Bir sinif sinqulyar tənlik inteqral tənliyin təqribi həlli

Alif Məmmədov
ADPU-nun professoru
Zemfira Tağıyeva
ADPU-nun dosenti
E-mail: sama-qasa@mail.ru

Rəyçilər: tex.e.ü.f.d., dos. Ç.M. Həmzəyev,
ped.ü.f.d., dos. S.S. Həmidov

Açar sözlər: sinqulyar inteqral tənlik, Yevrey funksiyalar sinfi, ədədi nəzəri şəbəkə, interpolyasiya

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, класс функции Жеврея, теоретико-числовые сетки, интерполяция

Key words: singular integral equation, Yevrey class of functions, numerical theoretical network, interpolation

Bu işdə Hilbert tipli nüvəli sinqulyar inteqral tənliyin Yevrey funksiyalar sinfində təqribi həlli məsələsi araşdırılıb. Yevrey sinfində qurulmuş kvadratur və interpolyasiya düsturlarının tətbiqi ilə tənliyin təqribi həlli tapılır və xətalar qiymətləndirilir.

Tərif: f $(x_1,x_2,...,x_s)$ funksiyası qapalı D oblastında təyin edilmiş kəsilməz funksiya və onun müəyyən tərtib törəmələri

$$\left|\frac{\partial^{n_1+n_2+\cdots+n_s} f}{\partial x_1^{n_1}\partial x_2^{n_2}\cdots\partial x_s^{n_s}}\right| \le MH_1^{n_1}H_2^{n_2}\cdots H_s^{n_s}(n_1!)^{\frac{1}{\gamma_1}}(n_2!)^{\frac{1}{\gamma_2}}\cdots(n_s!)^{\frac{1}{\gamma_s}}$$

$n_\iota \ge 0, 0 \le \gamma_\iota \le 1, \iota = 1,2,...,s$

şərtini ödəyirsə, həmin funksiyalar siniflərinə Yevrey tipli funksiyalar sinfi deyirik və $G_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_s}(M.,H_1\cdots H_s)$ ilə işarə edirik. [1]-də bu sinfin periodik funksiyalarının Furye əmsalları qiymətləndirilmiş, kvadratur və interpolyasiya düsturları qurulmuşdur.

Bu düsturların köməyi ilə çoxölçülü Hilbert nüvəli sinqulyar inteqral tənliyin təqribi həllinə baxaq:

$$U(x_1,x_2,\cdots x_s) = f(x_1,x_2,\cdots x_s) +$$
$$+\lambda\int_0^1\cdots\int_0^1 H(x_1,x_2,\cdots,x_s y_1,y_2,\cdots y_s)*Ctg\pi(y_1-x_1)\cdot Ctg\pi(y_2-x_2)\cdots Ctg\pi(y_s-x_s)\cdot$$
$$U(y_1,y_2,\cdots y_s)dy_1dy_2...dy_s \qquad (1)$$

$f(x_1,x_2,...,x_s) \in G_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_s}(M.,H_1\cdots H_s)$,

$H(x_1,...,x_s,y_1,...,y_s) \in G_{2s}(M_1,H_1,...H_s)$

Baxılan sinifdə interpolyasiya çoxhədlisini aşağıdakı kimi təyin edirik:

$$P_n(y_1,y_2,...,y_s) = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\psi_k(y_1,y_2,...,y_s) + O\left(e^{-dN^{\frac{1}{s}}+\ln N}\right) \qquad (2)$$

$V_{M_k}=M_k=\left(\left\{\frac{a_1k}{N}\right\},\left\{\frac{a_kk}{N}\right\}....,\left\{\frac{a_sk}{N}\right\}\right)$ paralelopipedal şəbəkədir, $a_i\left(i=\overline{1,s}\right)$ optimal əmsallardır $[2]$

$$\Psi_k(y_1,y_2,...,y_s)=\frac{1}{N}\sum_{d_1|m_1|^{\gamma_1}+d_2|m_2|^{\gamma_2}+...+d_s|m_s|^{\gamma_s}\le T}e^{2\pi i[m_1\left(y_1-\frac{ka_1}{N}\right)+m_2\left(y_2-\frac{ka_2}{N}\right)+...+m_2\left(y_2-\frac{ka_s}{N}\right)]}$$

$d_i=d_i(H_1,H_2,...,H_s)$, $T=CN^{\gamma}-1$, $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+...+\frac{1}{\gamma_s}$, C-sabitdir.

Sinqulyar inteqral üçün interpolyasiya düsturlarını yazaq

$$J(x_1,x_2,...,x_s)=\int_0^1....\int_0^1 f(y_1,y_2,...,y_s)ctg\pi(y_1-x_1)ctg\pi(y_2-x_2)...ctg\pi(y_s-x_s)dy_1dy_2...dy_s=$$

$$\sum_{k=1}^{n}f(M_k)\int_0^1...\int_0^1\Psi_k(y_1,y_2,...y_s)ctg\pi(y_1-x_1)ctg\pi(y_2-x_2)...ctg\pi(y_s-x_s)dy_1dy_2...dy_s+$$

$$O\left(e^{-\alpha N^{\frac{1}{s}}+\ln N}\right)+\int_0^1....\int_0^1 ctg\pi(y_1-x_1).ctg\pi(y_2-x_2)...ctg\pi(y_s-x_s)dy_1dy_2...dy_s$$

$[3]$-də isbat edilmişdir ki,

$$\int_0^1...\int_0^1 ctg\pi(y_1-x_1)ctg\pi(y_2-x_2)...ctg\pi(y_s-x_s)dy_1dy_2...dy_s=0$$

İndi (1) tənliyinin həllini

$$U(x_1,x_2,...,x_s)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^nU_n(x_1,x_2,....,x_s) \qquad (4)$$

şəklində axtaraq. Əgər U ($x_1,x_2,...,x_s$) həlldirsə , onda

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^nU_n(x_{1,}x_{2,....,}x_n)=f(x_1,x_2,......x_s)+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n+1}\int_0^1...\int_0^1 H(x_1,...,x_s,y_1,....,y_s)ctg\pi(y_1-x_1)\cdot$$

$$ctg\pi(y_2-x_2)....ctg\pi(y_s-x_s)dy_1dy_2...dy_s$$

olar. Burada λ – nın uyğun dərəcələrinə görə əmsalları bərabərləşdirsək alarıq:

$U_0(x_1x_2...x_s)=f(x_1,x_2,...,x_s)$

$$U_1(x_1,x_2,...x_s)=\int_0^1...\int_0^1 H(x_1,x_2,...x_s,y_1,y_2,...y_s)ctg\pi(y_1-x_1)ctg\pi(y_2-x_2)...ctg\pi(y_s-x_s)\cdot$$

$$dy_1......dy_s=\int_{G_s}H(P,Q_1)f(Q_1)\prod_{k=1}^{s}ctg\pi\left(y_k^{(1)}-x_k\right)dQ_1$$

$(P=(x_1,x_2,...x_s))$

$$U_2(x_1,x_2,...,x_s)=\int_{\xi_s}...\int_{\xi_s}H(P,Q_1)H(Q_1Q_2)f(Q_2)\prod_{k=1}^{s}ctg\pi\left(y_k^{(2)}-x_k\right)ctg\pi\left(y_1^{(2)}-y_1^{(1)}\right)\cdot$$

$$ctg\pi\left(y_2^{(2)}-y_2^{(1)}\right)...ctg\pi\left(y_s^{(2)}-y_s^{(1)}\right)dQ_1dQ_2$$

$$U_n(P)=\int_{\xi_{sn}} K(P,Q_1,Q_2,...,Q_n)f(Q_n)\prod_{k=1}^{s} ctg\pi\left(y_k^{(1)}-x_k\right)\prod_{P=2}^{n}\prod_{k=1}^{s} ctg\pi\left(y_k^{(0)}-y_k^{(P-1)}\right)dQ_1dQ_2...dQ_s$$

Burada $Q_\ell=\left(y_1^{(\ell)},y_2^{(\ell)},...y_s^{(\ell)}\right)$, $\ell=1,2,...,n$

$K(P,Q_1,Q_2,...,Q_n)=H\left(x_1,x_2,...,x_n,y_1^{(1)},y_2^{(1)},...y_s^{(1)}\right)\cdot$

$H\left(y_1^{(1)},y_2^{(1)},...,y_s^{(1)},y_1^{(2)},y_2^{(2)},...,y_s^{(2)}\right)*....*H\left(y_1^{(n-1)},y_2^{(n-1)},...,y_s^{(n-1)},y_1^{(n)},y_2^{(n)},...,y_s^{(n)}\right)$

olur.

İsbat olunur ki , [2]

$f_1(x_1,x_2,...,x_s)\in G_{\gamma_1,\gamma_2,...\gamma_s}(M,H_1,H_2,...,H_S)$

$f_2(x_1,x_2,...,x_s)\in G_{\gamma_1,\gamma_2,...\gamma_s}(M,H_1,H_2,...,H_S)$ olsa

$f_1\cdot f_2\in G_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_s}\left(2^s M,H_1,H_2,...,H_S\right)$

olar. Onda

$K(P,Q_1,Q_2,...,Q_S)\cdot f(Q_n)=F(P,Q_1,Q_2,...,Q_S)\in G_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_S}\left(2^{sn}M^{n+1},H_1^{(1)},...H_s^{(1)}\right)$

olur.

Yevrey tipli funksiyar sinfində qurulmuş interpolyasiya düsturundan istifadə etsək alarıq:

$$F(P,Q_1,Q_2,...Q_n)=\frac{1}{N_1^S}\sum_{k_1,k_2,...,k_s=1}^{N_1}F\left(P,M_{k_1},M_{k_2},...M_{k_s}\right)\Psi_{k_1,k_2,...,k_s}(Q_1,Q_2,...,Q_s) \quad (5)$$

$$\frac{1}{N_1^s}\sum_{k_1,k_2,...,k_s=1}^{N_1}F(P,Q_1,Q_2,...Q_n)\cdot\Psi_{k_1,k_2,...k_3}(Q_1,Q_2,...Q_S)=P_{N_1}(Q_1,Q_2,...,Q_n)$$

isbat edək.

Onda alarıq :

$$F(P,Q_1,Q_2,...,Q_n)=P_{N_1}(P,Q_1,Q_2,...,Q_n)+r_{N_1}$$

Nəticədə

$$U_n(P)=\int_{\xi} P_{N_1}(P,Q_1,Q_2,...,Q_n)\prod_{k=1}^{S}ctg\pi\left(y_k^{(1)}-x_k\right)\prod_{p=2}^{n}\prod_{k=1}^{s}ctg\pi\left(y_k^{(p)}-y_k^{(p-1)}\right)dQ_1,dQ_2,...,dQ_n+$$

$$+\int_{\xi.sn} r_{N_1}(P,Q_1,Q_2,..., Q_n)\prod_{K=1}^{S}ctg\,\pi\left(y_k^{(P)}-y_k^{(P-1)}\right)dQ_1,dQ_2,...dQ_n$$

$$\int_{G_{sn}}\psi_{k_1,k_2,...,k_s}(Q_1,Q_2,...,Q_n)\coprod_{k=i}^{s}ctg\pi\left(y_k^{(1)}...x_k\right)\prod_{p=2}^{n}\prod_{k=1}^{s}ctg\pi\left(y_k^{(p)}...y^{(p-1)}\right)dQ_1dQ_2...dQ_n=\Psi_{k_1,k_2,...,k_s}(p)$$

və

$$\int_{G_{sn}} r_{N_1}(P,Q_1,Q_2,...,Q_m)\prod ctg\pi\left(y_k^{(\beta)}-y_k^{(\beta-1)}\right)dQ_1dQ_2...dQ_n=R_{N_1}(p)$$

işarə etsək

$$U_n(P)=\frac{1}{N_1^S}\sum_{k_1,k_2,...k_s=1}^{N_1}F\left(P,M_{k_1},M_{k_2},...M_{k_s}\right)\varphi_{k_1,k_2,...,k_s}(P)+R_{N_1}(P) \quad (6)$$

$U_n(P)$ – nin bu qiymətini (4)-də yerinə yazsaq :

$$U(P)=f(P)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^{\nu+1}\left[\frac{1}{N_1^s}\sum_{k_1,k_2,\dots,k_s=1}^{N_1}F\left(P,M_{k_1},M_{k_2},\dots M_{k_s}\right)\varphi_{k_1,k_2,\dots k_s}(P)+R_{N_1}(P)\right]=$$

$$=\left[\sum_{\nu=N_1+1}^{\infty}\frac{1}{N_1^s}\sum_{k_1,k_2,\dots k_s=1}^{N_1}\lambda^{\nu+1}F\left(P,M_{k_1},M_{k_2},\dots,M_{k_s}\right)\varphi_{k_1,k_2,\dots,k_s}(P)+R_{N_1}(P)\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^{\nu+1}\right]$$

$|\lambda|\le q<1$ olsa

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|\lambda|^{\nu+1}=\frac{q}{1-q}$$

olar

$$\sum_{\nu=N_1+1}^{\infty}\lambda^{\nu+1}\left[\frac{1}{N_1^s}\sum_{k_1,k_2,\dots,k_s=1}^{N_1}F\left(P,M_{k_1},M_{k_2},\dots,M_{k_s}\right)\varphi_{k_1,k_2,\dots,k_3}(P)+R_{N_1}(P)\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda^{\nu+1}\right]=\overline{R}_{N_1}(P)$$

işarə edək, beləliklə alarıq:

$$U(P)=f(P)+\frac{1}{N_1^s}\sum_{\nu=0}^{N_1}\sum_{k_1,k_2,\dots,k_s=1}^{N_1}\lambda^{\nu+1}F\left(P,M_{k_1},M_{k_2},\dots M_{k_s}\right)\cdot\varphi_{k_1,k_2,\dots,k_s}(P)+\overline{R}_{N_1}(P) \qquad (7)$$

$\overline{R}_{N_1}$ - i qiymətləndirsək, D oblastında $\overline{R}_{N_1}\to 0$ olduğunu alarıq. Nəticədə baxılan singulyar inteqral tənliyin təqribi həllini tapırıq .

$$\overline{U}(P)=f(P)+\frac{1}{N_1^s}\sum_{\nu=0}^{N_1}\sum_{k_1,k_2,\dots,k_s}^{N_1}\lambda^{\nu+1}F\left(P,M_{k_1},M_{k_2},\dots M_{k_s}\right)\varphi_{k_1,k_2,\dots,k_s}(P)$$

$$U(P)=\overline{U}(P)+\overline{R}_{N_1}$$

Həlldə iştirak edən inteqralları kvadratur düsturların köməyi ilə hesablayırıq və nəhayət ədədi təqribi həll alınır və bu zaman yaranan xəta qiymətləndirilir.

Məqalənin aktuallığı. İşdə ədədi nəzəri metodların tətbiqi ilə çoxölçülü sinqulyar inteqral tənliyin həllinin tapılması məsələsi araşdırılır.

Məqalənin elmi yeniliyi. Yevrey tipli funksiyalar sinfində çoxölçülü funksiyalar üçün qurulmuş interpolyasiya düsturunun və iterasiya üsulunun tətbiqi ilə çoxölçülü Hilfert nüvəli sinqulyar tənliyin təqribi həlli araşdırılır.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Sinqulyar inteqral tənliklərin təqribi həllinin tapılması praktik mahiyyətə malikdir və geniş tətbiqi əhəmiyyətə malikdir.

Ədəbiyyat

1. Ə.M. Məmmədov, Ş.A.Məmmədov. Вопросы оптимизации вычислений. Киев, 1987.
2. Н.М.Коробов. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., 1963.
3. П.П.Забрайки и др. Интегральные уравнение. М., 1966.

А.Мамедов, З.Тагиева

Приближенное решение одного класса сингулярного интегрального уравнения

Резюме

В работе исследуется сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильбертово типа в классе функций Жеврея.

Применяя интерполяционную формулу для сингулярного интегрального уравнения, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений. Далее можно вычислить многократные интегралы применяя квадратурные формулы.

Наконец, получаются численные приближенные решения данного уравнения и дается оценка погрешности.

A.Mammadov, Z.Taghıyeva

Approximate solution of a class of singular integral equation

Summary

In this paper, we develop a singular integral equation with a Hilbert type main in the class of Yevrey function.

Applying the interpolation formula for the singular integral equation, we obtain a system of nonlinear algebraic equations. Further, it is possible to calculate multiple integrals using quadrature formulas.

Finally, numerical about solutions of the given equation are obtained and an error estimate is given.

Redaksiyaya daxil olub: 22.12.2017