Bir tənliklər sisteminin müxtəlif üsullarla həlli

Mətləb Ağayarov
SDU-nun dosenti
Növrəstə Bayramova
SDU-nun assistenti
Aynurə Əliyeva
SDU-nun böyük laborantı
E-mail: abdullayev_ayxan@list.ru

Rəyçilər: r.ü.f.d., dos. G.İ. Qasımova,
r.ü.f.d., dos. İ.S. Səfərli

Açar sözlər: tənliklər sistemi, əvəzetmə üsulu, müstəvi, sfera
Ключевые слова: система уравнений, метод подстановки, плоскость, сфера
Key words: the system of equations, the method of replacement, plane, sphere

Məlumdur ki, ikidərəcəli tənliklər sistemini (verilən məqalədə üç məchullu ikidərəcəli tənliklər sistemini) həll etmək üçün müxtəlif üsullardan istifadə olunur. Bu üsullardan biri əvəzetmə üsuludur. Lakin elə elə tənliklər sistemi var ki, onu söylədiyimiz üsulla həll etmək mümkün olmur. Oxucuya təqdim olunan məqalədə bir tənliklər sisteminin həlli üçün daha səmərəli üsullar verilmişdir.

Psixoloqlar müəyyən ediblər ki, hər hansı bir riyazi məsələni bir neçə üsulla həll etmək, eyni tip məsələdən bir neçəsini həll etməkdən daha çox faydalıdır.

XX əsrdə yaşamış ingilis riyaziyyatçısı və pedaqoqu U.U. Soyer yazırdı: "Cəbri öyrənən insan üçün eyni bir məsələni müxtəlif üsullarla həll etmək daha faydalıdır, nəinki üç-dörd fərqli məsələni həll etmək. Eyni bir məsələni müxtəlif üsullarla həll etdikdə müqayisə yolu ilə hansı üsulun daha qısa və səmərəli olduğunu aydınlaşdırmaq olar. Qeyd edilən təcrübəni təkmilləşdirir".

Şagirdin müxtəlif həll üsullarını nəzərdən keçirməsi, onlardan ən rasional üsulunu seçməsi onda düşünmək, müzakirə etmək, düzgün qərar çəxarmaq kimi vərdişlər aşılayır.

Bir məsələnin müxtəlif üsullarla həlli şagirdə öz riyazi bilik ehtiyatlarını tətbiq etmək imkanı verir.

Beləliklə, məsələnin müxtəlif üsullarla həlli şagirdlərdə təfəkkür çevikliyinin formalaşmasını tərbiyə edir.

Tənliklər sistemini həll edin: $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12. \end{cases}$

1-ci üsul. Tənliklər sisteminin birinci tənliyinin hər tərəfini (-4)-ə vurub ikinci tənliklə toplasaq

$$-4x - 4y - 4z + x^2 + y^2 + z^2 = -12$$

və ya

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 12 = 0$$

alarıq.

Buradan isə $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ y-2=0, \\ z-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ y=2, \\ z=2. \end{array}\right.$

Deməli, $x=y=z=2$, yəni tənliklər sisteminin həlli $(2;2;2)$ üçlüyüdür.

2-ci üsul. Tənliklər sisteminin birinci tənliyindən z-i x və y ilə ifadə edib ikinci tənlikdə nəzərə alsaq

$z=6-x-y, x^2+y^2+(6-x-y)^2=12$

alarıq. Axırıncı tənlik üzərində çevirmələr aparmaqla onu

$x^2+(y-6)x+y^2-6y+12=0$

şəklinə gətirək. y-ə parametr kimi baxsaq, alınan tənlik x-ə nəzərən kvadrat tənlikdir. Bu tənliyi həll edək:

$D=(y-6)^2-4(y^2-6y+12)=-3(y-2)^2\leq 0.$

y-in istənilən qiymətində $-3(y-2)^2\leq 0$ olduğundan, $D\leq 0$. Deməli, verilən tənliyin həlli olması üçün yalnız $D=0$ olmalıdır. Bu isə $y=2$ olduqda mümkündür. Onda

$x=\frac{-(y-6)}{2}=\frac{-(2-6)}{2}=2, z=6-x-y=6-2-2=2.$

Deməli, $x=y=z=2$, yəni tənliklər sisteminin həlli $(2;2;2)$ üçlüyüdür.

3-cü üsul. Tənliklər sisteminin birinci tənliyinin hər tərəfini kvadrata yüksəldib, alınan tənliklə ikinci tənliyi tərəf-tərəfə çıxaq:

$(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=36-12.$

Buradan isə alırıq ki,

$2xy+2yz+2xz=24$ və ya $2xy+2yz+2xz=2\cdot 12.$

$x^2+y^2+z^2=12$ olduğundan $2xy+2yz+2xz=2(x^2+y^2+z^2)$ olar. Onda

$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz=0.$

Axırıncı bərabərliyi $(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2=0$ şəklində yazmaq olar. Buradan da $x=y=z$ alınır. Tənliklər sisteminin birinci tənliyini nəzərə almaqla $x=y=z=2$ olduğunu tapırıq.

Deməli, tənliklər sisteminin həlli $(2;2;2)$ üçlüyüdür.

4-cü üsul. Yoxlamaqla əmin ola bilərik ki, $x=y=z=2$ üçlüyü tənliklər sisteminin həllidir. İsbat edək ki, tənliklər sisteminin başqa həlli yoxdur.

Tutaq ki, $a=x-2, b=y-2, c=z-2$. Onda tənliklər sisteminin birinci tənliyini

$a+b+c=x+y+x-6=0$

şəklində yazmaq olar. İkinci tənliyi sadələşdirək:

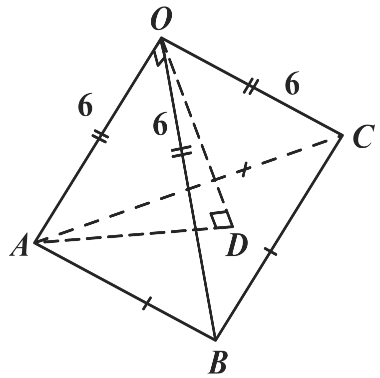
$(a+2)^2+(b+2)^2+(c+2)^2=12$ və ya

$a^2+b^2+c^2+4(a+b+c)=0.$

Burada $a+b+c=x+y+x-6=0$ şərtini nəzərə alsaq, $a^2+b^2+c^2=0$

alarıq. Buradan isə $a = b = c = 0$ və deməli, $x - 2 = 0, y - 2 = 0, z - 2 = 0$, yəni $x = y = z = 2$.

5-ci üsul. Qeyd edək ki, tənliklər sisteminin birinci tənliyi koordinat oxlarını $A(6;0;0), B(0;6;0); C(0;0;6)$ nöqtələrində kəsən müstəvinin, ikinci tənliyi isə mərkəzi koordinat başlanğıcında, radiusu $R = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ olan sferanın tənliyidir. Tənliklər sistemini həll etmək üçün müstəvi ilə sferanın kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarını tapmaq lazımdır. Bunun üçün isə sferanın radiusu ilə sferanın mərkəzindən bu müstəviyə qədər olan məsafəni müqayisə etmək lazımdır.



Bundan ötrü həcmlərin müqayisəsi üsulu ilə $OABC$ tetraedrinin hündürlüyünü hesablayaq:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot OD = \frac{1}{3}S_{\Delta OAB} \cdot OC. \qquad (1)$$

Asanlıqla görmək olar ki, ABC üçbucağı düzgün üçbucaqdır. Çünki bu üçbucağın tərəfləri bir-birinə bərabər olan AOB, BOC, AOC düzbucaqlı üçbucaqlarının hipotenuzlarıdır. Onda $AB = BC = AC = 6\sqrt{2}$.

Deməli, $S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\cdot 36\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}, OC = 6, S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6 = 18.$

Bunları (1)-də nəzərə alsaq, $18\sqrt{3}\cdot OD = 18\cdot 6$ alarıq, buradan isə

$$OD = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Beləliklə, alırıq ki, $OD = R = 2\sqrt{3}$, yəni sferanın radiusu onun mərkəzindən müstəviyə qədər olan məsafəyə bərabərdir. Bu isə o deməkdir ki, müstəvi ilə sferanın bir toxunma nöqtəsi var. Deməli, verilmiş tənliklər sisteminin yeganə həlli var: $x = y = z = 2$.

Məqalənin aktuallığı. Baxılan problemin tədqiqinin nəticələri qeyri-xətti tənliklər sisteminin təlimi prosesinin intensivləşdirilməsində, baxılan üsullardan istifadə etmə bacarıqlarının, vərdişlərinin formalaşdırılmasında xüsusi aktuallıq kəsb edir.

Məqalənin elmi yeniliyi. Cəbri və həndəsi üsullara əsaslanaraq bir tənliklər sisteminin beş müxtəlif üsulla həlli verilmişdir.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Tədqiqatın nəticələrindən riyaziyyatı dərindən öyrənən siniflərdə, şagirdlərin ali məktəblərə qəbul imtahanlarına və olimpiadalara hazırlığı üçün istifadə edilə bilər.

Ədəbiyyat

1. M. Mərdanov, S. Mirzəyev, Ş. Sadiqov. Həndəsə: 11-ci sinif üçün. Bakı: Çaşıoğlu, 2014.
2. H. Hüseynov, V. Dyatlov. Riyaziyyat (metodlar, çalışmalar, həllər). Bakı: Elm, 1998.

М. Агаяров, Н. Байрамова, А. Алиева

Решение системы уравнений различными способами

Резюме

В учебнике для общеобразовательных школ 11-го класса было рассмотрено решение системы уравнений с помощью методам подстановки. В статье существует пять других методов, отличающиеся от этого метода для решения таких систем уравнений.

M. Aghayarov, N. Bayramova, A. Aliyeva

Different ways of solution of system of equations

Summary

In the textbook for secondary schools of the 11th grade, the solution of the system of equations was considered using substitution methods. There are five other methods that differ from this method for solving such systems of equations.

Redaksiyaya daxil olub: 12.02.2018