УДК 517.977.56

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИИ

А.И.АГАМАЛИЕВА
Бакинский Государственный Университет
agamaliyeva88@gmail.com

В работе рассматривается линейная задача оптимального управления динамикой популяции с многоточечным функционалом качества. Применяя один из возможных вариантов метода приращений (модифицированный вариант метода приращений) установлено необходимое и достаточное условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: динамикой популяции, дискретный принцип максимума Понтрягина, необходимое и достаточное условие оптимальности, формула приращения.

1. Постановка задачи

Пусть $D = [t_0, t_1] \times [t_0, t_1] -$ заданный прямоугольник, $a(x)$ заданная $n -$ мерная вектор-функция, $U \subset R^r$ заданное непустое и ограниченное множество, $u(t, x)$ непрерывная по x и кусочно-непрерывная по t (конечным числом точек разрыва первого ряда) $r -$мерная вектор-функция управляющих воздействий со значениями из U, т.е.

$$u(t, x) \in U \subset R^r, (t, x) \in D \tag{1}$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми управлениями.

Предположим, что динамика управляемого непрерывного процесса описывается системой линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма вида

$$z_t(t, x) = A(t, x)z(t, x) + \int_{x_0}^{x_1} B(t, x, s)z(t, s)ds +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} C\big(t, x, s, u(t, s)\big)ds + f\big(t, x, u(t, x)\big), (t, x) \in D, \tag{2}$$

с начальным условием

$$z(t_0, x) = a(x), x \in [x_0, x_1] \tag{3}$$

Здесь $A(t, x)$, $B(t, x)$, заданные $(n \times n)$ непрерывные по совокупности переменных матричные функции, $C(t, x, s, u)$ и $f(t, x, u) -$ заданные $n -$мерные вектор-функции непрерывные по совокупности переменных,

$a(x)$ -заданная n $-$мерная непрерывная начальная функция.

Заметим, что уравнение типа (2) описывают динамику популяций (см. напр. [1, 2])

Предполагается, что, при сделанных предположениях, каждому допустимому управлению $u(t,x)$ соответствует единственное кусочно-гладкое по t и непрерывное по x решение $z(t,x)$ задачи Коши (2) – (3).

Пусть $T_i \in (t_0, t_1], i = \overline{1,k}, (t_0 < T_1 < T_2 \cdots < T_k \leq t_1)$ заданные точки.

Рассмотрим задачу о нахождении минимального значения линейного многоточечного функционала

$$S(u) = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{k} c_i' \ (x) z(T_i, x) dx \tag{4}$$

при ограничениях (1) – (3).

Здесь $c_i(x), i = \overline{1,k}$ $-$заданные непрерывные n $-$мерные вектор-функции.

Допустимое управление $u(t,x)$ доставляющая минимальное значение функционалу (4) при ограничениях (1) - (3) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\big(u(t,x), z(t,x)\big)$- оптимальным процессом.

2. Формула приращения функционала качества и условия оптимальности

Считая $\big(u(t,x), z(t,x)\big)$ некоторым допустимым процессом через $\big(\bar{u}(t,x) = u(t,x) + \Delta u(t,x),\ \ \bar{z}(t,x) = z(t,x) + \Delta z(t,x)\big)$ обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение функционала качества соответствующее этим допустимым процессам:

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{k} c_i' \ (x) z(T_i, x) dx \tag{5}$$

Ясно, что приращение $\Delta z(t,x)$ состояние $z(t,x)$ является решением задачи

$$z_t(t,x) = A(t,x)\Delta z(t,x) + \int_{x_0}^{x_1} B(t,x,s)\Delta z(t,s)ds +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \big[C\big(t,x,s,\bar{u}(t,s)\big) - C\big(t,x,s,u(t,s)\big)\big]ds + f\big(t,x,\bar{u}(t,x)\big) - f\big(t,x,u(t,x)\big), \tag{6}$$

Пусть $\psi(t,x)$ некоторая n $-$мерная вектор-функция.

Из (6) получаем справедливость тождества

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t,x)\Delta z_t(t,x)dxdt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t,x)A(t,x)\Delta z_t(t,x)dxdt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t,x)B(t,x,s)\Delta z(t,s)dsdxdt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t,x)\big[C\big(t,x,s,\bar{u}(t,s)\big) - C\big(t,x,s,u(t,s)\big)\big]dxdsdt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\left[f\left(t,x,\bar{u}(t,x)\right)-f\left(t,x,u(t,x)\right)\right]dxdt. \qquad (7)$$

Отсюда введя обозначения

$$H\left(t,x,u(t,x),\psi(t,x)\right)=\psi'(t,x)f\left(t,x,u(t,x)\right)+$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,s)C\left(t,s,x,u(t,x)\right)ds,$$
$$\Delta_{\bar{u}(t,x)}H(t,x,\psi)=H\left(t,x,\bar{u}(t,x),\psi(t,x)\right)-H\left(t,x,u(t,x),\psi(t,x)\right)$$

вышеприведенное тождество (7) записывается в виде

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z_t(t,x)dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)A(t,x)\Delta z_t(t,x)dxdt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,s)B(t,s,x)\Delta z(t,x)dsdxdt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar{u}(t,x)}H[t,x,\psi]dxdt \qquad (8)$$

Заметим, что введенная функция $H(t,x,u,\psi)$ является аналогом функции Гамильтона Понтрягина для рассматриваемой задачи.

Принимая во внимание (8) в формуле приращения (5) получим, что

$$\Delta S(u)=\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}c_i'(x)z(T_i,x)dx+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z_t(t,x)dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(A'(t,x)\psi(t,x)\right)'\Delta z(t,x)dxdt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{x_0}^{x_1}B'(t,s,x)\psi(t,s)\right)'\Delta z(t,x)dsdxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar{u}(t,x)}H[t,x,\psi]dxdt \qquad (9)$$

Поскольку $\Delta(t_0,x)=0$ то, для $\Delta z_t(t,x)$ получим, что

$$\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t}\Delta z_t(t,x)dt.$$

Следовательно,

$$\Delta z(T_i,x)=\int_{t_0}^{T_i}\Delta z_t(t,x)dt. \qquad (10)$$

Через $\alpha_i(t)$ обозначим характеристическую функцию отрезка $[t_0,T_i]$.

С учетом введенного обозначения из (10) следует, что

$$\Delta z(T_i,x)=\int_{t_0}^{t_1}\alpha_i(t)\Delta z_t(t,x)dt.$$

Поэтому формула приращения (9) принимает вид

$$\Delta S(u)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t)c_i'(x)z_t(t,x)dxdt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t}^{t_1}A'(\tau,x)\psi(\tau,x)d\tau\right)'\Delta z_t(t,x)dxdt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(B'(\tau,s,x)\psi(\tau,s)\right)'dsd\tau\right]\Delta z_{tx}(t,x)dxdt-$$
$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar{u}(t,x)}H[t,x,\psi]dxdt \qquad (11)$$

До сих пор $\psi(t,x)$ считалось неизвестной вектор-функцией. Теперь если предположить, что $\psi(t,x)$ является решением интегрального уравнения типа Вольтерра вида

$$\psi(t,x)=\int_{t_0}^{t_1}A'(\tau,x)\psi(\tau,x)d\tau+\int_t^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}B'(\tau,s,x)\psi(\tau,s)dsd\tau-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t)c_i(x), \quad (12)$$

тогда формула приращения (12) примет следующий окончательный вид

$$\Delta S(u)=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar{u}(t,x)}H[t,x,\psi]dxdt. \quad (13)$$

Систему интегральных уравнений (12) назовем сопряженной системой в рассматриваемой задаче оптимального управления.

С помощью формулы (13) доказывается

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (1) – (4) необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\upsilon(x)}H[\theta,x,\psi]\le 0, \quad (14)$$

выполнялось для всех $\upsilon(x)\in U, x\in[x_0,x_1], \theta\in[t_0,t_1)$.

Здесь и в дальнейшем $\upsilon(x)$ произвольная непрерывная вектор функция, $\theta\in[t_0,t_1)$ произвольная точка непрерывности допустимого управления $u(t,x)$ при всех $x\in[x_0,x_1]$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\mathrm{u(t,x)}$ оптимальное управление. Тогда ясно, что

$$S(u+\Delta u)-S(u)\ge 0, \quad (15)$$

для всех допустимых приращений $\Delta u(t,x)$ управления $u(t,x)$.

Предположим, что, $\upsilon(x)\in U, x\in[x_0,x_1]$ произвольная непрерывная вектор-функция, $\theta\in[t_0,t_1)$ произвольная точка непрерывности допустимого управления $u(t,x)$, *а* $\varepsilon>0$ произвольное достаточно малое число такое, что $\theta+\varepsilon<t_1$.

Специальное приращение допустимого управления $u(t,x)$ определим по формуле

$$\Delta u(t,x;\varepsilon)=\begin{cases}\upsilon(x)-u(t,x),(t,x)\in[\theta,\theta+\varepsilon)\times[x_0,x_1]\\ 0,(t,x)\bar{\in}[\theta,\theta+\varepsilon)\times[x_0,x_1].\end{cases} \quad (16)$$

Учитывая (16) в (15) и применяя теорему о среднем получим что

$$S\big(u(t,x)+\Delta u(t,x;\varepsilon)\big)-S\big(u(t,x)\big)=-\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\upsilon(x)}H[\theta,x,\psi]dx+0(\varepsilon)\ge 0$$

Отсюда следует неравенство (14). Перейдем к доказательству достаточности условия максимума (14).

Из условия максимума (14) следует, что для любого $\upsilon(x)\equiv\upsilon(\theta,x)\in U, x\in[x_0,x_1], \theta\in[t_0,t_1)$.

$$\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\upsilon(\theta,x)}H[\theta,x,\psi]dx\le 0$$

Отсюда в силу произвольности $\theta\in[t_0,t_1)$ следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\upsilon(\theta,x)}H[\theta,x,\psi]dxd\theta\le 0,$$

Учитывая, это неравенство из (2.1.13) получаем, что

$$S(\upsilon)-S(u)=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\upsilon(\theta,x)}H[\theta,x,\psi]dxd\theta\le 0,$$

для всех$\upsilon(\theta,x)\in U, \theta\in[t_0,t_1), x\in[x_0,x_1]$.

Этим достаточность условия максимума (14) доказано.

3. Случай нелинейного выпуклого функционала цели

Пусть $\phi(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_k)$ –заданная выпуклая и непрерывно дифференцируемая скалярная функция. Рассмотрим задачу нахождения минимального значения нелинейного многоточечного функционала

$$S(u) = \int_{x_0}^{x_1} \phi\big(x, z(T_1, x), z(T_2, x), \cdots, z(T_k, x)\big) dx, \qquad (17)$$

при ограничениях (1) – (3).

Докажем, что в случае нелинейного выпуклого функционала качества принцип максимума является достаточным условием оптимальности.

Вычислим приращение функционала качества (17) соответствующее допустимым управлением $u(t,x)$ $и$ $u(t,x) + \Delta u(t,x)$. Применяя аналог формулы Тейлора имеем:

$$\Delta S(u) = S(u + \Delta\, u) - S(u) -=$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \phi'\big(x, z(T_1,x), z(T_2,x), \cdots, z(T_k,x)\big)}{\partial z_i} \Delta z(T_i, x) dx + \int_{x_0}^{x_1} 0_1\Big(\sum_{i=1}^{k} \|\Delta z(T_1, x)\|\Big) dx. \quad (18)$$

Здесь и в дальнейшем $0(\alpha)/\alpha \to 0 -$ при $\alpha \to 0$, $a\|\alpha\|$ норма вектора $\alpha == (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$ определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$.

Введем аналог формулы Гамильтона-Понтрягина в виде

$$M(t, x, u, p) = p' f(t, x, u) + \int_{x_0}^{x_1} p'(t, s) C'\big(t, s, x, u(t, x)\big) ds,$$

где $\mathrm{p}(\mathrm{t}, \mathrm{x})$ пока неизвестная n -мерная вектор-функция. По аналогии с доказательством формулы приращения (13) доказывается, что

$$\Delta S(u) == \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) \frac{\partial \phi'\big(x, z(T_1,x), z(T_1,x), \cdots, z(T_1,x)\big)}{\partial z_i} \Delta z_t(t, x) dx dt\ +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} p'(t, x) \Delta z_t(i, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Big(\int_{t}^{t_1} A'(\tau, x) p(\tau, x) d\tau\Big)' \Delta z_t(t, x) dx dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Big[\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \big(B'(\tau, s, x) p(\tau, s)\big) ds d\tau\Big]' \Delta z_t(t, x) dx dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t,x)} M[t, x, p] dx dt + \int_{x_0}^{x_1} 0_1\Big(\sum_{i=1}^{k} \|\Delta z(T_i, x)\|\Big) dx. \qquad (19)$$

Пусть $p(t,x)$ является решением линейного интегрального уравнения

$$p(t, x) = \int_{t}^{t_1} A'(\tau, x) p(\tau, x) d\tau + \int_{x_0}^{x_1} \int_{t}^{t_1} B'(\tau, s, x) P(\tau, x) ds d\tau -$$

$$- \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) \frac{\partial \phi\big(x, z(T_1, x), z(T_2, x), \cdots, z(T_k, x)\big)}{\partial \mathrm{a}_i}$$

Тогда из формулы приращения (19) получаем, что

$$\Delta S(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t,x)} M[t, x, p] dx dt + \int_{x_0}^{x_1} 0_1\Big(\sum_{i=1}^{k} \|\Delta z(T_i, x)\|\Big) dx \qquad (20)$$

По предположению скалярная функция $\phi(z_1, z_2, \dots, z_k)$ является выпуклой и дифференцируемой функцией. В силу этого предположения, учитывая известные свойство выпуклых функций получим, что

$$\int_{x_0}^{x_1} 0_1\Big(\sum_{i=1}^{k} \|\Delta z(T_i, x)\|\Big)\ dx \geq 0.$$

Поэтому из формулы приращения (20) следует, что

$$\Delta S(u) \geq -\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t,x)} M[t,x,p]dxdt \qquad (21)$$

С помощью неравенства (21) по аналогии с доказательством теоремы 1. доказывается

Теорема 2. Для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (1) – (3), (17) достаточно чтобы неравенство

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\upsilon(x)} M[\theta, x, p] \leq 0\ , \qquad (22)$$

выполнялось для всех $\theta \in [t_0, t_1)$ u $\upsilon(x) \in U, x \in [x_0, x_1]$.

Таким образом, предположение о выпуклости нелинейного функционала качества позволил доказать достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Букина, А.В. Идентификация модели видообразования методом теории оптимального управления // Журнал Сибирского Федер. Уни-та, сер. Мат. и физ., -2008, №3, -с. 191-195.
2. Букина, А.В. Оптимизация интегро-дифференциальных систем: / Автореф. диссерт. на соискание учен. степени канд. физ.-мат. наук / -Иркутск: 2010. -21с.

POPULYASİYANIN DİNAMİKASININ XƏTTİ OPTİMAL İDARƏ OLUNMASI MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ VƏ KAFİ ŞƏRT

A.İ. AĞAMALIYEVA

XÜLASƏ

Məqalədə populyasiyanın dinamikasını xətti, Fredholm tipli inteqro-diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir edən bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün Pontryaginin maksimum prinsipi şəkilində zəruri və kafi şərt alınmışdır. Ayrıca olaraq funksionalın qeyri-xətti və qabarıq olduğu hal öyrənilmişdir.

Açar sözlər: inteqro-diferensial tənlik, mümkün idarə, optimal idarə, artım düsturu, qabarıq funksional**.**

NECESSARY AND SUFFICIENT OPTIMALITY CONDITION IN A LINER POPULATION DYNAMICS CONTROL PROBLEM

A.I.AGHAMALIYEVA

SUMMARY

Consider the one optimal control problem described by a system of linear integro-diferencial equations of Fredholm type is considered in the population. The paper establishes necessary and sufficient condition for the optimality of the Pontryagin maximum principle type. The case of a convex nonlinear functionals studied separately.

Key words: integro-diferential equation, admissible control, optimal control, the increment formula, convex functional.