Məktəb riyaziyyat kursunda kəsilməzlik və funksiyanın limiti anlayışlarının təlimi

Məmməd Abdulkərimov
pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru,
Bakı Dövlət Universiteti Qazax filialının müəllimi

Rəyçilər: ped.ü.e.d., prof. A.S. Adıgözəlov,
f.-r.ü.f.d., dos. M.Ə. Şahverdiyev

Açar sözlər: kəsilməzlik, funksiyanın kəsilməzliyi, funksiyanın tərifi, funksiyanın limiti, xətti funksiya

Ключевые слова: непрерывность, непрерывности функции, определение функции, функции лимита, линейные функции

Key words: convenience, convenience of the function, a definition of the function, a limit of the function, line function

Məktəb riyaziyyat kursunda riyazi analizin ideyaları və metodlarından geniş istifadə olunur. Riyaziyyatın təlimində əsas anlayışların formalaşmasında müxtəlif məsələlərin həllində analiz elementindən istifadə bacarıqlarına xüsusi diqqət yetirilir. Dərslərdə kəsilməzlik və funksiyanın limiti anlayışların məzmununu açaraq müəllimi: a) öyrənilən anlayışların şagirdlərin başa düşməsinə necə nail olmaq olar? b) Yuxarı sinif şagirdlərinə funksional anlayışlardan, xüsusilə, kəsilməzlik və funksiyanın limitindən necə düzgün istifadə etməyi öyrətmək olar? c) Şagirdlərin diqqətinin bu anlayışların ideya-nəzəri tərəfinə necə istiqamətləndirilməsi məqsədəuyğun olar? ç) Funksional anlayışların tətbiqi xarakterini neçə göstərmək olar?

Kəsilməzlik və funksiya limitinin öyrənilməsinin göstərilən metodik xüsusiyyətləri ilə əlaqədar olaraq müəllimin ilk növbədə bu anlayışların müxtəlif təriflərinin müqayisə edilməsinə müraciət etməsi faydalı olar. Bunun üçün riyazi analizin müasir ali məktəb kurslarında kəsilməzlik və funksiyanın limiti anlayışlarına müxtəlif yanaşmaların olduğunu xatırlatmaq yerinə düşər. Onların əksəriyyətində belə xətt gözlənilir: ilk növbədə funksiya limitinin nöqtədə tərifi ifadə olunur və sonra bunun əsasında funksiyanın kəsilməzliyi anlayışına tərif verilir. Bundan başqa müxtəlif ekvivalent təriflərdən istifadə olunur. Məsələn, nöqtədə funksiyanın kəsilməzliyinə «ε-b» dilində Koşi mənada, Heyne mənada, $\lim f(x)=f(x_0)$ bərabərsizliyinin tətbiqi ilə, filtr $x\to x_0$ anlayışı əsasında arqument artımı vasitəsilə, parçada funksiyanın rəqs etməsi vasitəsilə tərif verilə bilər; nəhayət, bəzi analiz kurslarında funksiyanın kəsilməzliyinin tərifi mücərrəd topoloji fəza anlayışı baxımından əvvəlki təriflərin ümumiləşməsi kimi də verilir. Nöqtədə funksiyanın limitinə tərif verildikdə də analoji situasiya müşahidə olunur.

Müəllimin vəzifəsi onların elmi şərhinin səviyyəsini azaltmaqdan bu anlayışların məzmununun anlaşılan şəkildə şagirdlərin necə çatdırılmasından ibarətdir. X-XI siniflərdə kəsilməzlik və funksiyanın limiti anlayışlarının hansı planda, hansı elmi səviyyədə daxil edilməsi məqsədəuyğundur? Bu suallar xüsusi öyrənilimə mövzusudur.

Şagirdlərlə işlədikdə belə vəziyyəti nəzərə almaq faydalı olur, tarixən kəsilməzlik və funksiyanın limiti anlayışları paralel şəkildə formalaşmışdır. Müasir metodik tədqiqatlar bu məsələyə deyil, anlayışların hansından (limitdən, yoxsa həmin kəsilməzlikdən) başlamağın daha yaxşı olduğuna üstünlük verirlər. Həmin anlayışların öyrənilməsinə nöqtədə funksiyanın kəsilməzliyindən başlamağı mümkün hesab edirik. Belə yanaşmanın şagirdlər üçün daha təbii olduğu özünü təcrübədə doğrultmuşdur: o, əldə olunmuş biliklərə, təbiətdə, həyatda və texnikada kəsilməz və kəsilən hadisə və proseslərə aid konkret misallara əsaslanır. Belə misallar doqquzillik məktəb kursunda kifayət qədərdir. Ona görə də burada daha formal təriflərin qavranılması üçün yaxşı əsas vardır. Riyaziyyatın digər anlayışları kimi, kəsilməzliyin və funksiya limitinin öyrənilməsi vahid metodika və riyazi əsaslar üzərində qurulur. Belə metodik əsasları müəyyən edən kəsilməzlik və funksiyanın limiti anlayışlarının müvəffəqiyyətlə formalaşmasının zəruri tələbələrini təşkil edən şərtlərə, fikrimizcə aşağıdakılar aiddir:

a) doqquzillik məktəbdə hazırlıq işlərinin aparılmasının zəruriliyi (təlimin varislik prinsipindən alınır); b) məktəb riyaziyyatının nəzəri kursunun qurulması üçün elmi bazanın müəyyən edilməsi (təlimin anlaşıqlı olması prinsipindən alınır); c) materialın şərhinin anlaşılan formalarının işlənilməsi (anlayışlara və nəzəriyyəyə şüurlu yiyələnmə məqsədilə). Aşağıda «Cəbr və analizin başlanğıcı» fənninin «Kəsilməzlik və funksiyanın limiti» kimi mühüm bir bölməsinin nümunəsində göstərilən müddəaların qısa izahını göstərək. Funksiyanın kəsilməzliyinin şüurlu qavranılması üçün V-IX siniflərin riyaziyyat dərsliklərində həmçinin, digər əlaqəli fənnlərin dərs vəsaitlərində hazırlıq çalışmaları kifayət saydadır. Bu fizika, kimya və digər fənlərdən kəsilməz və kəsilən proseslərə aid nümunələrdir ki, son nəticədə onları riyazi şəkildə, yəni funksiyalar, onların qrafikləri şəklində təsvir etmək olar. Məsələn, xətti və kvadratik funksiyalar.

Təlimin ilkin mərhələsində cismin «fiziki» yerdəyişməsi, vaxtın örtməsi, maddənin temperaturunun dəyişməsi və i.a. proseslərində kəsilməzliyə aid müxtəlif misallar ola bilər. Burada şagirdlərin təcrübəsi və intuitiv təsəvvürlərindən geniş istifadə edilməsi imkanı vardır.

Belə misalları tədris vəsaitlərində kifayət qədərdir, onları axtarmaq və seçmək üçün xüsusi iş aparmaq lazım deyildir. Onlara başqa nöqteyi-nəzərdən, kəsilməzlik ideyasına tətbiqi baxımdan yanaşmaq lazımdır. Onda qarşıya qoyulan məqsəd əldə olunacaqdır. Beləliklə, çalışmalar sisteminin məqsədyönlü olması, çalışmaların öz yerinə və vəzifəsinə görə istifadə olunması haqqında ideyaya gəlirik.

IX sinfin riyaziyyat kursunda aparılan hazırlıq işləri əsasında limit və kəsilməzlik anlayışlarının öyrənilməsinin aşağıdakı sxemini gözləmək olar:

I. Əvvəlcə «ε-δ» dilində funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyinin tərifi daxil edilir: «Əgər istnilən müsbət ε ədədi üçün elə müsbət δ ədədi tapılarsa ki, $|x-x_0|<\delta$ bərabərsizliyini ödəyən bütün x-lər üçün $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilərsə, f funksiyasına x_0 nöqtəsində kəsilməz funksiya deyilir». Şagirdlər məntiqin və çoxluqlar nəzəriyyəsinin əsas terminləri ilə tanış olarsa (dərnək və ya fakültətiv məşğələlərdə), onda bu tərif aşağıdakı şəkildə yazıla bilər:

$$\forall\varepsilon > o\ \exists\delta > o\ (|x-x_0|<\delta\supset|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$

Formal məntiq elementlərinin tətbiqi təcrübəsi onların səmərəli olduğunu (məsələn, tərifin inkarının qurulmasında) göstərir, kəsilməz və kəsilən funksiyaları düzgün fərqləndirməyə, yeni təriflərin düzgün qurulmasına kömək edir. Bu növ çalışmalar bir də ona görə faydalıdır ki, burada təlimin mühüm faktorları (konkretləşdirmə və ümumiləşdirmə) aydın şəkildə özünü göstərir.

II. Verilmiş tərifin möhkəmləndirilməsinə aid uyğun misallar nəzərdən keçirildikdən sonra nöqtədə funksiya limitinin tərifi ifadə edilir:

«Əgər

$$f(x) = \begin{cases} f(x), x \neq x_0 \text{ olduqda,} \\ A, x = x_0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməzdirsə, onda $x \to x_0$ olduqda A ədədinə f(x) funksiyasının limiti deyilir». Tərifin şərti yazılışı

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ kimidir.

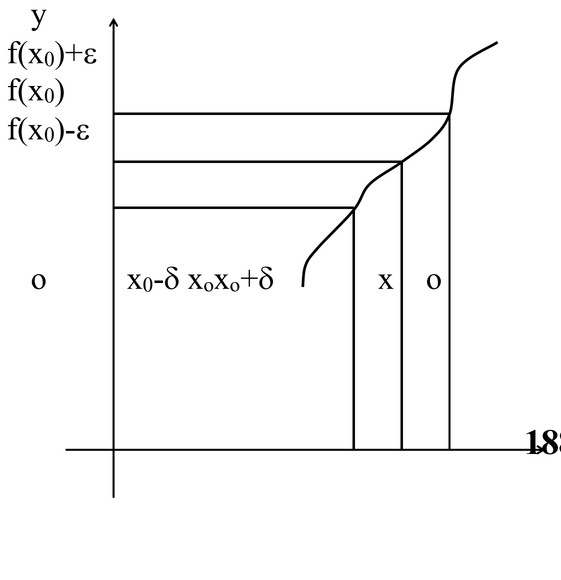
III. Funksiyanın kəsilməzliyinə funksiyanın artımı anlayışı vasitəsilə tərif vermək daha faydalıdır (xüsusən, törəmə anlayışının daxil edilməsində): «Əgər

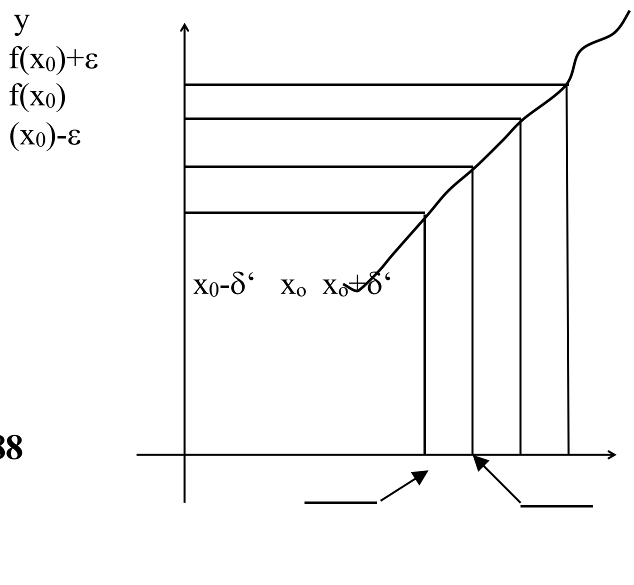
$\Delta x \to o$ olduqda funksiyanın artımı sıfıra yaxınlaşarsa, f funksiyasına x_0 nöqtəsində kəsilməyən funksiya deyilir, yəni $\lim\limits_{\Delta x \to o} \Delta f = 0 olur$ burada $\Delta f = f(x) - a(x_0), \Delta x = x - x_0$ və $\Delta x \to o$ ». Burada qeyd edək ki, məktəb təcrübəsində funksiyanın « ε - δ « dilində kəsilməzliyinin daxil edilməsindən əvvəl onun şərhini nəzərdən keçirmək lazımdır: «Arqumentin böyük olmayan dəyişməsinə funksiyanın kiçik dəyişməsi uyğun gəlir».

IV. Nəhayət aydınlaşdırmaq lazımdır ki, konkret misalların həlli üçün funksiyanın kəsilməzliyini aşağıdakı kimi ifadə etmək əlverişlidir: «Əgər: 1) funksiya nöqtənin özündə və onun müəyyən ətrafında təyin olunmuşdursa, 2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ limiti var və onun qiyməti f(x_0)-a bərabər olarsa f funksiyasına x-x_0 nöqtəsində kəsilməz funksiya deyilir».

Bütün bu təriflərin qarşılıqlı əlaqələri uyğun şəkillər üzərində izah edilir. Müəllim imkan daxilində aşağıdakı anlayışların müxtəlif tətbiq sahələrini şagirdlərə aydınlaşdırmalıdır: «funksiyanın kəsilmə nöqtələrinin təsnifatı», «funksiyanın kəsilməzliyinin isbatı», «kəsilməzlik və diferensiallaşma arasında əlaqə», «təqribi hesablamalar», «parçada və müəyyən çoxluqda kəsilməz funksiyanın tərifi və xassələri», «kəsilməz funksiyanın xassələrinin tədqiqi və onların tətbiqi (çoxhədlilərin və digər funksiyaların köklərinin hesablanması, ekstremal qiymətlərin tapılması və s. üçün).

Həmişə olduğu kimi, kəsilməzliyin və funksiya limitinin tərifini qrafik nümayiş etdirmək faydalıdır. Funksiya tərifinin «ε-δ« dilində illüstrasiyasına aid bir mühüm mülahizəni qeyd edək. Tərifin başa düşülməsində ciddi çətinlik tərifdə ifadə edilən «istənilən ε üçün uyğun δ«-nin şəkildə axtarılması təşkil edir. Ancaq bu çətinlik sünidir və ona görə baş verir ki, xüsusi olaraq elə δ seçmək lazım gəlir ki, x_0 nöqtəsi [-δ;+δ] parçasının orta nöqtəsi olsun (şəkil 1). Lakin müəyyən funksiyanın qrafiki üzərində təsadüfi seçilən nöqtə üçün x_0 nöqtəsindən bərabər məsafədə parçalar alınmır (şəkil 2).





Şəkil 1.

Kifayət qədər incə olan bu vəziyyətdən çıxış yolu aşağıdakı kimidir: f(x_0) nöqtəsinin ε ətrafı seçilir və daha sonra δ ətrafını elə götürmək lazımdır ki, δ [1] ətrafını elə götürmək lazımdır ki, $\delta^{/} = \min\{x_0 - \delta; x_0 + \delta\}$ olsun. Onda ε ətraf azalacaq və: « | x-x_0<δ' bərabərsizliyindən bütün x-lər üçün |f(x)-f(x_0)|<ε bərabərsizliyi alınır» ifadəsi ilə tam uyğunluq alırıq.

Funksiyanın kəsilməzliyi anlayışının formalaşması məsələsinə uğurla cavab verən, anlayışın mahiyyətini açan, onun tətbiqini göstərən bir neçə çalışmanı nəzərdən keçirmək olar.

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{|x-1|}, x < 1 \text{ olduqda} \\ \sqrt{x-1}, x \geq 1 \text{ olduqda} \end{cases}$

funksiyanın qrafikini qurun. x-in elə qiyməti varmı ki, f(x)=-0,5 olsun? Kəsilmə nöqtəsində bu funksiyanın qiymətini göstərin.

2. Kəsilməzliyin və nöqtədə funksiya limitinin tərifləri nə ilə fərqlənirlər? Funksiyanın nöqtədə (parçada) kəsilməzliyi anlayışından harada istifadə olunur?

3. Funksiyaları

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-1}$; c) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

hansı nöqtələrdə kəsilirlər? Bu funksiyaların qrafiklərini qurun. Kəsilmə nöqtəsi ətrafında bu funksiyaların özünü aparmasındakı fərqi aydınlaşdırın.

4. f funksiyası

$$f(x) = \begin{cases} o, x < \text{olduqda} \\ \text{x}, 0 \leq \text{x} < 1 \text{ olduqda,} \\ \text{-} \text{x}^2 + 4x - 2, \ 1 \leq \text{x} < 3 \text{ olduqda,} \\ 4 \text{ - x}, \ \text{x} \geq 3 \text{ olduqda} \end{cases}$$

kimi təyin olunmuşdur. Bu funksiya kəsilməzdirmi?

5. Parçada kəsilməz funksiyanın xassələrindən istifadə edərək

x^5-3x=1

tənliyinin 1 və 2 ədədləri arasında yerləşən heç olmasa bir kökü olduğunu göstərin.

Mövzunun aktuallığı. Məktəbdə öyrədilən kəsilməzlik, funksiyanın kəsilməzliyi, funksiyanın limiti anlayışları metodiki üsulla şagirdlərin bilik səviyyəsinə uyğun izah edilməsidir.

Məqalənin elmi yeniliyi. Elmi yenilik kəsilməzlik, funksiyanın kəsilməzliyi, funksiyanın limiti anlayışları metodiki baxımdan şagirdlərin mənimsəyəcəyi tərzdə verilməsindən ibarətdir.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Riyaziyyat müəllimlərinin dərsdə kəsilməzlik, funksiyanın kəsilməzliyi, funksiyanın limiti anlayışlarına aid çalışmalar həllində, şərh olunan nümunələrdən istifadə etmələrinə imkan verəcəkdir.

Ədəbiyyat

1. Qəhrəmanova N. və b. Riyaziyyat-10. Bakı, 2017.
2. Mərdanov M.C. və b. Cəbr və analizin başlanğıcı: 10 və 11-ci siniflər üçün dərslikilər. Bakı, 2009.
3. Mərdanov M.C. və b. Cəbr və analizin başlanğıcı: 10 və 11-ci siniflər üçün dərslkilər. Bakı, 2010.
4. Həmidov S.S. "Cəbr və analizin başlanğıcı" kursunun tədrisinə dair. Bakı, 1989.
5. Башмаков А.В. Алгебра и начала анализа.. М., 1993.

М. Абдулкеримов

Обучения понятия непрерывности и лимит функций в школьном курсе математики

Резюме

В статье сторона непрерывности функций изложена в соответствии с уровнем знаний учащихся. Функции лимиты используются на практике. Представлены задания, опирающиеся на опыт учителей.

M. Abdulkarimov

The instruction of limit concept of function and school math course

Summary

The definition of convenience of the function is explained according to level of students' kuovoledge at the article. The limit of the function is interpreted practically. Exercises are given oaring to teachers experiences.

Redaksiyaya daxil olub: 01.05.2018