GƏMİÇİLİKDƏ TƏBİƏT ELMLƏRİ PROBLEMLƏRİ

УДК 517.957

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Абдуллаева А.Р.

Азербайджанская Государственная Морская Академия
AЗ 1000, г. Баку, ул. З. Алиевой, 18
E-mail: aynur.abdullaeva.2013@mail.ru

Аннотация. *В статье исследуется распространение теплопроводности в двухфазной среде (жидкой и твердой) для некоторых теплопроводных задач.*

Рассмотрена задача о нагревании массива, занимающего полупространство. Предполагается, что в незамороженной двухфазной среде существует источник тепла в цилиндрической форме с начальной температурой $T_\infty > 0$. Полученные дифференциальные уравнения решаются приближенно, учитывая автомодельную переменную. Автомодельность дает нам возможность привести уравнение с частными производными к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Xülasə. *Məqalədə bəzi istilikkeçirmə məsələləri üçün ikifazalı (maye və bərk) mühitdə istiliyin paylanması (temperatur çox olan hissədən az olan hissəyə) prosesi araşdırılır.*

Yarımfazanı əhatə edən massivdə istiliyin paylanması məsələsinə baxılır. Fərz edilir ki, donmamış ikifazalı mühitdə $T_\infty > 0$ başlanğıc temperaturlu silindrik formalı istilik mənbəyi mövcuddur. Alınan tənliklər sistemi avtomodel dəyişənin köməyilə adi diferensial tənliklər sisteminə gətirilməklə təqribi həll olunur. Avtomodel dəyişən xüsusi törəməli diferensial tənliklər sistemini adi diferensial tənliklər sisteminə çevirməyə imkan verir.

Abstract. *The propagation of thermal conductivity in a two-phase medium (liquid and solid) for some heat-conducting problems is investigated in the present paper.*

The problem of heating of an array covering a half-space is considered.

It is assumed that in the unfrozen two-phase medium, there is a heat source in a cylindrical shape with an initial temperature $T_\infty > 0$. The obtained differential equations are solved approximately, taking into account the self-similar variable. Self-similarity enables us to reduce the partial differential equation to an ordinary differential equation.

Ключевые слова: *коэффициент теплопроводности, удельная массовая теплота, вектор теплового потока, замороженная и незамороженная область, поверхность раздела фаз, автомодельная переменная, перепад температуры*

Açar sözlər: *istilikkeçirmə əmsalı, xüsusu kütlə istiliyi, istilik seli vektoru, donmuş və donmamış massiv, fazaların sərhəd səthi, avtomodel dəyişən, temperatur fərqi.*

Key words: *coefficient of thermal conductivity, specific mass temperature, thermal flood vector, frozen and freezing mass, phase surface phases, automotive variable, temperature difference*

Введение. В теории теплопроводности важную роль играет закон Фурье для решения тепловых задач. На границе, разделяющей фазы, должны выполняться граничные условия. При решении задач предполагается, что тепловой поток q пропорционален разности температур на поверхности тела и окружающей среды:

$$q = \lambda(T_s - T_0), \qquad \lambda > 0$$

T_s –температура на поверхности тела.

В задачах требуется определить распространение температуры в обе фазы, а также закон изменения границы раздела фаз.

Будем рассматривать нестационарные одномерные автомодельные задачи. Математически задача сводится к решению уравнения, имеющего граничные и начальные условия. Требуется найти распределение температур в замороженной и незамороженной областях.

Решение уравнений выражается линейно через интеграл вероятности. Определено значение автомодельной переменной на границе раздела фаз, определен радиус границы замороженной области.

Постановка задачи. В предлагаемой работе требуется решить уравнение теплопроводности для различных случаев и найти распределение температур в обоих фазах, также определить движение границы фазы. Рассматривается задача о нагревании массива, занимающего полупространство.

Предполагается, что исследуемая теплопроводящая среда состоит из двух фаз (жидкой и твердой) и заполняет пространство $-\infty < \text{x} < \infty$. В начальный момент при $t = 0$ жидкая фаза заполняет область $0 < \text{x} < \infty$ при температуре $T_2 > 0$, а твердая область $-\infty < \text{x} < 0$ при $T_1 < 0$. Обозначим через $\bar{q}$ вектор теплового потока, переносимого посредством теплопроводности. Вектор теплового потока $\bar{q}$ связан с изменением температуры. Эта зависимость верна в тех случаях, когда градиент температуры не слишком велик, так как вектор теплового потока $\bar{q}$ с большой точностью пропорционален первой степени удельного перепада температуры, которая выражается законом Фурье

$$\bar{q} = \text{к}\,\nabla T \tag{1}$$

где коэффициент теплопроводности к> 0

Закон (1) не дает возможность решать тепловые задачи.

Для полного описания явления необходимо к (1) добавить уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{2}$$

где $a^2 = {}^{\text{к}}/_{\rho c_p} > 0$ - коэффициент теплопроводности, c_p – теплоемкость при постоянном давлении.

На границе S, разделяющей фазы, должны выполняться следующие условия:

$$T_1|_s = T_2|_s = T_0 \tag{3}$$

$$(k_1 gradT_1 - k_2 gradT_2) = \lambda\rho\vec{v}_s \tag{4}$$

где λ – удельная массовая теплота, ρ – плотность среды, $\vec{v}_s$ – скорость передвижения точек поверхности раздела фаз.

Предполагается, что тепловой поток q пропорционален разности температур на поверхности тела и окружающей среды:

$$q = \lambda(T_s - T_0), \qquad \lambda > 0 \tag{5}$$

Требуется определить распределение температуры в твердой и жидкой фазе, а также закон изменения границы раздела фаз x=y(t).

Из закона сохранения теплового баланса имеем:

$$\lambda\rho\frac{dy}{dt} = \left(k_1\frac{\partial T_1}{\partial x} - k_2\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=y(t)} \tag{6}$$

Здесь k_1 и k_2 – коэффициенты теплопроводности соответствующих фаз.

Таким образом, математически задача сводится к решению следующего уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{7}$$

при следующих начальном и граничном условиях

$$\begin{gathered} T = T_\infty \quad \text{при } t = 0, x \geq 0 \\ T = T_0 \quad \text{при } t > 0, x = 0 \\ T \to T_\infty \quad \text{при } x \to \infty \end{gathered} \tag{8}$$

Основная часть. Для решения уравнения (7) введем вместо искомой функции T безразмерную функцию u по формуле:

$$T(x,t) = T_0 + (T_\infty - T_0)u(\xi,t) \tag{9}$$

где $\xi = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ – автомодельная переменная.

Таким образом, уравнение (7) приводится к виду:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2u}{d\xi^2} = -\xi\frac{du}{d\xi} \tag{10}$$

При этом из (8) для функции u имеем условия:

$$u(0) = 0 \qquad\qquad u(\infty) = 1 \tag{11}$$

После замены $\frac{du}{d\xi} = v$ из (10) имеем:

$$\frac{dv}{d\xi} = -2\xi v$$

в котором после интегрирования получаем решение в виде:

$$u(\xi) = c_1\int_0^\xi e^{-\xi^2}\,d\xi + c_2$$

$$u(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}c_1 erf\xi + c_2$$

Функция $erf\xi$ определяется так

$$erf\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\xi e^{-\xi^2}\,d\xi \tag{12}$$

и называется интегралом ошибок (интегралом вероятности). Заметим, что

$$erf\,(\infty) = 1$$

Поскольку $\operatorname{erf}(-\xi) = -\operatorname{erf}(\xi)$ из условия (11) имеем $c_2 = 0$. Согласно (11) $c_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

Таким образом, окончательно решение имеет вид:

$$u(\xi) = erf\xi \qquad \text{или}$$

$$T(x,t) = T_0 + (T_\infty - T_0)erf\frac{x}{2a\sqrt{t}} \tag{13}$$

Теперь определим тепловой поток q, проходящий через единицу площади границы $x = 0$.

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = -k(T_\infty - T_0)\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}|_{x=0} = \frac{k(T_0 - T_\infty)}{a\sqrt{\pi t}} \tag{14}$$

Рассмотрим некоторые задачи замораживания водонасыщенных горных пород. Такие задачи являются тепловыми.

Предположим, что начальная температура незамороженного массива, занимающего полупространство $x \geq 0$, равна $T_\infty > 0$.

Температура замерзания равна нулю. При $\mathrm{t} > 0$ на границе массива $x = 0$ поддерживается постоянная отрицательная температура $\mathrm{T}_0 < 0$.

Необходимо найти распределение температур $T_\mathrm{i}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ в замороженной и незамороженной областях (здесь $\mathrm{i} = 1$ относится к величине для замороженной области, а $\mathrm{i} = 2$ к незамороженной области) и закон изменения границы замороженной $\mathrm{x}^*(\mathrm{t})$. Для этого необходимо решить систему уравнений

$$a_i^2\frac{\partial^2 T_i}{\partial x_i} = \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad \text{при} \quad t > 0, \quad i = 1 \tag{15}$$

a_i^2 - средний коэффициент температуропроводности.

Найдем решения этих уравнений, удовлетворяющих начальным и граничным условиям:

$$T_1(0,t) = -T_0,\ t > 0, \qquad T_2(x,0) = T_2(\infty,t) = T_\infty,\ t > 0 \tag{16}$$

$$T_1[x^*(t),t] = T_2[x^*(t),t] = 0, \quad t > 0 \tag{17}$$

$$\left[\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial T_1}{\partial x}\left(k_1\frac{\partial T_1}{\partial x} - k_2\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)\right] = 0, \quad x = x^*(t) \tag{18}$$

Введем автомодельную переменную ξ и безразмерные искомые функции согласно соотношениям

$$\xi = \frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\ , \qquad u_i(\xi) = \frac{T_i(x,t)}{T_0} \tag{19}$$

Учитывая (19) в (15), (17), (18) после некоторых преобразований получаем:

$$\frac{d^2u_1}{d\xi^2} = -2\xi\frac{du_1}{d\xi}; \qquad \frac{d^2u_2}{d\xi^2} = -2a^2\xi\frac{du_2}{d\xi} \tag{20}$$

$$u_1(0) = -1, \qquad u_1(\xi^*) = u_2(\xi^*) = 0$$

$$\xi = \beta\left(\frac{du_1}{d\xi} - k\frac{du_2}{d\xi}\right)\Big|_{\xi^*}, \qquad u_2(\infty) = u_\infty \tag{21}$$

где $a^2 = \frac{a_1^2}{a_2^2}, \qquad u_\infty = \frac{T_\infty}{T_0}, \quad k = \frac{k_2}{k_1}$

$$\beta = \frac{k_1 T_0}{2\lambda a^2}, \qquad \xi^* = \frac{x^*(t)}{2a_1\sqrt{t}} \tag{22}$$

Значение автомодельной переменной $\xi = \xi^*$ соответствует положению границы замерзания.

Общее решение уравнений (20) выражается линейно через интеграл вероятности (12). Это решение должно удовлетворять условию (21). Таким образом, получаем решения задачи в безразмерном виде:

$$u_1(\xi) = \frac{erf\xi - erf\xi^*}{erf\xi^*}$$

$$u_2(\xi) = u_\infty\,\frac{\mathrm{erf}(a\xi) - \mathrm{erf}(a\xi^*)}{1 - erf\xi} \tag{23}$$

Для определения значения автомодельной переменной на границе раздела фаз получаем

$$\xi^* = \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}}\Big(\frac{\mathrm{erf}(-\xi^{*2})}{erf\xi^*} - \frac{k a u_\infty \mathrm{erf}(-a\xi^{*2})}{1 - \mathrm{erf}(a\xi^*)} \tag{24}$$

Итак, окончательное решение задачи определяется формулами:

$$T_1(x,t) = \frac{T_0}{erf\xi^*}\left(erf\frac{x}{2a_1\sqrt{t}} - erf\xi^*\right) \tag{25}$$

$$T_2(x,t) = \frac{T_0}{1 - \mathrm{erf}(a\xi^*)}\left(erf\frac{x}{2a_2\sqrt{t}} - erf(a\xi^*)\right)$$

Наибольший интерес представляет закон продвижения границы замораживания, который определяется формулой:

$$x^*(t) = 2a_1\xi^*\sqrt{t} \tag{26}$$

Пусть в незамороженной двухфазной среде существует источник тепла в цилиндрической форме с начальной температурой $T_\infty > 0$. Рассмотрим осесимметричную задачу. Требуется найти решение системы уравнения с частными производными, удовлетворяющее начальным и граничным условиям.

$$\frac{a_1^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right) = \frac{\partial T_1}{\partial t}, \qquad t > 0, \qquad 0 < r < r^*(t) \tag{27}$$

$$\frac{a_2^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_2}{\partial r}\right) = \frac{\partial T_2}{\partial t}, \qquad t > 0, \qquad r^*(t) < r < \infty$$

$$2\pi k_1 \lim_{r\to 0}\frac{\partial T_1}{\partial r} = q \tag{28}$$

$$T_1[r^*(t),t] = T_2[r^*(t),t] = 0 \tag{29}$$

$$\left[\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial T_1}{\partial r}\left(k_1\frac{\partial T_1}{\partial r} - k_2\frac{\partial T_2}{\partial r}\right)\right]_{r=r^*(t)} \tag{30}$$

$$T_2(r,0) = T_2(\infty,t) = T_\infty\,, \qquad 0 < r < \infty \tag{31}$$

где $r^*(t)$ – радиус границы замороженной области.

Выводы:

Найдены распределение температуры в замороженной и незамороженной областях и закон изменения границы замороженной области. Для замороженной зоны получено значение температур равное нулю. Определен тепловой поток q, проходящий через единицу площади.

Для отдельных зон получены формулы распределения температур в приближенной аналитической форме:

$$T_1(r,t) = \frac{q}{2\pi k_1}\left[E_i\left(-\frac{r^2}{4a_1^2 t}\right) - E_i(-\xi^*)\right] \tag{32}$$

$$T_2(r,t) = T_\infty\left[1 - \frac{E_i(-\frac{r^2}{4a_2^2 t})}{E_i(-a^2\xi^*)}\right]$$

Здесь

$$E_i\left(-\frac{r^2}{4a_1^2 t}\right) = -\int_{r^2/4a_1^2 t}^{\infty}\frac{e^{u_i}}{u_i}du_i\,, \qquad \frac{r^2}{4a_1^2 t} > 0$$

$$E_i(-\xi^*) = -\int_{\xi^*}^{\infty}\frac{e^{u_i}}{u_i}du_i\,, \qquad \xi^* > 0 \tag{33}$$

$$E_i\left(-\frac{r^2}{4a_2^2 t}\right) = -\int_{r^2/4a_2^2 t}^{\infty}\frac{e^{u_i}}{u_i}du_i\,, \qquad \frac{r^2}{4a_2^2 t} > 0$$

Литература

1. Матросов В.Л., Асланов Р.М.,Топунов М.В. Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. М.: Владос 2011г., 376с.
2. Мангушев Р.А., Карлов В.Д., Сахаров И.И. Механика грунтов. М.:Изд.Ассоциации строительных вузов 2009 г.,264 с.
3. Абуханов А.З. Механика грунтов. Ростов-на-Дону, Феникс 2006 г.,352 с.
4. Ухов С.Б., Семенов В.В., Знаменский В.В. и др. Механика грунтов, основания и фундаменты. М.: Изд. Ассоциации строительных вузов 2007 г., 566 с.
5. В.Д.Кулиев. Сингулярные краевые задачи. М.: Изд. Физматлит, 2005 г.,720с.
6. Сборник статей. Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. Изд.. Московский государственный горный университет, 2001г., 372 с.

Tövsiyyə edib: t.e.d., prof. **Z.Z. Şərifov**