

UOT 681.7

**CƏLDİŞLƏMƏYƏ GÖRƏ OPTİMAL TƏNZİMLƏYİCİNİN
MATLAB / SİMULİNK PROQRAMINDA SİNTEZİ**

Yolçuyev İ.A.

*Azərbaycan Dövlət Dəniz Akademiyası
AZ1000, Bakı şəh., Z.Əliyeva küç.,18
E-mail: imran28031965@gmail.com*

Xülasə. *Məqalə ikiqat integrallayıcı obyektlərin cəldişləməyə görə optimal idarə olunması məsələsinə həsr edilmişdir. Burada maksimum prinsipindən istifadə etməklə cəldişləməyə görə optimal tənzimləyicinin idarə qanunu tapılmışdır. Optimal sistem MatLab / Simulink proqramında simulyasiya edilərək sintez edilmişdir.*

Abstract. *The article is devoted to the question of optimal speed control double-integrable objects. Here, using the maximum principle, the control law of the optimal speed controller is found. The optimal system was modeled in MatLab / Simulink software and synthesized.*

Аннотация. Статья посвящена вопросу оптимального управления по быстрдействию дважды интегрируемых объектов. Здесь найден закон управления оптимального регулятора по быстрдействию пользуясь принципом максимума. Оптимальная система была синтезирована путем моделирования в программе MatLab/Simulink.

Açar sözlər: optimallaşdırma kriterisi, Hamilton funksiyası, effektivlik funksiyası, dəyişmə funksiyası

Key words: optimization criterion, Hamilton function, efficiency function, change function

Ключевые слова: критерий оптимизации, функция Гамильтона, функция эффективности, функция изменения

Giriş. Tələb olunan keyfiyyət göstəricilərini əldə etmək üçün avtomatik tənzimləmə sisteminin (ATS) növünün (xətti, rele, adaptiv və s.), strukturunun və parametrlərinin təyin edilməsi sintez adlanır.

Cəldisləmə sistemdə keçid proseslərinin başa çatma vaxtını xarakterizə edir. Tənzimləmə sistemlərində bu kriteri ATS-in keyfiyyət göstəricisi olan t_T deməkdir. Cəldisləməyə görə optimal sistemlərdə mövcud məhdudiyyətlər daxilində idarə təsiri elə seçilməlidir ki, t_T göstəricisinin minimal olması təmin edilsin. Optimallaşdırma kriterisini formalaşdırarkən inteqralaltı ifadə olan $G(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ effektivlik funksiyasını vahidə bərabər götürmək lazımdır.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{t_T} dt = t_T \rightarrow \min_{|u| \leq M}, \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ -\mathbf{M} &\leq \mathbf{u} \leq +\mathbf{M}, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_T) = \mathbf{x}_T = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Bu halda, tənzimləmə obyektini istənilən x_0 başlanğıc vəziyyətindən son $x_T = 0$ vəziyyətinə minimal vaxta gətirmək lazım gəlir. İdarə təsiri üçün mövqe məhdudiyyəti mövcuddur. Əgər bu məhdudiyyət olmasa, $u = \infty$ qəbul edib, yəni obyektə sonsuz enerji verib, onu nəzəri olaraq ani vaxta tarazlıq nöqtəsinə gətirmək olardı. Məlumdur ki, belə vəziyyətdə məsələnin praktiki mənası olmur.

Sistemin sonlu t_T vaxtına tarazlıq nöqtəsinə gələ bilməsi üçün idarə təsiri proqram, yəni zamandan asılı idarələr sinfindən olmalıdır. Məsələnin həlli nəticəsində tapılmış optimal idarə qanunu göstərilən sinifdə alınmalıdır.

Əsas hissə. Klassik variasiya hesabından fərqli olaraq, maksimum prinsipi idarəetmə məsələlərini həll etmək üçün nəzərdə tutulmuşdur. Bu səbəbdən, idarə təsirlərini genişləndirilmiş vəziyyət dəyişənləri ilə ifadə etməyə ehtiyac olmur. Burada əsas nəticə optimal idarəni hər bir zaman anında maksimallıq şərtindən tapmağa imkan verən Hamilton funksiyasından istifadə olunmasıdır. Sistem əlaqəli olduğundan inteqral funksionalı şəkildə verilmiş optimallaşdırma kriterisinin hər an minimallıq şərtini ödəyən idarə bütövlükdə idarə intervalında qlobal optimumu təmin edə bilmir. Hamilton funksiyasının hər an maksimumunu təmin edən idarə isə qlobal mənada optimal olub, təyin olunması çətinlik yaratmır.

Optimal idarəetmənin digər variasiya üsulları kimi maksimum prinsipi də mahiyyət etibarı ilə əks əlaqəli $u(\mathbf{x})$ idarə qanununun deyil, proqram $u(t)$ idarəsinin təyin edilməsi üçün nəzərdə tutulmuşdur. Lakin müəyyən şərtlər daxilində bu prinsip əks əlaqəli idarə qanununu almağa imkan verir.

İdarə təsirinə məhdudiyyət qoyulduğundan xətti optimal tənzimləyicinin sintezi məsələsində olduğu kimi optimal idarəni $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$ şərtindən tapmaq olmaz. Optimal idarə maksimum prinsipinin ümumi $\min H$ şərtindən tapılır. Cəldisləmə məsələsində kriteridə $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 1$ olduğundan Hamilton funksiyası:

$$H = 1 + \lambda^T(t) \mathbf{A}\mathbf{x} + \lambda^T(t) \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2)$$

Optimal $u(t)$ hər bir $0 \leq t \leq t_T$ zaman anında H -in minimal qiymətini təmin etməlidir.

Göründüyü kimi, birinci iki toplanan u -dan asılı deyil. Üçüncü toplananın təhlili göstərir ki, hamiltonianın minimal qiymət alması üçün $\lambda^T(t) > 0$ olduqda idarə özünün $-M$ aşağı hədd qiymətinə, $\lambda^T(t) < 0$ olduğu zaman intervalında isə $+M$ yuxarı hədd qiymətinə bərabər olmalıdır. Beləliklə, optimal idarə qanunu:

$$u = -M \operatorname{sign}[B^T \lambda(t)] . \quad (3)$$

Burada $\lambda(t)$ qoşma dəyişəni

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T \lambda(t), \lambda(0) = \lambda_0 = ? \quad (4)$$

bircins diferensial tənliyi ödəyir.

İdarə vektorunun elementləri bir-birindən asılı olmayaraq dəyişə bildiyindən **sign** operatorunu məntiqi şəkildə ifadə edərək optimal idarəni elementlər üzrə aşağıdakı şəkildə yazmaq olar.

$$u_k = \begin{cases} -m_k & \text{əgər } \sigma(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) b_{ik} > 0 , \\ +m_k & \text{əgər } \sigma(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) b_{ik} < 0 , k = \overline{1, m} . \end{cases} \quad (5)$$

Burada $u_k - m$ -ölçülü idarə vektorunun; $m_k - m$ -ölçülü hədd qiymətlər M vektorunun; $\lambda_i(t) - n$ -ölçülü qoşma dəyişənləri vektorunun; $b_{ik} - m \times n$ -ölçülü B matrisinin elementləridir.

Göründüyü kimi, optimal idarə rele tipli, yəni parçada sabit idarə təsiri olub, işarəsini $\sigma(t)$ dəyişmə funksiyasının işarəsinin dəyişdiyi anlarda dəyişir. Optimal idarə qanununu reallaşdırmaq üçün $\lambda(t)$ qoşma dəyişəni məlum olmalıdır. Başlanğıc λ_0 şərti məlum olarsa, $\lambda(t)$ vektorunun $\lambda_i(t)$ qoşma elementlərini (4) tənliyinin həllindən tapmaq olar. λ_0 qiymətləri elə seçilməlidir ki, $\lambda(t)$ -dən asılı olan optimal idarənin $u_{opt}[\lambda(t)]$ ifadəsini yerinə yazdığımız sistemin verilmiş x_0 nöqtəsindən başlayan faza trayektoriyası $x(t)$ son $x_T = 0$ nöqtəsindən keçmiş olsun.

Ümumi halda, qoşma dəyişənlərini aşağıdakı kanonik tənliklər sistemini ikinöqtəli sərhəd məsələsi kimi həll etməklə təyin olunur:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax + Bu_{opt} , \\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T \lambda . \end{cases}$$

$$x(0) = x_0, x(t_T) = x_T, \lambda(0) = \lambda_0 - \text{sərbəst}.$$

Şərtlərin bir hissəsi başlanğıc $t = 0$, bir hissəsi isə $t = t_T$ son anında verildiyindən yuxarıdakı sistem tənliklər üçün tipik ikinöqtəli sərhəd məsələsi alınır. Əlbəttə, hər iterasiyada λ_0 kortəbii seçilməyib müəyyən qanunauyğunluğa tabedir [1].

Maksimum prinsipi optimal idarəni və qoşma dəyişənləri zamanın funksiyası şəklində təyin etməyə imkan verir. Bundan əlavə, λ_0 sistemin x_0 başlanğıc şərtindən asılı olaraq təyin edilir. Hər iki xüsusiyyət (3) optimal idarə qanununu tənzimləmə məsələsinin həllində bilavasitə istifadə etməyə imkan vermir.

İdarə qanununun texniki reallaşdırılmasını yaxşılaşdırmaq məqsədi ilə zaman funksiyası şəklində alınmış $\lambda(t)$ qoşma dəyişənini vəziyyətə nəzərən əks əlaqə şəklində, yəni $\lambda(x)$ şəklində ifadə etmək olar. Təbii ki, bu zaman qoşma funksiyası da əks əlaqə şəklində alınacaqdır. Bu çevirmə cəldişləməyə görə optimal tənzimləmə sistemlərinin sintezində ən əsas və eyni zamanda ən çətin məsələdir. Bu zaman ikinci problem də, yəni λ_0 vektorunun x_0 başlanğıc şərtindən asılılığı da aradan qaldırılır ki, bu da sistemin başlanğıc vəziyyəti dəyişdikdə əlavə hesablamaların yerinə yetirilməsini tələb etmir. Əgər $\sigma(x)$ qoşma funksiyasını analitik şəkildə almaq mümkün deyilsə və ya o çox mürəkkəb alınsa, onda aproksimasiyaedici funksiyalardan istifadə edilir.

İdarə təsirinin çox sadə $u_k = \pm m_k = \text{const}$ alınmasına baxmayaraq, bu tip idarə stabilləşdirici xüsusiyyətə malik olmur. Belə ki, $u_k = \pm m_k$ qiymətlərində koordinat başlanğıcı tarazlıq nöqtəsinə çevrilir. $x_T = 0$ vəziyyətinin tarazlıq nöqtəsi olması üçün $u_k = 0$ olmalıdır. İdarəetmə alqoritmində bu qiymət nəzərdə tutulmadığından idarə signalı yüksək tezlikli və maksimal amplitudlu vibrasiya edir. İcra orqanları (elektrik intiqalları, elektrik mühərrikləri və s.) yüksək tezlikli reversə məruz qaldığından sıradan çıxır. Bu səbəbdən, rele idarə qanununu olduğu kimi tətbiq etməyib, tarazlıq

nöqtəsinin kiçik ətrafında əks əlaqəli və ya $u = 0$ qiymətli idarədən istifadə olunur [2].

Məsələnin həlli üçün ikiqat inteqrallayıcı obyektin cəldişləməyə görə optimal idarə olunmasına baxaq. İkiqat inteqrallayıcı obyektin vəziyyət fəzasında yazılmış tənliyi aşağıdakı kimi olacaqdır:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u, \\ -1 &\leq u \leq 1 \text{ və ya } |u| \leq 1.\end{aligned}$$

İdarəetmə sistemini başlanğıc $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T$ vəziyyətindən son $x_T = (0, 0)^T$ vəziyyətinə mümkün ən tez müddətə gətirən idarənin tapılması tələb olunur.

Qoyulan məsələ üçün Hamilton funksiyası:

$$H = 1 + \lambda_1(t)x_2 + \lambda_2(t)u$$

İdarə təsirinin məhdud olmasını nəzərə alsaq, H -in minimal qiymətini təmin edən idarə:

$$u = -\text{sign}[\lambda_2(t)]$$

Qoşma dəyişənlər (4)-ə əsasən aşağıdakı tənliklər sistemindən təyin olunacaqdır:

$$\dot{\lambda}_1(t) = 0, \lambda_2(t) = -\lambda_1(t)$$

Sistemin $\lambda_1(0) = \lambda_{10}, \lambda_2(0) = \lambda_{20}$ başlanğıc şərtlərində həlli:

$$\lambda_1(t) = \lambda_{10}, \lambda_2(t) = \lambda_{20} - \lambda_{10}t$$

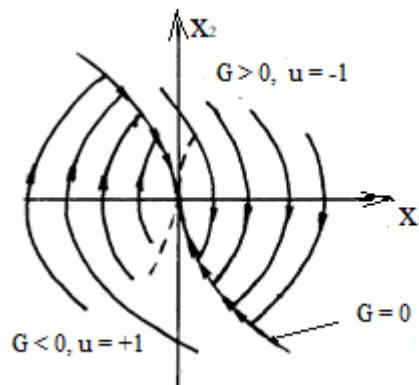
Optimal idarə qanunu başlanğıc şərtlər dəqiqliyində aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$u = -\text{sign}(\lambda_{20} - \lambda_{10}t)$$

$\lambda_2(t)$ xətti funksiya olduğuna görə işarəsini bir dəfə dəyişə bilər. $\lambda_{10}, \lambda_{20}$ qiymətlərini tapmağa çalışmadan $\sigma(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)$ funksiyasını əks əlaqə şəklində təyin edək. Başlanğıc $\lambda_{10}, \lambda_{20}$ qiymətlərindən asılı olaraq $\lambda_2(t) = \lambda_{20} - \lambda_{10}t$ funksiyası öz qiymətini bir dəfə dəyişə bilər. Ümumiyyətlə, aşağıdakı hallar mövcud ola bilər:

- İşarə dəyişmir və $\lambda_2(t) > 0 \Rightarrow u = -1$;
- İşarə dəyişmir və $\lambda_2(t) < 0 \Rightarrow u = +1$;
- İşarə müsbətdən mənfiyə dəyişir $\Rightarrow u = \mp 1$;
- İşarə mənfidən müsbətə dəyişir $\Rightarrow u = \pm 1$.

Sistemin trayektoriyalarını faza müstəvisində təhlil etsək görürük ki, $u = -1$ halında faza trayektoriyaları nöqtələri saat əqrəbi istiqamətində hərəkət edən $x_1 = -0.5x_2^2 + C_1$ parabolalarından, $u = +1$ qiymətində isə saat əqrəbi istiqamətində hərəkət edən $x_1 = 0.5x_2^2 + C_2$ parabolalarından ibarətdir (şəkil 1). Burada C_1, C_2 – başlanğıc vəziyyətindən asılı olan sabitlərdir. $u = +1$ qiymətinə uyğun gələn parabolalar ailəsi a) halına, $u = -1$ qiymətinə uyğun gələn parabolalar ailəsi isə b) halına uyğundur.



Şəkil 1. Cəldişləməyə görə optimal sistemin faza portreti

Göstərilən parabolalardan yalnız ikisi tələb olunan son nöqtədən, yəni koordinat başlanğıcından keçir. Məqsəd istənilən x_0 başlanğıc vəziyyətindən koordinat başlanğıcına gəlməkdən ibarət olduğundan bu parabolaların 2-ci və 4-cü kvadrantda yerləşən hissələrindən dəyişmə xətti kimi istifadə etmək olar. Bu faza trayektoriyaları üzrə hərəkət zamanı x_T nöqtəsinə qədər işarə dəyişmədiyiindən

parabolaların bu hissələri a) və b) halına uyğun gəlir.

Parabolaların hər iki hissəni əhatə edən əyrinin tənliyini aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

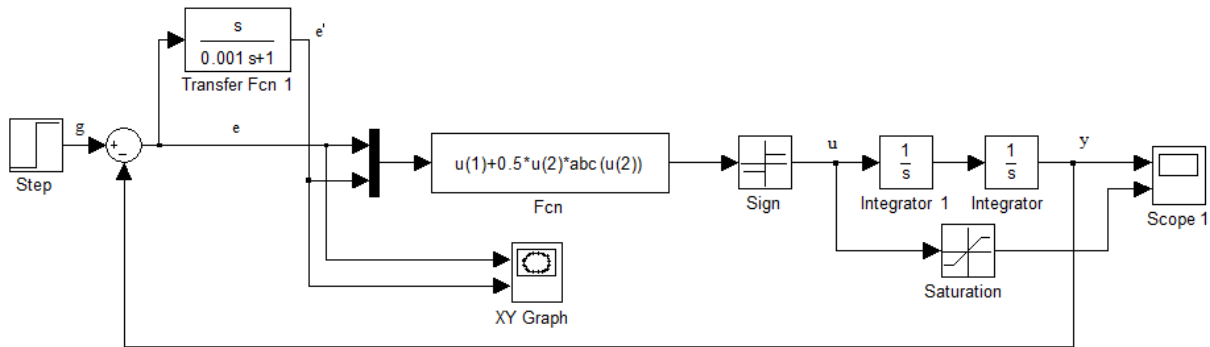
$$\sigma(x_1, x_2) = x_1 + 0.5x_2|x_2| = 0$$

Sistem istənilən başlanğıc vəziyyətindən koordinat başlanğıcına aparən $\sigma(x)$ dəyişmə xəttinin üzərinə düşdüündən sonlu vaxta koordinat başlanğıcına çatır. Qoşma xəttini aşma anında $\sigma(x)$ -nin işarəsi dəyişdiyindən c) və d) halları da təmin olunur.

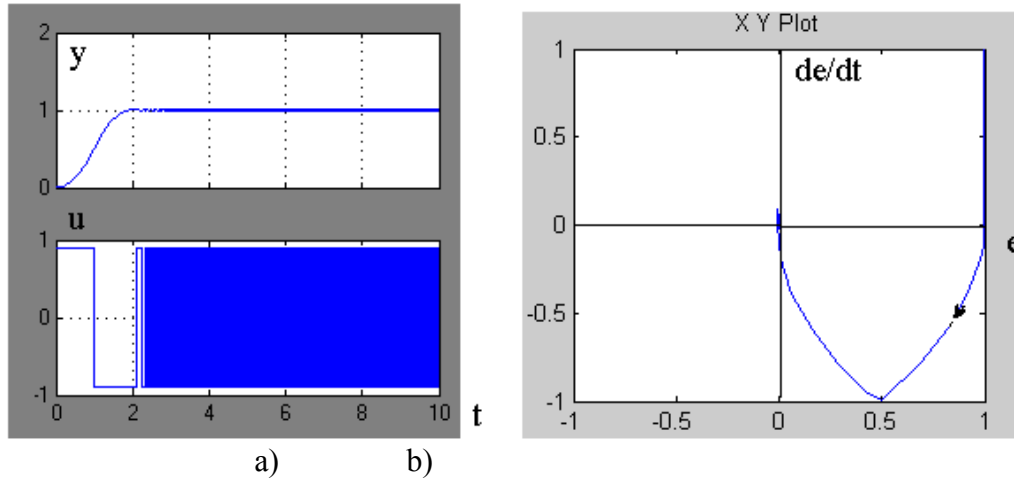
Beləliklə, cəldişləməyə görə optimal idarə qanunu aşağıdakı şəkildə olacaqdır:

$$u = \begin{cases} -1 & \text{əgər } \sigma > 0, \\ +1 & \text{əgər } \sigma < 0. \end{cases}$$

Şəkil 2-də optimal tənzimləmə sisteminin Simulink sxemi, şəkil 3-də isə keçid xarakteristikası $y(t)$, idarə siqnalı $u(t)$ (a) və faza portreti (b) göstərilmişdir [3].



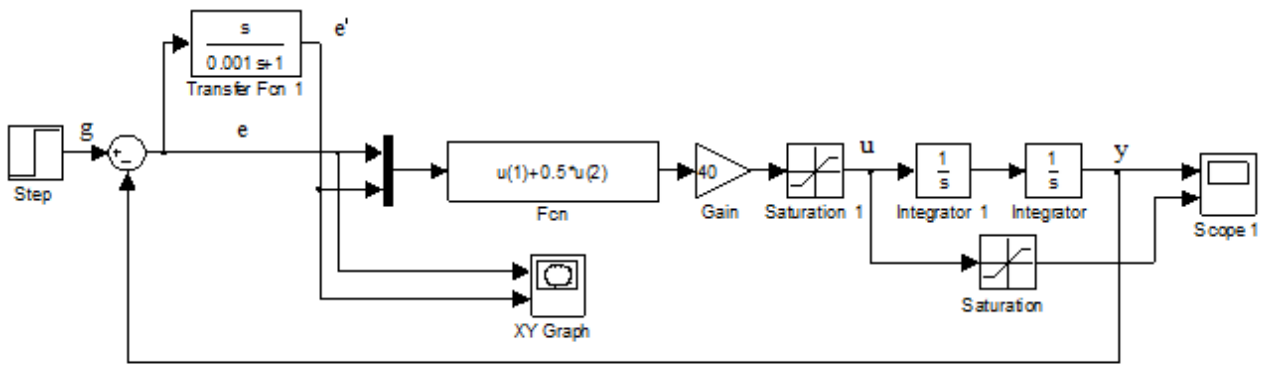
Şəkil 2. Optimal tənzimləmə sisteminin Simulink sxemi



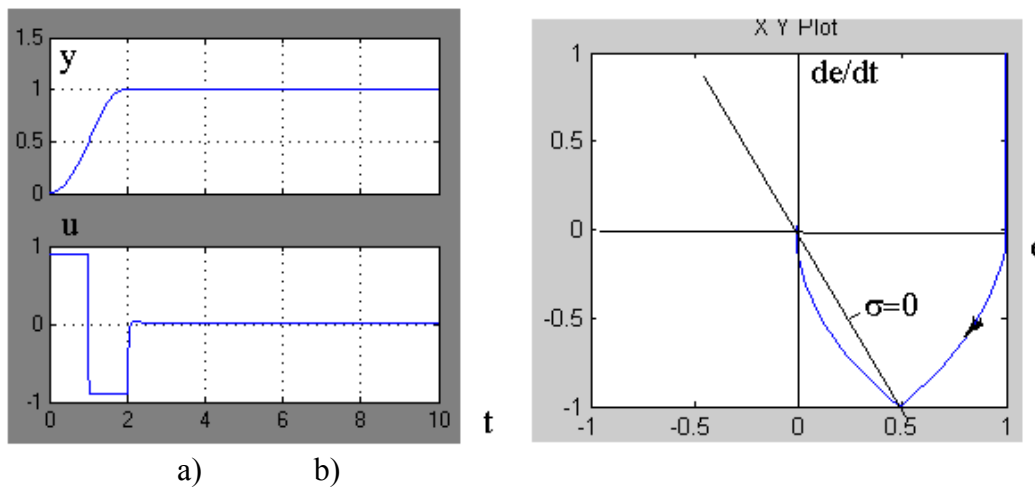
Şəkil 3. Optimal tənzimləmə sisteminin dinamik xarakteristikaları

Şəkildən göründüyü kimi, qərarlaşmış rejimdə idarə siqnalı yüksək tezlikli rəqslər edir. Rele sistemlərinə xas olan bu xüsusiyyəti aradan qaldırmaq məqsədi ilə paraboladan ibarət olan idarənin dəyişmə $\sigma(x_1, x_2)$ funksiyasını $\sigma(x_1, x_2) = x_1 + 0.5x_2 = 0$ düz xətti ilə, releni isə doyma rele-xətti xarakteristikası ilə əvəz etmək olar.

Şəkil 4-də uyğun Simulink sxemi, şəkil 5-də isə keçid xarakteristikası $y(t)$, idarə siqnalı $u(t)$ (a) və faza portreti (b) göstərilmişdir.



Şəkil 4. Modifikasiya olunmuş optimal tənzimləmə sisteminin Simulink sxemi



Şəkil 5. Modifikasiya olunmuş optimal sistemin dinamik xarakteristikaları

Nəticə. Qərarlaşmış rejimdə idarə signalı $u(t) = 0$ sıfır qiyməti alır və döyünmələr aradan qalxır.

Ədəbiyyat

1. Rüstəmov, Q. "Avtomatik tənzimləmə nəzəriyyəsi". II hissə. Ali texniki məktəblər üçün dərslik./ Q. Rüstəmov. - Bakı: "Nasir" nəşriyyatı, - 2003. – 198 s.
2. Məmmədov, H.Ə. "Optimal və adaptiv idarəetmə. Matlab/Simulinkdə modelləşdirmə". / H.Ə. Məmmədov, Q.Ə. Rüstəmov, A.T. Məmmədova [və b.] – Bakı: AzTU, - 2016. – 265 s.
3. Черных, И. "Симулинк: инструмент моделирования динамических систем". / И. Черных.- М.: -1997. - 360 с.

*Məqalə qəbul olunub: 10.03.2021
 Təvsiyə ediblər: t.e.d., prof. A.M.Qafarov*