Transendent funksiyalar daxil olan ifadələrin törəməsi

Şəlalə Yaqubova
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
E-mail: shelale.yaqubova.95@gmail.com

Rəyçilər: ped.ü.e.d., prof. A.S. Adıgözəlov,
ped.ü.f.d., dos. A.Q. Cəfərov

Açar sözlər: törəmə, funksiya, triqonometriya, tərs triqonometrik funksiya, arksinus, arkkosinus, arktangens, arkkotangens
Ключевые слова: производные, функция, тригонометрия, обратная тригонометрический функция, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс
Key words: derivative, function, trigonometry, inverse trigonometric function, arcsin, arccos, arctan, arcctan

Təbiətdə elə hərəkətlər müşahidə olunur ki, onlar müəyyən vaxtdan bir təkrarlanır. Belə hərəkətlər dövri hərəkətlər adlanır, onların riyazi ifadəsi isə dövri funksiyalardır.

Harmonik rəqsi hərəkət qanunu y= Asinωt düsturu ilə verilir. Burada y- rəqs edən nöqtənin başlanğıc vəziyyətdən etdiyi meyl, A- nöqtənin rəqsi hərəkətdəki maksimal meylini ifadə edən amplitud, t- zaman, ω- çevrə üzərində köməkçi nöqtənin bucaq sürətidir. ω=$\frac{2\pi}{t}$ – dir, T- sabit kəmiyyət olub rəqsin dövrünə lazım olan zamandır.

Harmonik hərəkətləri yaxşı öyrənmək üçün hər şeydən əvvəl triqonometrik funksiyalardan sinusu və kosinusu diferensiallamağı öyrənmək zəruridir.

Tutaq ki, y= sin(ax +b) funksiyası verilmişdir. Sinusoid üzərində M(x;y) nöqtəsini götürək.

1)Həmin qrafik üzərində M nöqtəsinə yaxın $M_1(x_1;y_1)$ nöqtəsini götürsək, funksiyanın həmin nöqtədəki qiyməti uyğun olaraq y_1= sin(ax_1+b) olacaqdır, burada x_1= x+Δx – dir.

2)M nöqtəsindən M_1 nöqtəsinə keçərkən funksiyanın artımını hesablayaq:

Δy= y_1-y = sin(ax_1+b) – sin(ax+b) = sin (a(x+Δx) +b) – sin (ax+b) = sin (ax+b)cos(aΔx) + cos(ax+b) sin(aΔx) – sin(ax+b) = cos (ax+b)sin (aΔx) – sin(ax+b)(1-cos(aΔx))= cos(ax+b)sin(aΔx)- $2sin^2\frac{a\Delta x}{2}$ sin(ax+b)

3) Δy və Δx- in aşağıdakı kimi nisbətini düzəldək:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a\sin(a\cdot\Delta x)}{a\Delta x}\cos(ax+b)-2\,\frac{\sin\frac{a\Delta x}{2}}{\frac{a\Delta x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{a\Delta x}{2}}{\frac{a\Delta x}{2}}\cdot a^2\frac{\Delta x}{4}\sin(ax+b).$$

Δx sıfra yaxınlaşarkən $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbətinin limitini tapaq:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\cdot 1\cdot\cos(ax+b) - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{a^3}{4}\cdot 0 = a\cos(ax+b)$$

Deməli,

$$[\sin(ax+b)]' = a\cos(ax+b).$$

Burada 2 xüsusi hala baxaq:

1) Tutaq ki, b=0 – dır, onda $(\sin ax)'$ =a cosax alarıq.
2) Tutaq ki, b=0 , a=1- dir, onda $(sinx)'$= cosx alarıq.

Misallar.

1) y= sin5x olduqda y' - i tapın.

$\mathbf{y}' = (\mathbf{sin5x})'$= 5cos5x

2) y= 7 sin(4x-3) funksiyasının törəməsini tapaq.
y′=(7sin(4x- 3))′= 7·4 cos(4x-3)= 28 cos(4x-3)
3) y =x^4· sin4x, y′ = x^4 · (sin4x)′ + (x^4)′ ·sin4x = 4x^4cos4x + 4x^3sin4x

Məlumdur ki,

y= cos (ax+b) = sin $\left[\frac{\pi}{2} + (ax+b)\right]$- dir.

Onda

y′= $[\cos(ax+b)]'$ = $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + ax + b\right)\right]'$ =a cos $\left[\cos(ax+b) + \frac{\pi}{2}\right]$ = -a sin(ax+b) olar.

Deməli: $[\cos(ax+b)]'$= - asin(ax+b)

Burada da yuxarıdakı iki xüsusi halı qeyd etmək lazımdır:
1) b=0 olarsa,(cosax)′= -a sinax.
2) b=0 , a=1 olarsa,(cos)′= -sinx.

Aşağıdakı funksiyanı differensiallayaq:
1) y= -2cos(1-x); y′= -2sin(1-x)

Sinus və kosinusun törəmələrinin düsturlarından istifadə edərək tangens və kotangensin törəmə düsturlarını çıxaraq:

tg′x=$\left(\frac{sinx}{cosx}\right)' = \frac{(sinx)'cosx-(cosx)'sinx}{cos^2x} = \frac{cos^2x+sin^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$,

ctg′x = $\left(\frac{cosx}{sinx}\right)' = \frac{(cosx)'sinx-(sinx)'cosx}{sin^2x} = -\frac{sin^2x-cos^2x}{sin^2x} = -\frac{1}{sin^2x}$.

Tərs triqonometrik funksiyaların törəməsi: y= arcsin x, x$\in[-1;1]$ funksiyası x=siny , y $\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ funksiyasının tərsidir. Tərs funksiyanı tapmaq qaydasına əsasən x$\in$ (-1;1) üçün

$$(srcsinx)' = \frac{1}{(siny)'} = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\cos(arcsinx)}$$

alarıq.

cos(arcsinx)= $\sqrt{1-sin^2(arcsinx)} = \sqrt{1-x^2}$ olduğundan , alarıq ki,

$$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1).$$

Oxşar qayda ilə göstərmək olar ki,

$$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1).$$

y= arctgx, x $\in R$ funksiyası x= tgy, y $\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ funksiyası tərsi olduğu üçün tərs funksiyanın tapılması qaydasını tətbiq etsək, alarıq ki,

$(\text{arctgx})' = -\frac{1}{(tgy)'} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2 y}} = cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

Oxşar qayda ilə göstərmək olar ki, (arctgx)′= $-\frac{1}{1+x^2}$

İndi loqarifmik funksiyanın törəməsi üçün düstur çıxaraq. Bütün müsbət x-lər üçün $\log_a{}'x = \frac{1}{xlna}$.

Bu düsturu isbat etmək üçün fərz edək ki, f(x) = a^x. Onda onun tərs funksiyası g(x) = $\log_a x$ və f′(x) = a lna olacaqdır. Əsas loqarifmik eyniliyə əsasən və tərs funksiyanın törəməsinin düsturuna görə

$\log_a{}'x = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{a^{\log_a x} lna} = \frac{1}{xlna}$ (1) düsturu isbat olundu.

Adətən (1) düsturunun xüsusi halını - natural loqarifmin törəməsi düsturunu qeyd edirlər: ln′x= $\frac{1}{x}$ (2)

Bu düstur a=e olduqda (1) düsturundan alınır , çünki lne=1.

Misal. f(x)= $\log_4(2-5x)$ funksiyasının törəməsini hesablayaq.

Mürəkkəb funksiyanın törəməsini hesablama qaydasına və (1) düsturuna görə

f′(x)= $(\log_4(2-5x))' = \frac{(2-5x)'}{(2-5x)ln4} = \frac{-5}{(2-5x)ln4}$

f(x) = $\frac{1}{x}$ funksiyası iki aralıqda təyin edilmişdir:

R_x=]0; ∞[və]-∞; 0[(2) düsturundan çıxır ki, R_x çoxluğunda onun lnx ibtidai funksiyası vardır.

Göstərək ki,]- ∞; 0[aralığında f funksiyasının ibtidai funksiyalarından biri ln(-x) funksiyasıdır. Doğrudan da,

$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = (-\frac{1}{x})(-1) = \frac{1}{x}$

Məqalənin aktuallığı. Toxunduğumuz mövzunun törəmənin öyrənilməsində rolu böyükdür. Müşahidələr göstəsrir ki, məktəb riyaziyyatı tədrisində transendent funksiyalar daxil olan ifadələrin törəməsi mövzusunun şagirdlər tərəfindən öyrənilməsində müxtəlif çətinliklərə rast gəlinir. Bu nöqteyi-nəzərdən transendent funksiyalar daxil olan ifadələrin törəməsinin araşdırılması aktuallıq kəsb edir.

Məqalənin elmi yeniliyi. Daha səmərəli üsullar seçməklə transendent funksiyalar daxil olan ifadələrin törəməsi daha sadə şəkildə şagirdlərə öyrədilməsi metodikasından ibarətdir. Buna görə də material müəllimlər tərəfindən şagirdlərə düzgün şəkildə mənimsədilməlidir.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Bu mövzu ən əsas orta məktəb kursunda, həmçinin elmi tədqiqat universitetlərində istifadə edilir.

Ədəbiyyat

1. Mərdanov M.C. və b. Cəbr və analizin başlanğıcı: 10-cu siniflər üçün dərslik. Bakı, 2013.

2. Qəhrəmanova N. və b. Riyaziyyat: 10-cu siniflər üçün dərslik. Bakı, 2016.

3. Mərdanov M.C. və b. Cəbr və analizin başlanğıcı: 11-ci siniflər üçün dərslik. Bakl, 2013.
4. Qəhrəmanova N. və b. Riyaziyyat: 11-ci siniflər üçün dərslik. Bakı, 2016.
5. Məmmədov R.H. Riyaziyyat: Abituriyentlər üçün dərs vəsaiti. Bakı, 1978.

Ш. Ягубова

Выражение производного, в котором содержится трансцендентные функции

Резюме

Выражение производного, в котором содержится трансцендентные функции, является основным из понятий в математике. В статье рассматривается основные правила, примеры, их методы решения, способ решения выражений производного, в котором содержится трансцендентные функции. В некоторых выражениях даны не только их решения, но и их доказательства. Так же дана информация об обратных тригонометрических функциях.

Sh. Yaqubova

Derivative of expressions which include transcendent functions

Summary

Derivative of expressions which include transcendent functions are the one of the main conception, in this article there can be essential rules samples, solhtion ways, solution methods related to derivative of expressions of transcendental functions. It is shown the expression of derivative solution as well as proofs. Also it is given information about inverse trigonometry.

Redaksiyaya daxil olub: 06.04.2018