Atmosfer konveksiyası nəzəriyyəsində sərhəd məsələsinin həlli

Qurban Əliyev
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru,
ADPU-nun dosenti
E-mail: qurban1919@ mail.ru

Rəyçilər: tex.e.ü.f.d., dos. Ç.M. Həmzəyev,
f.-r.ü.f.d., dos. N.X. Şərifov

Açar sözlər: həllin varlığı, atmosfer konveksiyası, tənliklər sistemi, atmosferin sərhəd qatı
Ключевые слова: существование решений, атмосферной конвекции, система уравнений, пограничный слой атмосфера
Key words: the existence of solutions, atmospheric convection, the system of equations, the boundary layer atmosphere

Q= D x (0, T) oblastında, haradakı D= $\{(x,z): 0 < x < 1, 0 < z < 1\}$, aşağıdakı sistem tənliyə baxaq:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{\partial \pi}{\partial x} + \nu(t)\Delta u, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{\partial \pi}{\partial z} + \lambda\vartheta + \nu(t)\Delta w, \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} + u\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x} + w\dfrac{\partial \vartheta}{\partial z} = \nu(t)\Delta\vartheta, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

Burada $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$; u, w –küləyin sürətinin komponentləri; ϑ –potensial tempratur; t – zaman; $\nu(t) \geq \nu_0 > 0$ –turbulentlik əmsalıdır; λ – konveksiya parametri; π -təzyiqin analoqudur.

(1) tənliklər sistemi konvektiv proseslərini müxtəlif formalarını ifadə edir, xüsusi halda termikləri, atmosferin sərhəd qatında inkişaf edən və qarışan hissəsi.

Q oblastında belə bir başlanğıc-sərhəd məsələsinə baxaq. (1) sistem tənliyinin Q oblastında elə bir (u, w, ϑ, π) həllini tapaq ki, aşağıdakı şərtləri ödəsin:

$$u=\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial \vartheta}{\partial x}=0 \qquad x=0 \text{ üçün,}$$

$$w=\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial \vartheta}{\partial z}=0 \qquad z=0 \text{ üçün,} \tag{2}$$

$$u=w=\vartheta=0 \quad x=1 \text{ üçün və } z=1 \text{ üçün};$$

$$\begin{aligned} &u(0,x,z)=w(0,x,z)=0,\\ &\vartheta(0,x,z)=\vartheta_0(x,z). \end{aligned} \tag{3}$$

Məsələ ondan ibarətdir ki, (1) tənliklər sisteminin elə (u, w, ϑ, π) həllini tapmaq lazımdır ki, (2)-(3) şərtləri ödənsin.

Aşağıdakı teorem doğrudur:

TEOREM. Tutaq ki, $U_0(0,0,\vartheta_0)$ vektor-funksiyası üçün $U_0 \in H^2(D)\cap V(D)$ şərti ödənir. Onda istənilən T>0 üçün (1)-(3) məsələsinin elə həlli vardır ki,

$$\begin{aligned} &U' \in L^2(0,T;V(D))\cap L^\infty(0,T;L^2(D)),\\ &U \in L^2(0,T;H^2(D)). \end{aligned} \tag{4}$$

<u>İsbatı.</u> Biz $w_1,w_2,\ldots w_n,\ldots$bazisindən istifadə edərək m tərtibli $u_n(t)$ "təqribi" həlli aşağıdakı kimi quraq:

$$u_n(t) \in [w_1,w_2,\ldots w_n], \quad u_n(t)=\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j,$$

$$\left(u_n'(t),w_j\right)+\nu a(u_m(t),w_j)+b(u_m(t),u_m(t),w_j)=(f(t),w_j) \quad 1\le j\le m \tag{5}$$

$$u_m(0)=u_{0m}, \quad u_{0m}\in[w_1,w_2,\ldots w_n], \quad u_{0m}\to u_0 \text{ H fəzasında.} \tag{6}$$

Bu diferensial tənliklər sistemi (g_{jm} -ə əsasən) $[0, t_m]$ parçasında $u_m(t)$ tapmaöa imkan verir. İndiə görərik ki, t_m=T.

Öncədən qiymətləndirmə I. (5) bərabərliyinin hər tərəfini $g_{jm}(t)$ –yə vurub, j-yə əsasən cəmləyək, onda $b(u_m, u_m, u_m)=0$ olduğunu nəzərə alsaq alarıq:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2+\nu\, a(u_m(t),u_m(t))=(f(t),u_m(t)), \tag{7}$$

harada ki,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu\|u_m(t)\|^2 \le \|f(t)\|\|u_m(t)\| \le \frac{\nu}{2}\|u_m(t)\|_2 + c\|f(t)\|$$

harada ki,

$$|u_m(t)|^2 + \nu\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma \le |u_{0m}(t)|^2 + 2c\int_0^t \|f(\sigma)\|^2 d\sigma \quad (8)$$

(6) –dan istifadə edərək, alarıq ki, t_m=T və

u_m $L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ fəzasında məhduddur. (9)

Öncədən qiymətləndirmə II. Indi göstərək ki,

u'_m $L^2(0,T;V'_s)$ fəzasında məhduddur. (10)

Doğrudan da P_m proektordur H→ [$w_1, w_2, \ldots w_n$], belə ki,

$$P_m h = \sum_{i=1}^{m}(h, w_i)w_i$$

(5)-dən alarıq ki, $u'_m = -P_m(g(u_m)) - \nu P_m A u_m + P_m f$ (11)

Ancaq $\|P_m\|_{L(V_s;V)} \le 1$ (w_j –ları seçdiyimiz üçün), onda P'_m =P_m nəzərə alsaq ,

alarıq ki

$$\|P_m\|_{L(V'_{ss};V'_s)} \le 1 \quad (12)$$

$g(u_m)$ $L^2(0,T;V')$ fəzasında məhdud olduğu üçün, $P_m(g(u_m))$ $L^2(0,T;V')$ fəzasında məhdud olacaqdır. Sonra Au_m $L^2(0,T;V')$ fəzasında məhduddur, onda $L^2(0,T;V'_s)$ fəzasında da məhdud olacaqdır, onda (10) təklifi (11) -dən alınır.

Kompaktlıq teoremindən istifadə etməklə və limitə keçməklə teoremin isbatını almış oluruq.

Məqalənin aktuallığı. Hava proqnozu sahəsində meydana çıxan qeyri-xətti tənliklər sisteminin həllinin varlığının isbatı məqalənin aktuallığını göstərir.

Məqalənin elmi yeniliyi. Qeyri-xətti tənliklər sisteminin Sobolev fəzasında verilməsi məqalənin elmi yeniliyini göstərir.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Məqalədən aln məktəb müəllimləri, eləcə də tələbə və magistrantlar istifadə edə bilərlər.

Ədəbiyyat

1. Кибел И.А. Введение в гидродинамические методы краткосрочных прогноза погоды. М., 1957.

2. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

3. Пастушков Р. С. Численные моделирование взаимодействия конвективных облаков с окружающей их атмосферой. М.: Гидрометеоиздат, 1972.

4. Алиев К, И. Разрешимость одной краевой задачи, возникающей в краткосрочном локальном прогнозе погоды-В сб.: Неклассическая задачи уравнений математической физики. Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1982.

К. Алиев

Одной краевой задачи возникающей в теории атмосферной конвекции

Резюме

В статье доказывается существования решения в пространствах С.Л.Соболева одной краевой задачи, возникающей в теории атмосферной конвекции.

Q. Aliyev

A boundary value problem arising in the theory of atmospheric convection

Summary

In this paper we prove the existence of solutions in spaces, S.L.Soboleva boundary value problem arising in the theory of atmospheric convection.

Redaksiyaya daxil olub: 02.02.2018