MEXANİKA

УДК 539.3

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СТЕРЖНЕВОГО ТИПА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

С.А.ПИРИЕВ, Г.Б.ГУСЕЙНОВА

Азербайджанский Технический Университет

sahib.piriyev@aztu.edu.az

gulshan.huseynova@aztu.edu.az

Современная техника предъявляет повышенные требования к точности и тщательности расчета элементов конструкций и самих конструкций, а также к оценке их рабочего ресурса. Исследование поведения материалов и конструкций в условиях сложного напряженного состояния представляет собой одно из важнейших направлений развития механики деформируемого твердого тела. Понимание разрушения как временного процесса, во взаимосвязи с процессом деформирования, привело к появлению теорий повреждаемости, когда в объёме материала конструкции в процессе нагружения образуется и накапливаются различного рода дефекты, объединяемые единым термином – повреждаемость. Подобная физическая картина развития процесса разрушения особенно наглядно проявляет себя для полимерных и композитных материалов, широкое внедрение которых в технике и в промышленности объясняется их большой удельной прочностью и вязкостью разрушения, и, соответственно, возможностью снижения веса деталей и конструкций. Экспериментальные диаграммы показывают, что у этих материалов деформация ползучести не всегда обратима – остаточная деформация определяется объёмом накопленных в процессе нагружения дефектов.

В статье рассматривается вопрос о кинетика накопления повреждений в конструктивных элементах стержневого типа при растяжении. Исходя из принципов механики разрушения рассмотрены некоторые простые математические модели кинетики накопления повреждений учетом этих особенностей.

Ключевые слова: повреждаемость, разрушение, напряжение, ползучесть, деформация.

1. Введение

Главная задача проектирования элементов конструкций и самих конструкций – это недопущение разрушения проектируемых деталей и конструкций в течении условленного периода эксплуатации. Большинство конструкций работает в условиях сложного напряженного состояния, когда оценка длительной прочности затруднительна, а когда материал обладает вязкими свойствами, то порой и проблематична.

Проблема определения рабочего ресурса конструкций, в материале которых в процессе нагружения появляются дефекты различной природы и геометрии, представляет собой одну из актуальных задач научно-технического прогресса. В число основных выдвигается проблема взаимодействия процессов деформирования и разрушения материалов с их структурой и дефектами, как начальными, возникшими в процессе изготовления, так и появляющимися и развивающимися в процессе нагружения. Существенное значение порой имеет внешняя среда, оказывающая заметное влияние как на деформационные, так и на прочностные характеристики материалов. Адекватное описание в этих условиях для сложного напряженного состояния процессов деформирования и разрушения материалов – важнейшая задача современной механики. С этим кругом задач тесно связана проблема деформирования и прочности полимерных и композитных материалов, важная для рационального проектирования ответственных элементов конструкций, машин и летательных аппаратов.

Отсутствие однозначного определения параметра поврежденности обусловливает развитие экспериментальных методов оценки этой величины, основанных, как правило, на регистрации изменений физико-механических характеристик материала, наиболее чувствительных к тому виду нагружения, вызывающие эти повреждения.

В качестве характеристик, изменение которых идентифицируется как накопление повреждений при ползучести, используются практически все металлографические (плотность дислокаций, поры, трещины) и некоторые физические (рассеянная энергия, электросопротивление, плотность, акустическая эмиссия) характеристики материала, отражающие протекание в нем процессов дефектообразования.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Как показывает практика и опыт, твердым телам присуще явление статической усталости. Наблюдаемое при этом разрушение представляет собой необратимый кинетический процесс накопления повреждений, происходящий по всему объему тела. Такой тип разрушения, следуя устанавливающейся к настоящему времени традиции, будем называть рассеянным разрушением.

Вообще говоря процесс усталостного разрушения может быть разделен на два периода: период скрытого накопления рассеянных повреждений и период образования и распространения трещин. Длительность первого периода может составлять от 50% до 80% полного срока службы испытываемого образца.

Подход к проблеме разрушения твердых тел, основанный на концепции накопления повреждений имеет давнюю историю. Само понятие "накопление повреждений" было введено, по видимому, в 1924 году Пальмгреном [17]. Его концепция поврежденности возникла при интерпретации испытаний шарикоподшипников на усталостную прочность, на основе которых было предложено следующее условие разрушения:

$$\Sigma D_i=1 \quad (1)$$

где величина $D_i = n_i/N_i$ получила название усталостного повреждения, произведенного за n_i циклов нагрузки с уровнем P_i . В свою очередь N_i - число оборотов до разрушения при постоянных значениях нагрузки P_i. Однако серьезное внимание к себе этот подход привлек лишь после появления работ [18, 19]. А гипотеза (1) получила известность как линейный закон накопления повреждений при усталостной разрушении под действием нагрузки переменной амплитуды.

Для явления ползучести концепция накопления повреждений основное свое развитие получила в работе [7]. Робинсоном [20] было предложено определение повреждений ползучести, аналогичное определению, данному Пальмгреном. Обозначая через T_i время разрушения при ползучести под действием постоянной нагрузки P_i, для определения повреждений, вызываемых действием нагрузки P_i в течении времени t_i, он брал отношение:

$$D_i = t_i/T_i \quad (2)$$

Условие разрушения при ползучести при ступенчатом нагружении, определялось опять таки согласно (1). Если число ступеней нагружения неограниченно возрастает, то есть для переменной нагрузки P=P(t), то формулы (1), (2) принимают вид:

$$\int_0^T \frac{dt}{T(P(t))} = 1 \quad (3)$$

Однако законы (1) и (3) представляют собой определения разрушения задним числом, ибо входящие в них зависимости N_i и T_i должны быть известны, что требует проведения испытаний при нескольких постоянных уровнях нагрузки. В противоположность этому в концепции поврежденности Качанова используется только текущее механическое состояние.

Основы теорий рассеянного разрушения или, по другому, теорий континуального разрушения, теорий повреждаемости, теорий накопления повреждений, сформулированы в работе [14]. Теории рассеянного разрушения основываются на представлении о наличии в материале рассеянных дефектов-малых по размеру и встречающихся во множестве в единице объема. Такими дефектами могут быть, например, межзеренные повреждения в поликристалических телах, микропоры, микротрещины. Все, подобного и иного рода дефекты объединяются одним термином- "поврежденность". Точное количественное определение термина "поврежденность" в общем случае отсутствует, да и по всей вероятности, это определение трудно или даже невозможно сформулировать. Видимо оно может быть дано в корректной форме лишь при конкретизации разрушающейся среды. В связи с этим получил развитие феноменологический путь определения понятия "поврежденности", или идентичного ему понятия меры поврежденности.

Основы теорий рассеянного разрушения или, по другому, теорий континуального разрушения, теорий повреждаемости, теорий накопления повреждений, сформулированы в работах [3, 4, 13]. Теории рассеянного разрушения основываются на представлении о наличии в материале рассеянных дефектов, малых по размеру и встречающихся во множестве в единице объема. Такими дефектами могут быть, например, межзеренные повреждения в поликристалических телах, микропоры, микротрещины. Все, подобного и иного рода дефекты объединяются одним термином-"поврежденность". Точное количественное определение термина "поврежденность" в общем случае отсутствует, да и по всей вероятности, это определение трудно или даже невозможно сформулировать. Видимо оно может быть дано в корректной форме лишь при конкретизации разрушающейся среды. В связи с этим получил развитие феноменологический путь определения понятия "поврежденности" или идентичного ему понятия меры поврежденности.

Впервые понятие меры поврежденности с построением соответствующих кривых прочности были введены в [7, 14]. Качановым Л. М. [6, 7] в качестве меры поврежденности введен некоторый скаляр $1 \geq \psi \geq 0$. В начальном состоянии при отсутствии поврежденности $\psi = 1$, с течением времени функция ψ убывает. Момент разрушения определяется условием $\psi = 0$. Функция ψ интерпретируется в литературе как "сплошность". Независимо от работ Л. М. Качанова Работновым Ю.Н. была введена альтернативная скалярная мера поврежденности $\omega = 1 - \psi$, называемая "поврежденностью". Она равна нулю в начальном состоянии и единице в момент разрушения. Введенным подобным образом мерам поврежденности можно придать некоторый физический смысл. Так в теле, ослабленном рассеянными по всему объему дефектами, при определении напряжения как отношения силы к соответствующей площади, следует учитывать, что за истинную площадь сечения следует принимать площадь неповрежденной части сечения: $S_* = (1 - \omega)S = \psi S$. Тогда истинное напряжение будет:

$$\sigma_* = \frac{\sigma}{\psi} = \frac{\sigma}{1 - \omega}.$$

Приписывая каждому элементу тела некоторое значение меры поврежденности, тем самым превращают этот параметр в переменную состояние. Тогда необходимо постулирование некоторых уравнений, задающих закон ее изменения, так называемых кинетических уравнений. В [7, 14] для описания процесса накопления повреждений строились подобные кинетические уравнения, устанавливающие зависимость вводимой меры поврежденности от величины напряжения. Качановым Л.М. постулирован закон роста повреждаемости в форме:

$$\frac{d\psi}{dt} = -F\left(\frac{\sigma}{\psi}\right) \tag{4}$$

В частности предлагалось правую часть брать в виде степенной функции.

Работнов Ю. Н. [13] предложил вводить повреждаемость в качестве параметра в уравнение ползучести:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = F\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right); \qquad \frac{d\omega}{dt} = f\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right) \tag{5}$$

Им же проведен анализ для зависимости вида:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = a\,\sigma^{n}(1-\omega)^{-q}; \qquad \frac{d\omega}{dt} = C\sigma^{k}(1-\omega)^{r} \tag{6}$$

Для экспериментального определения констант уравнения (6) необходимо иметь данные по ползучести на установившихся участках, кривую длительной прочности для области хрупких разрушений и зависимость удлинения при разрыве от напряжения.

Подход Работнова Ю. Н. был развит в работах Шестерикова С.А., Локощенко А. М. [3, 4, 8, 9, 10, 11]. Для описания немонотонной зависимости деформации разрушения металлов от уровня напряжения было предложено в (3) степенную зависимость скорости деформации ползучести р от напряжения заменить на функцию гиперболического синуса [11]:

$$\frac{dP}{dt} = a\,\frac{\mathrm{sh}(\sigma/b)}{(1-\omega)^{n}} \tag{4}$$

Для описания второй и третьей стадий кривых ползучести металлов предложены были следующие модификации закона (6) [23]:

$$\frac{dP}{dt} = A\left(\frac{\sigma}{1-\omega^{г}}\right)^{n}; \quad \frac{d\omega}{dt} = B\left(\frac{\sigma}{1-\omega^{г}}\right)^{k} \tag{7}$$

В работе [10] сделана попытка введения двух структурных параметров, с целью характеристики наблюдаемого в эксперименте нарушения структуры металлов двух типов: растрескивания и необратимых сдвиговых деформаций ползучести, которые проходят главным образом по телу зерна.

Для использования развитых для одноосного напряженного состояния теорий поврежденности на случай сложного напряженного состояния как правило придерживаются следующей упрощенной схемы, согласно которой путем введения эквивалентного напряжения приравнивается действие сложного напряженного состояния к действию одноосного напряженного состояния. Выбор эквивалентного напряжения определяется возможностью описания экспериментальных кривых длительной прочности. Вопросам выбора эквивалентного напряжения посвящено большое количество работ, отметим здесь лишь некоторые из них [2, 7, 8, 12, 14, 15]. Одна из форм введения эквивалентного напряжения в кинетическое уравнение и уравнение ползучести, предложенные Работновым Ю.Н. дана в [1].

Недостаточность рассмотрения в качестве меры поврежденности скалярной функции привела к идее о введении тензорной меры поврежденности. Она была сформулирована Ильюшиным А.А. в его работе [5]. В ней предложено процесс накопления повреждений характеризовать не скаляром, а тензором второго или более высокого рангов, функционально зависящих от истории нагружения.

Работновым Ю.Н. [13, 16] дано обобщение предложенной им одномерной модели (4), (5) на случай сложного напряженного состояния. При этом принято характеризовать истинные напряжения и поврежденность тензорами второго ранга, соответственно σ^*_{ij} и ω_{ij}:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\sigma^*_{ik}\psi_{kj} + \sigma^*_{jk}\psi_{ik}\right), \quad \psi_{ij} = \delta_{ij} - \omega_{ij} \tag{8}$$

Предполагая существование потенциалов скоростей ползучести φ и поврежденности ψ, зависящих от тензора истинных напряжений, уравнение состояния и кинетическое уравнение записываются в виде:

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \varepsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma^*_{ij}}; \qquad \frac{d\psi_{ij}}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial\sigma^*_{ij}} \tag{9}$$

Если тензоры ψ_{ij} и σ_{ij} имеют одни и те же главные оси, то

$$\sigma^*_1 = \frac{\sigma_1}{\psi_1}; \qquad \sigma^*_2 = \frac{\sigma_2}{\psi_2}; \qquad \sigma^*_3 = \frac{\sigma_3}{\psi_3} \tag{10}$$

При $\sigma_1 >> \sigma_2, \sigma_3$ приравнивая ψ_2 и ψ_3 единице, из (10) следует однопараметрическая модель [16].

3. Математическая постановка и её решение

В работе принято, что накопление повреждений изменяет деформированное состояние первоначально изотропного материала только через эффективное напряжение. Таким образом деформированное состояние поврежденного материала представлено определяющими уравнениями для неповрежденного материала, в потенциале которого напряжения заменены эффективным напряжением. Это накопление повреждений характеризуется параметром β, означающим уменьшение радиуса эффективной площади сечения образца. Если $F_0 = \pi R_0^2$ есть начальная площадь, то эффективная будет $S(t) = (1-\beta(t))^2 S_0$, а эффективное напряжение $\sigma(t,\tau)$ есть

$$\sigma(t,\tau) = \frac{\sigma_0(\tau)}{(1-\beta(t))^2}. \tag{11}$$

Допустим, что кинетическое уравнение накопления повреждений от действия относительной деформации имеет вид:

$$\frac{d\beta}{dt} = \varphi(\varepsilon) \tag{12}$$

Простейшей линейной теорией, в основе которой лежит принцип наложения деформаций, является линейная теория наследственности, предложения Больцманом.

Допустим, что в момент времени τ (отсчет времени ведется от начала нагружения), в течение малого промежутка $d\tau$, напряжение в растянутом стержне равно $\sigma(\tau)$. Это напряжение вызвало некоторую деформацию, которая впоследствии изменяется во времени. Примем, что в момент времени $t > \tau$ эта деформация пропорциональна напряжению $\sigma(\tau)$, длительности воздействия $d\tau$ и некоторой убывающей функции отрезка времени $t-\tau$, которую обозначим $M(t-\tau)$, и обратно пропорциональна модулю упругости E. Функция $M(t-\tau)$ должна быть убывающей функцией времени t, так как с течением времени материал «забывает» воздействие напряжения σ. Зависимость функции M от разности двух аргументов $t-\tau$ свидетельствует о том, что эта функция не изменяется при изменении начала отсчета времени– инвариантна по отношению к началу отсчета времени.

Напряжение в момент времени t вызывает упругую деформацию σ / E. Следовательно, полная деформация в момент времени t складывается из этой деформации и деформации, возникшей за счет напряжений, действовавших до момента времени t,

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left(\sigma + \int_0^t M(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau\right). \tag{13}$$

где ε - продольная деформация, σ - продольное напряжение, E – модуль Юнга.

Затем выражение, полученное (4), подставить в уравнение (9) получаем,

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = \frac{1}{E}\frac{1}{(1-\beta(t))^2}\left(\sigma_0(t) + \int_0^t M(t-\tau)\sigma_0(\tau)d\tau\right). \tag{14}$$

Уравнение (13) позволяет по заданному закону изменения напряжений во времени определить закон изменения деформации и, в частности, описать явление ползучести (последействия) при постоянном напряжении. В этом случае $\sigma_0(t) = \sigma_0 = const$ и из уравнения (13) получаем.

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = \frac{1}{E}\frac{\sigma_0}{(1-\beta(t))^2}\left(1 + \int_0^t M(t-\tau)d\tau\right). \tag{15}$$

Приведём явный вид для времени начального разрушения для трех видов ядер $M(t-\tau)$, ($g = \sigma_0 / E$):

1. $M(t-\tau) = 1$: $\beta(t) = 1 - \sqrt[3]{1-3g\left(t+\frac{t^2}{2}\right)}$, $\psi(t) = \sqrt[3]{1-3g\left(t+\frac{t^2}{2}\right)}$,

2. $M(t-\tau) = e^{-\alpha(t-\tau)}$: $\beta(t) = 1 - \sqrt[3]{\frac{\alpha^2 + 3g(1-(\alpha+\alpha^2)t - e^{-\alpha t})}{\alpha^2}}$,

$\psi(t) = \sqrt[3]{\frac{\alpha^2 + 3g(1-(\alpha+\alpha^2)t - e^{-\alpha t})}{\alpha^2}}$,

3. $M(t-\tau) = (t-\tau)^{-\alpha}$: $\beta(t) = 1 - \sqrt[3]{1-3g\left(t+\frac{t^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-\alpha)}\right)}$,

$\psi(t) = \sqrt[3]{1-3g\left(t+\frac{t^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-\alpha)}\right)}$.

На рисунке приведена кривая распространения фронта повреждения для указанных выше формулы.

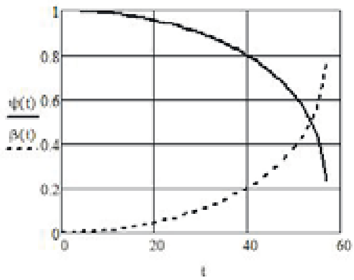

Рис.1. Кривые зависимости от времени параметра повреждения при $M(t-\tau)=1, \quad g=1{,}958\cdot10^{-4}$.

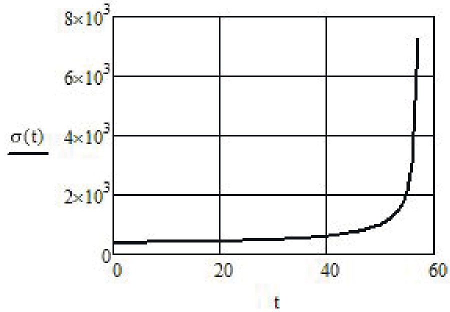

Рис.2. Кривая зависимости напряжения от времени при $M(t-\tau)=1, \quad g=1{,}958\cdot10^{-4}$.

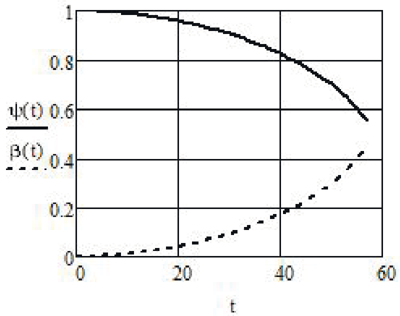

Рис.3. Кривые зависимости от времени параметра повреждения при $M(t-\tau)=e^{-\alpha(t-\tau)}$, $\alpha=0{,}01$, $g=1{,}958\cdot10^{-4}$.

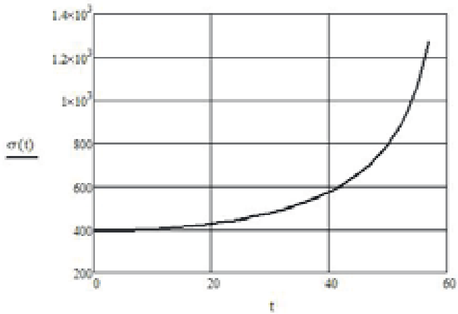

Рис.4. Кривая зависимости напряжения от времени при $M(t-\tau)=e^{-\alpha(t-\tau)}$, $\alpha=0{,}01$, $g=1{,}958\cdot10^{-4}$.

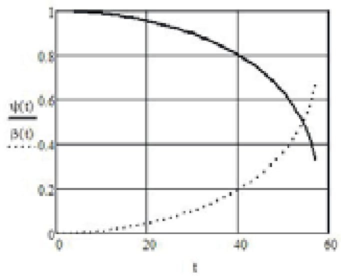

Рис.5. Кривые зависимости от времени параметра повреждения при $M(t-\tau)=(t-\tau)^{-\alpha}$, $\alpha=0{,}01$, $g=1{,}958\cdot10^{-4}$.

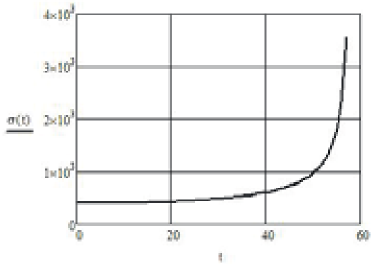

Рис.6. Кривая зависимости напряжения от времени при $M(t-\tau)=(t-\tau)^{-\alpha}$, $\alpha=0{,}01$, $g=1{,}958\cdot10^{-4}$.

Заключение. В настоящей работе сделана попытка рассмотреть некоторые особенности повреждаемости в изотропном и цилиндрически полом цилиндре при растяжении. Получены кинетическое уравнение движение фронта повреждения. Построены кривые движения фронта повреждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. Москва: Мир, - 1986. - 360 с.
2. Гольдман А.Я. Прочность конструкционных пластмасс. Л.: Машиностроение, - 1979. - 320 с.
3. Деформирование и разрушение твердых тел. /Под ред. Н.И.Малинина и С.А.Шестериков. Москва: МГУ, - 1985. – 185 с.
4. Закономерности ползучести и длительной прочности. Справочник./Под ред. С.Л.Шестерикова. Москва: Машиностроение, - 1983. - 101 с.
5. Ильюшин А.А. Об одной теории длительной прочности./ Инж.ж., МТТ, - 1967, - №3, - с.21-35.
6. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести. //Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 8.
7. Качанов Л.Н. Основы механики разрушения. Москва, 1974. - с.312.
8. Локещенко А.М. Длительная прочность металлов при сложном напряженном состоянии.//Проблемы прочности, 1983, - №8, - с.55-59.
9. Локощенко А.М., Мякотин С.А., Шестериков С.А. Ползучесть и длительная прочность стали I2XI8HI0T в условиях сложного напряженного состояния,//Изв. АН СССР, МТТ, - 1979, - №4. - с.87-94.
10. Локощенко А.М., Шестериков С.А. К проблеме оценки длительной прочности при ступенчатом нагружении у ПМТФ, - 1982, - №2. -с.139-143.
11. Локощенко А.М., Шестериков С.А. Модель длительной прочности с немонотонной зависимостью деформации при разрушении от напряжения. //ПМТФ, - 1982, - №1. - с.160-163.
12. Павлов П.А., Щербаков В.И. Исследование накопления повреждений при статическом и циклическом нагружении тонкостенных труб поливинилхлорида. Москва, - 1977, Рук.деп. в ВИНИТИ, 08.06.77, - № 230-77.
13. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. Москва: Наука, - 1987, - 80 с.
14. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва, - 1966. – 752 с.
15. Сдобырев В.П. Критерий длительной прочности для некоторых жаропрочных сплавов при сложном напряженном состоянии. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, - 1959, - №6.
16. Работнов Ю.Н. Влияние концентрации напряжений на длительную прочность. // Изв.АН СССР, МТТ, 1967, №3, с.36-41.
17. Palmgren A.J. Verein Deutscher Ingemeure, 1924, Bd, 68, p.339-341.
18. Baily J. Attempt to correlate some tensile strength measurements of glass. Glass Industry, 1939, v.20, №1-4, p.26-28.
19. Miner M.A. J. Appl. Mech. 194-5, v.12, p.A159 - A164.
20. Robinson E.L. Trans. ASME, 1952, v.74, p.777-780.