İrrasional tənliklərin müxtəlif üsullarla həlli

Mətləb Ağayarov
SDU-nun dosenti
Xalidə Həsənova
SDU-nun dosenti
Ülkər Babayeva
SDU-nun assistenti
E-mail: abdullayev_ayxan@list.ru

Rəyçilər: r.ü.f.d., dos. M.N. Heydərova,
r.ü.f.d., dos. F.F. Əliyev

Açar sözlər: irrasional tənlik, artan və azalan funksiya, yeni dəyişən daxil etmə, qoşma vuruq, tam kvadratın ayrılması, qiymətləndirmə, vektor üsulu, qrafik üsul

Ключевые слова: иррациональное уравнение, возрастающая и убывающая функция, ввод нового переменного, сопряженный множитель, выделения полного квадрата, оценивания, векторный метод, графический метод

Key words: irrational equation, increasing and decreasing function, enter a new variable, conjugate multiplier, the allocation of the full square estimation, of the vector method, graphical method

İrrasional tənliklərinn həllində bir çox hallarda kvadrata yüksəltmə əməlindən istifadə olunur. Bununla əlaqədar xatırladaq ki, $(f(x))^2 = (g(x))^2$ tənliyinin kökləri $f(x) = g(x)$ tənliyinin köklərindən çox ola bilər; $(f(x))^2 = (g(x))^2$ və $f(x) = g(x)$ tənlikləri $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$ və ya $f(x) \leq 0,\ g(x) \leq 0$ şərtləri eyni zamanda ödəndikdə, yəni hər iki tərəfin işarəsi eyni olduqda eynigüclü olur.

Qeyd edək ki, tənlikdə cüt dərəcəli irrasionallıqlar iştirak etdikdə (məsələn, ikinci və dördüncü dərəcəli köklər və s.) belə tənliklərin təyin oblastı adətən R-dən fərqlənir və onu ya həllin ilk mərhələsində tapmaq lazımdır, ya da tənliyin həllərini özündə saxlayan müəyyən ədədlər küllüsünü tapmaq, yoxlama aparmaqla bu ədədlərdən hansının verilmiş tənliyin həlli, hansının kənar kök olduğunu aydınlaşdırmaq lazımdır.

Tənlikdə irrasionallıqlar daxil olan irrasional tənlikləri kvadrata (kuba və s.) yüksəltmə əməlindən fərqli müxtəlif üsullarla həll etmək olar. Bu üsullardan bir neçəsini əyani olaraq göstərək.

1-ci üsul. Yeni dəyişən daxiletmə.

Misal 1. $(2x+3)^2 - 3\sqrt{x^2-2x-6} = 20(x+3)$ tənliyini həll edin.

Həlli. Əvvəlcə tənlik üzərində aşağıdakı çevirmələri edək:

$$(2x+3)^2 - 3\sqrt{x^2-2x-6} = 20(x+3) \Leftrightarrow 4x^2+12x+9-3\sqrt{x^2-2x-6} =$$

$$= 20x+60 \Leftrightarrow 4x^2-8x-51-3\sqrt{x^2-2x-6} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2-2x-6) - 3\sqrt{x^2-2x-6} - 27 = 0.$$

$\sqrt{x^2-2x-6}=t, t\geq 0$ əvəzləməsi aparaq. Onda $4t^2-3t-27=0$ kvadrat tənliyini alarıq. Bu tənliyi həll etsək, $t_1=3,\ t_2=-\frac{4}{9}$ olar. Əvəzləməmizə qayıtsaq ($t\geq 0$ olduğundan $t=3$ olur) $x^2-2x-15=0$ kvadrat tənliyini alarıq, onun da kökləri $x_1=-3,\ x_2=5$ olur. Yoxlamaqla əmin ola bilərik ki, hər iki kök tənliyi ödəyir.

2-ci üsul. *Tənliyn təyin oblastının tədqiqi.*

Misal 2.$\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x-x^2}=\sqrt{x^2-4x+8}+x-4$ tənliyini həll edin.

Həlli. Dəyişənin mümkün qiymətləri çoxluğunu tapaq:

$$\begin{cases}x-2\geq 0,\\ 6-x-x^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2,\\ x^2+x-6\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2,\\ -3\leq x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Yoxlamaqla əmin ola bilərik ki, $x=2$ verilmiş tənliyin həllidir.

3-cü üsul. Tənliyin hər iki tərəfinin qoşma vuruğa vurulması.

Misal 3. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5$ tənliyini həll edin.

Həlli. Tənliyin hər iki tərəfini $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}$ ifadəsinə qoşma olan $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8}$ ifadəsinə vursaq alarıq: $x+3-x-8=5\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8}\right)$, $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8}=-1.$ Alınan tənliklə verilən tənlik birlikdə

$$\begin{cases}\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5,\\ \sqrt{x+3}-\sqrt{x+8}=-1\end{cases}$$

tənliklər sistemini əmələ gətirir. Alınan sistemi cəbri toplama üsulu ilə həll edək:

$2\sqrt{x+3}=4\Leftrightarrow\sqrt{x+3}=2\Leftrightarrow x=1.$

Yoxlamaqla əmin ola bilərik ki, $x=1$ verilmiş tənliyin həllidir.

4-cü üsul. Dəyişənlər daxil etməklə tənliyi tənliklər sisteminə gətirmə.

Misal 4. $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+7}=4$ tənliyini həll edin.

Həlli. $\sqrt{x+3}=u, \sqrt[3]{x+7}=v$ əvəzləməsini aparaq. Onda $u+v=4$ olar. Birinci bərabərliyin hər iki tərəfini kvadrata, ikinci bərabərliyin hər iki tərəfini kuba yüksəltsək, alarıq:

$x+3=u^2, x+7=v^3.$

Buradan isə $u^2-v^3=-4$ alırıq. Bu tənliklə verilən tənlik birlikdə

$$\begin{cases}u+v=4,\\ u^2-v^3=-4\end{cases}$$

tənliklər sistemini əmələ gətirir.

Alınan tənliklər sistemini həll edək. Sistemin birinci tənliyindən $u=-v+4$ tapıb, ikinci tənlikdə yerinə yazsaq $v^3-v^2+8v-20=0$ tənliyi alınar. Aşkardır ki, $v=2$ bu tənliyin həllidir (2 ədədini sərbəst həddin bölənlərindən biridir), digər həllər isə kompleks ədədlərdir. Deməli, $x+7=2^3$, buradan isə $x=1$ alırıq və yoxlamaqla əmin ola bilərik ki, $x=1$ verilmiş tənliyin həllidir.

5-ci üsul. Tam kvadratın ayrılması.

Misal 5. $\sqrt{cos^2 0{,}5x-6cos0{,}5x+9}-\sqrt{4cos^2 0{,}5x-12cos0{,}5x+9}=1$ tənliyini həll edin.

Həlli. $\sqrt{cos^2 0{,}5x-6cos0{,}5x+9}-\sqrt{4cos^2 0{,}5x-12cos0{,}5x+9}=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(cos0{,}5x-3)^2}-\sqrt{(2cos0{,}5x-3)^2}=1$$

$$\Leftrightarrow |cos0{,}5x-3|-|2cos0{,}5x-3|=1.$$

$-1\le cos0{,}5x\le 1$ olduğundan, $-4\le cos0{,}5x-3\le -2$ və $-5\le 2cos0{,}5x-3\le -1$ olar. Onda $|cos0{,}5x-3|-|2cos0{,}5x-3|=1 \Leftrightarrow (3-cos0{,}5x)-(3-2cos0{,}5x)=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3-cos0{,}5x-3+2\,cos0{,}5x=1 \Leftrightarrow cos0{,}5x=1 \Leftrightarrow x=4\pi n, n\in Z.$$

6-cı üsul. Qiymətləndirmə üsulu.

Misal 6. $\sqrt{x^3-2x^2-4x+8}=-x^3+2x^2+4x-8$ tənliyini həll edin.

Həlli. Tənliyin təyin oblastını tapaq:

$$\begin{cases} x^3-2x^2-4x+8\ge 0,\\ -x^3+2x^2+4x-8\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2x^2-4x+8\ge 0,\\ x^3-2x^2-4x+8\le 0\end{cases} \Leftrightarrow x^3-2x^2-4x+8=0.$$

Göründüyü kimi verilmiş tənliyin həlli $x^3-2x^2-4x+8=0$ tənliyinin həllinə gətirildi. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, sərbəst həddin (8-in) bölənlərindən 2 və -2 bu tənliyin həllidir.

Deməli, verilmiş tənliyin həlli $x=2$ və $x=-2$-dir.

7-ci üsul. Funksiyanın monotonluğu xassəsindən istifadə.

Misal 7. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=6$ tənliyini həll edin.

Həlli. $y=\sqrt{x},\ y=\sqrt{x+3}$ və $y=\sqrt{x+8}$ funksiyaları ciddi artan funksiyalardır. Artan funksiyaların cəmi artan funksiya olduğundan verilən tənliyin ən çoxu bir kökü var. Seçmə üsulu ilə yoxlamaqla tapırıq ki, verilən tənliyin həlli $x=1$-dir.

8-ci üsul. Vektorların tətbiqi.

Misal 8. $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$ tənliyini həll edin.

Həlli. Tənliyin təyin oblastını tapaq:

$$\begin{cases} 1+x\ge 0,\\ 3-x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1,\\ x\le 3\end{cases} \Leftrightarrow -1\le x\le 3.$$

$\vec{a}=\{x;1\}$ və $\vec{b}=\{\sqrt{1+x};\sqrt{3-x}\}$ vektorlarını daxil edək. Aşkardır ki, bu vektorların skalyar hasili tənliyin sol tərəfinə bərabərdir: $\vec{a}\cdot\vec{b}=x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}.$ Bu vektorların uzunluqlarının hasilini tapaq:

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{1+x+3-x}=\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{4}=2\sqrt{x^2+1}.$$

Beləliklə, alırıq ki, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Deməli, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardır. Onda vektorların kollinearlıq şərtinə əsasən $\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$. Alınan tənliyi həll edək:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}} \Leftrightarrow x^2(3-x) = 1 + x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

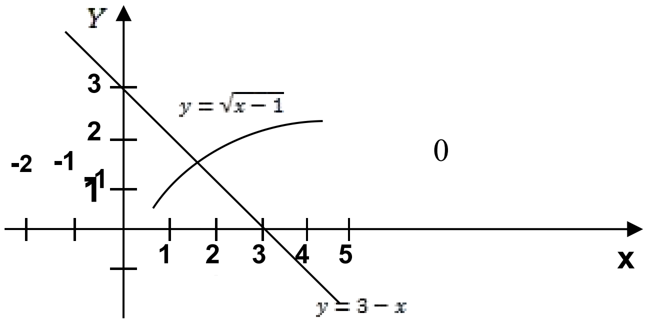
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x - 1 = 0, \\ x^2 - 2x - 1 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = 1, \\ x = 1 \pm \sqrt{2}. \end{matrix}\right.$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, hər üç kök verilmiş tənliyin həllidir.

9-cu üsul. Qrafik üsul.

Misal 9. $\sqrt{x-1} = 3 - x$ tənliyini qrafik üsulla həll edin.

Həlli. $y = \sqrt{x-1}$ və $y = 3 - x$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat sistemində quraq.



Şəkildən görünür ki, $y = \sqrt{x-1}$ və $y = 3 - x$ funksiyalarının qrafikləri yalnız bir nöqtədə kəsişir. Bu nöqtənin absisi 2-yə bərabərdir. Deməli verilmiş tənliyin həlli $x = 2$-dir.

Məqalənin aktuallığı. Orta məktəb "Riyaziyyat, 10" dərsliyində irrasional tənliklərin həllində bir çox hallarda yalnız bir üsuldan, kvadrata yüksəltməklə həll üsulundan istifadə olunur. Mövcud dərsliklərdə bu mövzular kifayət qədər verilmədiyindən baxılan problemin tədqiqinin nəticələri irrasional tənliklərin təliminin intensivləşdirilməsində aktuallıq kəsb edir.

Məqalənin elmi yeniliyi. İrrasional tənliklərin həlli üsullarına əsaslanaraq bir irrasional tənliklərin doqquz müxtəlif üsulla həlli verilmişdir.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Tədqiqatın nəticələrindən riyaziyyatı dərindən öyrənən siniflərdə, şagirdlərin ali məktəblərə qəbul imtahanlarına və olimpiadalara hazırlığı üçün istifadə edilə bilər.

Ədəbiyyat

1. Mərdanov M.C., Yaqubv M.H. və b. Cəbr və analizin başlanğıcı: 10-cu sinif üçün dərslik. Bakı, 2003.

2. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа: Учебник для 11 класса. М: Просвещение, 2009.

3. Олейник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: Учебно-методическое пособие. М.: Дрофа, 2001.

М. Агаяров, Х. Гасанова, У. Бабаева

Решение иррациональных уравнений различными способами

Резюме

В учебнике для общеобразовательных школ 10-го класса было рассмотрено решение иррационального уравнения с помощью возведения в квадрат. В статье существует девять других способов, отличных от этого способа для решения иррациональных уравнений.

M. Aghayarov, Kh. Hasanova, U. Babayeva

The solution of irrational equations in various ways

Summary

In the textbook for secondary schools of the 10th grade, the solution of the irrational equation by means of squaring was considered. There are nine other ways in the article that are different from this method for solving irrational equations.

Redaksiyaya daxil olub: 04.12.2017