finding the coefficient at the lowest term in the string oscillations equation is investigated. This problem is reduced to the optimal control problem and the methods of optimal control theory are applied to the obtained problem. In this problem the existence of a control, differentiability of the functional in the Frechet sense and the condition of optimality are investigated.

Keywords: equation of oscillations, coefficient at the lowest term, inverse problem, optimal control