УДК 517.91

О СПЕКТРЕ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ЭЙРИ

[1,2]А.Х.ХАНМАМЕДОВ, [1]Н.А.ГАФАРОВА, [3]Дж.А.ОСМАНЛЫ
[1]*Бакинский Государственный Университет*
[2]*Университет Азербайджан*
[3]*Институт Математики и Механики НАН Азербайджана*
agil_khanmamedov@yahoo.com

Рассмотрен возмущенный оператор Эйри на полуоси с краевым условием Дирихле в нуле. Изучен спектр этого оператора. Найдена асимптотика собственных значений на бесконечности.

Ключевые слова: возмущенный оператор Эйри, уравнение Эйри, функции Эйри, самосопряженный оператор, собственные значения.

1. Введение

Рассмотрим оператор L, определенный в пространстве $L_2(0,+\infty)$ дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + xy + q(x), x \in [0,+\infty)$$

на области $D(L) = \left\{ y \in L_2(0,+\infty) : y, y' \in AC(0,+\infty), x^{\frac{1}{2}} y, l(y) \in L_2(0,+\infty), y(0) = 0 \right\}$, причем вещественный коэффициент $q(x)$ удовлетворяет условию

$$Q_0 = \int_0^\infty |q(x)| dx < \infty, \tag{1.1}$$

где через $AC(0,+\infty)$ обозначается множество абсолютно непрерывных функ ций на $(0,+\infty)$. При выполнении условия $Q_0 < \infty$ оператор L самосопряжен в $L_2(0,+\infty)$ и ограничен снизу (см. [1], гл.VI, Теорема 4.2). В работе [2] дано описание области определения оператора L и найден вид обратного оператора. Различные спектральные задачи для оператора L изучены в работах многих авторов (см. [1]–[9]).

В настоящей работе доказано, что при условии (1.1) спектр оператора L дискретен. Более того, при выполнении условия

$$Q_4 = \int_0^\infty x^4 |q(x)| dx < \infty, \tag{1.2}$$

найдена асимптотика собственных значений.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим уравнение

$$-y'' + xy + q(x) = \lambda y,\ 0 \le x < \infty,\ \ \lambda \in C\ . \tag{2.1}$$

Известно, что при $q(x) = 0$ уравнение (2.1) обладает решениями

$$f_0(x,\lambda) = 2\pi^{\frac{1}{2}} Ai(x-\lambda),\ \ g_0(x,\lambda) = 2^{-1}\pi^{\frac{1}{2}} Bi(x-\lambda)\ \ , \tag{2.2}$$

где $\mathrm{A}i(x)$ и $Bi(x)$ являются с функциями Эйри первого и второго рода соответственно. Эти функции служат линейно независимыми решениями уравнения $l(y) = 0$ при $q(x) = 0$. Для Вронскиана этих функций справедливо равенство

$$W\{\mathrm{A}i(x), Bi(x)\} = \mathrm{A}i(x)Bi'(x) - \mathrm{A}i'(x)Bi(x) = \pi^{-1}\ .$$

Обе этих функции являются целыми функциями порядка 3/2 и типа 2/3. Имеют место (см. $[10]$) асимптотические равенства при $|z| \to \infty$

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}i(z) \sim (4\pi)^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\zeta}\left[1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right], \\ &Ai'(z) \sim -(4\pi)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{4}} e^{-\zeta}\left[1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right], |\arg z| < \pi, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &Bi(z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{\zeta}\left[1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right], \\ &Bi'(z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{4}} e^{\zeta}\left[1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right], |\arg z| < \frac{\pi}{3}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\zeta = \dfrac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$.

Далее, как показано в $[9]$, при условии $Q_0 < \infty$ для каждого действительного значения λ уравнение (2.1) имеет решения $f(x,\lambda)$, $g(x,\lambda)$, удовлетворяющие условиям

$$f(x,\lambda) = f_0(x,\lambda)(1 + o(1)),\ f'(x,\lambda) = f_0'(x,\lambda)(1 + o(1))x \to \infty\ , \tag{2.5}$$

$$g(x,\lambda) = g_0(x,\lambda)(1 + o(1)), g'(x,\lambda) = g_0'(x,\lambda)(1 + o(1))x \to \infty\ . \tag{2.6}$$

Очевидно, что решения $f(x,\lambda)$ и $g(x,\lambda)$ линейно независимы, ибо в силу (2.2)-(2.6) их вронскиан равен единице.

Так как оператор L ограничен снизу, то существует $\lambda_0 \le 0$ такое, что $f(0,\lambda_0) \ne 0$. Положим

$$\psi(x) = f(x,\lambda_0),\ \varphi(x) = g(x,\lambda_0)\,.$$

Как показано в работе $[2]$, оператор $R_{\lambda_0} = (L - \lambda_0 I)$, определенный во всем пространстве $L_2(0,+\infty)$, действует по формуле

$$\left(R_{\lambda_0} h\right)(x) = \psi(x)\int_0^x \varphi(t)h(t)dt + \varphi(x)\int_x^{+\infty} \psi(t)h(t)dt\ , \tag{2.7}$$

3. Исследование спектра

Положим

$$\Phi(x,t)=\begin{cases}\psi(x)\varphi(t), t\le x,\\ \varphi(x)\psi(t), t\ge x.\end{cases} \tag{3.1}$$

Тогда в силу формулы (2.7), оператор $R_{\lambda_0}=(L-\lambda_0 I)^{-1}$ может быть представлен в виде

$$R_{\lambda_0}h(x)=\int_0^\infty \Phi(x,t)h(t)dt\ . \tag{3.2}$$

Теорема 1.*Оператор R_{λ_0} вполне непрерывен в пространстве $L_2(0,+\infty)$.*

Доказательство. В силу (3.1), (3.2) имеем

$$\int_0^\infty |\Phi(x,t)|^2 dt=\psi^2(x)\int_0^x \varphi^2(t)dt+\varphi^2(x)\int_x^\infty \psi^2(t)dt\ .$$

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_a^x \varphi^2(t)dt}{x^{-\frac{3}{2}}e\psi^{-2}(x)}$. Воспользовавшись правилом Лопиталя найдем, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_a^x \varphi^2(t)dt}{x^{-\frac{3}{2}}\psi^{-2}(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi^2(x)}{-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\psi^{-2}(x)-2x^{-\frac{3}{2}}\psi^{-3}(x)\psi'(x)}\ .$$

Учитывая тогда (2.2)- (2.6), получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_a^x \varphi^2(t)dt}{x^{-\frac{3}{2}}\psi^{-2}(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}}}{-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{1}{2}}e^{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}}+2x^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{4}}e^{2x^{\frac{3}{2}}}x^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{3}{2}x^{-2}+2x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}+2}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, при достаточно больших значениях x имеет место неравенство

$$\psi^2(x)\int_0^x \varphi^2(t)dt\le x^{-\frac{3}{2}}\ .$$

Аналогично доказывается, что при достаточно больших значениях x имеет место оценка

$$\varphi^2(x)\int_x^\infty \psi^2(t)dt\le x^{-\frac{3}{2}}\ .$$

Последние оценки показывают, что справедливо соотношение

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty |\Phi(x,t)|^2 dt<\infty\ .$$

Откуда следует, что оператор R_{λ_0} является оператором Гильберта-Шмидта и, значит, вполне непрерывен.

Теорема доказана.

Из вполне непрерывности оператора $R_{\lambda_0} = (L - \lambda_0 I)^{-1}$ следует, что спектр оператора $L - \lambda_0 I$ состоит из собственных значений, которые стремятся к $+\infty$.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие (1.2). Тогда спектр оператора* L *состоит из простых собственных значений* $\lambda_n, n = 1,2,\ldots$. *Имеет место асимптотическое равенство*

$$\lambda_n = \left(\frac{3\pi(4n-1)}{8}\right)^{\frac{2}{3}} + O\left(n^{-\frac{2}{3}}\right), n \to \infty .$$

Доказательство. Из вполне непрерывности оператора $R_{\lambda_0} = (L - \lambda_0 I)^{-1}$ следует, что спектр оператора $L - \lambda_0 I$ и тем самым оператора L, состоит из собственных значений, которые стремятся к $+\infty$. Так как оператор L самосопряжен, то эти собственные значения являются действительными. Очевидно, что собственные значения оператора L совпадают с нулями функции $f(0,\lambda)$.

Докажем простоту собственных значений. Пусть $\lambda = \lambda'$ есть кратное собственное значение. Тогда при этом λ есть все решения уравнения (2.1) должны иметь интегрируемый квадрат на $+\infty$. Однако решение $g(x,\lambda)$ экспоненциально растет на $+\infty$, а это противоречит сказанному выше.

Далее, для решения $f(x,\lambda)$ справедливо [3] следующее представление

$$f(x,\lambda) = f_0(x,\lambda) + \int_x^\infty K(x,t)\, f_0(t,\lambda)dt , \qquad (3.3)$$

причем ядро $K(x,t)$ является непрерывной функцией и удовлетворяет следующим соотношениям

$$K(x,t) = O\left(\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\right), x+t \to \infty, \qquad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} K(x_1,x_2) + \frac{1}{2} q\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = O\left((x_1+x_2)^2 \sigma\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right), \qquad (3.5)$$
$$x_1 + x_2 \to \infty, i = 1,2.$$

где $\sigma(x) = \int_x^\infty |q(t)| dt$.

В силу (3.3) имеем

$$f(0,\lambda) = f_0(0,\lambda) + \int_0^\infty K(0,t)\, f_0(t,\lambda)dt , \qquad (3.6)$$

Из (2.3), (2.6) следует, что

$$f_0(0,\lambda) = 2\lambda^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}\lambda^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{3}{2}}\right)\right], \lambda \to +\infty . \qquad (3.7)$$

С другой стороны, как показано в работе [7], при выполнении условии (1.2) имеет место соотношение

$$\int_0^\infty K(0,t)\ f_0(t,\lambda)dt = O\left(\lambda^{-\frac{3}{4}}\right), \lambda \to +\infty .$$

Из последних трех соотношений найдем, что

$$f(0,\lambda) = 2\lambda^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}\lambda^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\lambda^{-\frac{3}{4}}\right), \lambda \to +\infty . \tag{3.8}$$

Положим $\hat{\lambda}_n = \left(\frac{3\pi(4n-1)}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$. Тогда при больших значениях n функция $f\left(0, \hat{\lambda}_n + \lambda\right)$ в силу (3.8) принимает на концах отрезка $\left[-\hat{\lambda}_n^{-\frac{1}{2}}, \hat{\lambda}_n^{-\frac{1}{2}}\right]$ значения разных знаков. Следовательно, существует такая точка, принадлежащая этому отрезку, в которой функция $f\left(0, \hat{\lambda}_n + \lambda\right)$ обращается в нуль. Пусть $f\left(0, \hat{\lambda}_n + \delta_n\right) = 0, \delta_n \in \left(-\hat{\lambda}_n^{-\frac{1}{2}}, \hat{\lambda}_n^{-\frac{1}{2}}\right)$. Тогда на основании (3.8) заключаем, что

$$\sin\left(\frac{2}{3}\left(\hat{\lambda} + \delta_n\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) = O\left(\hat{\lambda}_n^{-\frac{1}{2}}\right), n \to \infty . \tag{3.9}$$

Так как $\frac{2}{3}\left(\hat{\lambda}_n + \delta_n\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\hat{\lambda}_n^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{\delta_n}{\hat{\lambda}_n}\right)^{\frac{3}{2}} \sim \frac{2}{3}\hat{\lambda}_n^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\delta_n}{\hat{\lambda}_n}\right) = \frac{2}{3}\hat{\lambda}_n^{\frac{3}{2}} + \hat{\lambda}_n^{\frac{1}{2}}\delta_n, n \to \infty$, то из (3.9) получим $\sin \hat{\lambda}_n^{\frac{1}{2}}\delta_n = O\left(\hat{\lambda}_n^{-\frac{1}{2}}\right), n \to \infty$. Откуда следует, что $\delta_n = O\left(n^{-\frac{2}{3}}\right), n \to \infty$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. -Москва: -Мир. - 1977.
2. Ханмамедов А.Х., Масмалиев Г.М. Одно замечание относительно возмущенного оператора Штарка//Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-мат. наук, - 2021, №4, - с.65-75
3. Kachalov A.P., Kurylev Ya.V. The method of transformation operators in the inverse scattering problem. The one-dimensional Stark effect// J. Soviet Math., 1991. 5, № 3, 3111-3122.
4. Avron J., Herbst I. Spectral and scattering theory of Schrodinger operators related to the Stark effect// Commun. Math. Phys., 1977.v.52. pp. 239–254.
5. Lin Y., Qian M., Zhang Q. Inverse scattering problem for one-dimensional Schordinger operators related to the general Stark effect// Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1989, v.5, №2,pp. 116-136.
6. Савчук А.М., Шкаликов А.А. Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси// Функц. анализ и его прил., 2017, v.51, №1, pp. 82–98.
7. Ханмамедов А.Х., Махмудова М.Г. О спектральных свойствах одномерного оператора Штарка на полуоси// Украинский математический журнал, - 2019, - т.71, - №11, - с.1579-1584
8. Ханмамедов А.Х., Лятифова А.М. Обратная спектральная задача для одномерного оператора Штарка на полуоси // Украинский математический журнал, - 2020, - т.72, - №4, - с.494-508

9. Khanmamedov A.Kh., Makhmudova M.G., Gafarova N.F. Special solutions of the Stark equation// Advanced Mathematical Models & Applications, 2021, v.6, No.1, pp.59-62.
10. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. - Москва: Наука, - 1979. - 827 с.

HƏYƏCANLANMIŞ EYRİ OPERATORUNUN SPEKTRİ HAQQINDA

A.X.XANMƏMMƏDOV, N.F.QAFAROVA, C.Ə.OSMANLI

XÜLASƏ

Yarımoxda Dirixle sərhəd şərtli həyəcanlanmış Eyri operatoruna baxılmışdır. Bu operatorun spektri öyrənilmişdir. Məxsusi ədədlərin sonsuzluqdakı asimptotikası tapılmışdır.

Açar sözlər: həyəcanlanmış Eyri operatoru, Eyri tənliyi, Eyri funksiyaları, öz-özünə qoşma operator, məxsusi ədədlər.

ABOUT THE SPECTRUM OF THE PERURBED AIRY OPERATOR

A.Kh.KHANMAMMADOV, N.G.GAFAROVA, C.A.OSMANLI

SUMMARY

A perturbed Airy operator on the semiaxis with the Dirichlet boundary condition at zero is considered. The spectrum of this operator is studied. The asymptotics of the eigenvalues at infinity is found.

Keywords: perturbed Airy operator, Airy equation, Airy functions, self-adjoint operator, eigenvalues