Kompleks ədədlərin həndəsi məsələlərin həllinə tətbiqi

Arif İsmayılov
pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru
E-mail: arifismayilov3151@gmail.com

Rəyçilər: r.e.d., prof. H.İ. Aslanov,
f.-r.e.n., dos. M.Ə. Şahverdiyev

Açar sözlər: kompleks ədəd, kompleks müstəvi, qoşma kompleks ədəd, radius-vektor, eyniistiqamətli vektor, əksistiqamətli vektor, skalyar hasil, kollinearlıq

Ключевые слова: комплексное число, комплексная плоскость, комплексно-сопряженное число, радиус-вектор, сонаправленный вектор, противоположно направленный вектор, скалярное произведение, коллинеарность

Key words: complex number, complex plane, complex conjugate number, radius vector, co-directional vector, opposite directed vector, scalar product, collinearity

Kompleks ədədlər nəzəriyyəsinin planimetriya məsələlərinin həllinə tətbiqi böyük səmərə verir; bu imkan verir ki, planimetriya məsələlərinin həlli zamanı hesablama işləri hazır düsturların köməyilə asanlıqla yerinə yetirilsin. Bunu misallarla şərh edək.

Hər şeydən əvvəl qeyd edək ki, müstəvinin hər bir M nöqtəsinə bir $z = x + iy$ kompleks ədədi və əksinə hər bir z kompleks ədədinə müstəvinin bir nöqtəsi uyğundur. z ədədinə M nöqtəsinin komleks koordinatı deyəcəyik. Həmçinin $z = x + iy$ kompleks ədədinə qoşma kompleks ədədi $\bar{z} = x - iy$ kimi göstərəcəyik.

1. İki nöqtə arasındakı məsafə. Tutaq ki, müstəvi üzərində iki $A(z_1)$ və $B(z_2)$ nöqtələri verilib. Onda $\overrightarrow{OA}$ radius-vektorunun koordinatı z_1, $\overrightarrow{OB}$ radius-vektorunun koordinatı z_2 olar. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ və $\overline{z_2 - z_1} = \bar{z}_2 - \bar{z}_1$ bərabərliklərindən istifadə etsək, alarıq:

$$AB^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 = |z_2 - z_1|^2 = (z_2 - z_1) \cdot (\overline{z_2 - z_1}) = (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1).$$

Beləliklə, müstəvinin iki $A(z_1)$ və $B(z_2)$ nöqtələri arasındakı məsafəni aşağıdakı düsturun köməyi ilə hesablamaq olar:

$$AB^2 = (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1).$$

2. Çevrənin tənliyi. Mərkəzi $K(z_0)$ nöqtəsində və radiusu R olan çevrə tənliyini almaq üçün çevrənin ixtiyari $M(z)$ nöqtəsindən mərkəzə qədər məsafələrin R -ə bərabərliyi şərtindən istifadə olunur; onda alarıq:

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2.$$

3.Parçanın verilmiş nisbətdə bölünməsi. Tutaq ki, C nöqtəsi AB düz xəttinin üzərində yerləşir və $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$ ($\lambda \in R$, $\lambda \neq -1$). Belə halda deyirlər ki, C nöqtəsi AB parçasını λ nisbətində bölür. A, B və C nöqtələrinin kompleks koordinatlarını uyğun olaraq z_1, z_2 və z_3 ilə işarə edək. Onda yuxarıdakı vektorial bərabərliyi $z_3 - z_1 = \lambda(z_2 - z_3)$ şəklində yazmaq olar; buradan

$$z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Əgər $\lambda = 1$ olarsa, onda C nöqtəsi AB parçasını yarıya bölür:

$$z_3 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Əgər $\frac{1}{1+\alpha} = \alpha$ və $\frac{\lambda}{1+\lambda} = \beta$ işarə etsək, onda

$$z_3 = \alpha z_1 + \beta z_2$$

alarıq ki, burada $\alpha \in R$, $\beta \in R$, $\alpha + \beta = 1$. Bu sonuncu bərabərlik üç nöqtənin - $A(z_1)$, $B(z_2)$ və $C(z_3)$ bir düz xətt üzərində yerləşməsi üçün kafi şərt adlanır.

4. Vektorların skalyar hasili. $\overrightarrow{OA}$ və $\overrightarrow{OB}$ vektorlarının skalyar hasilini A və B nöqtələrinin uyğun olaraq kompleks koordinatları olan z_1 və z_2 ilə ifadə edək. Bunun üçün $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2$ cəmini x_1, y_1, x_2, y_2 ədədləri ilə ifadə edək:

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) = 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Buradan:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2). \qquad (1)$$

İxtiyari iki $\overrightarrow{AB}$ və $\overrightarrow{CD}$ vektorlarının skalyar hasili üçün düstur çıxaraq. Tutaq ki, $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$, $D(z_4)$ olduğu məlumdur, onda

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}.$$

(1) düsturundan istifadə etsək, alarıq:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(z_2\bar{z}_4 - \bar{z}_2 z_4 - z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2 z_3 - z_1\bar{z}_4 - \bar{z}_1 z_4 + z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3).$$

Beləliklə,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\big((z_1 - z_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_3 - z_4)\big).$$

Əgər $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ olarsa, onda

$$(z_1 - z_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_3 - z_4) = 0$$

olar. Sonuncu bərabərliyi aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = -\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{\bar{z}_3 - \bar{z}_4}. \qquad (2)$$

İxtiyari iki kompleks ədəd üçün $\bar{z}_m - \bar{z}_n = \overline{z_m - z_n}$ və $\bar{z}_p : \bar{z}_p = \overline{q_p : q_q}$ münasibətləri doğru olduğundan belə nəticə çıxarmaq olar:

(2) bərabərliyi $z = -\bar{z}$ şəklindədir. Əgər $z = x + iy$ olarsa, onda $-\bar{z} = -(x - iy) = -x + iy$. Buna görə $z = -\bar{z}$ bərabərliyinə əsasən $x + iy = -x + iy$ yaza bilərik. Buradan isə $x = -x$ bərabərliyi yalnız $x = 0$ olduqda doğru olar. Bu isə o deməkdir ki, $z = iy$ şəklindədir.

5. Vektorların kollinearlığı. Düz xətlərin paralelliyi. Tutaq ki, O koordinat başlanğıcından fərqli iki $A(z_1)$ və $B(z_2)$ nöqtələri verilmişdir. Onda $\overrightarrow{OA}$ və $\overrightarrow{OB}$ vektorları yalnız və yalnız

onda kollinear olar ki, $\arg z_1 - \arg z_2 = \arg\frac{z_1}{z_2} = 0$ (yəni vektorlar eyniistiqamətli) və ya $\arg z_1 - \arg z_2 = \arg\frac{z_1}{z_2} = \pi$ (vektorlar əksistiqamətli) olsun. Belə arqumenti olan ədədlər isə həqiqi ədədlərdir, deməli,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad \text{və ya} \quad z_1 \cdot \bar{z}_2 = \bar{z}_1 \cdot z_2 .$$

$\overrightarrow{BA}$ və $\overrightarrow{DC}$ vektorları yalnız və yalnız onda kollinear olar ki, $z_1 - z_2$ və $z_3 - z_4$ kompleks ədədlərinə uyğun olan nöqtələr koordinat başlanğıcı ilə bir düz xəttüzərində yerləşsin. Onda

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = \overline{\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right)} = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{\bar{z}_3 - \bar{z}_4} \quad \Leftrightarrow \quad (z_1 - z_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) = (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_3 - z_4) .$$

Başqa sözlə, AB və CD parçaları yalnız və yalnız onda paralel olar ki, $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ ədədi həqiqi ədəd olsun.

6. Üç nöqtənin bir düz xətt üzərində yerləşməsi. Üç $A(z_1)$, $B(z_2)$ və $C(z_3)$ nöqtələri bir düz xətt üzərində o zaman yerləşər ki, $\overrightarrow{AB}$ və $\overrightarrow{AC}$ vektorları kollinear olsun, yəni

$$(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) = (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_1 - z_3)$$

şərti ödənilsin.

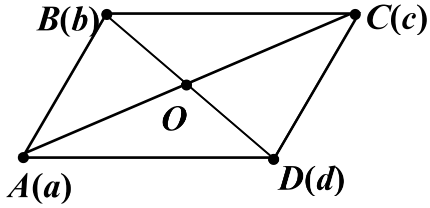
Məsələ 1. İsbat edin ki, $ABCD$ dördbucaqlısı yalnız və yalnız onda paraleloqram olar ki, onun təpə nöqtələrinin uyğun koordinatları olan a, b, c və d kompleks ədədləri $a + c = b + d$ şərtini ödəsin.

Həlli. Tutaq ki, $ABCD$ paraleloqramdır, onda AC diaqonalının orta nöqtəsinin koordinatı $\frac{1}{2}(a+c)$, BD-nin orta nöqtəsinin koordinatı isə $\frac{1}{2}(b+d)$-dir. Paraleloqramın diaqonalları kəsişmə nöqtəsində yarıya bölündüyü üçün:

$$\frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d) \quad \Leftrightarrow \quad a + c = b + d .$$

Tutaq ki, $ABCD$ dördbucaqlısında $a + c = b + d$ şərti ödənilir; onda $\frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d)$, deməli, dördbucaqlının diaqonalları kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünür. Yəni $ABCD$ dördbucaqlısı paraleloqramdır.

Məsələ 2. İsbat edin ki, əgər $ABCD$ paraleloqramının müstəvisində elə bir M nöqtəsi var ki, onun üçün $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ şərti ödənilirsə, onda $ABCD$ dördbucaqlıdır.



Həlli. O nöqtəsini koordinat başlanğıcı götürək, a, b, c və d kompleks ədədləri $ABCD$ paraleloqramının uyğun təpələrinin koordinatlarıdır. M nöqtəsinin kompleks koordinatını isə z ilə işarə edək, onda $c = -a$ və $d = -b$ olduğu üçün məsələnin şərtində verilmiş bərabərliyi aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) + (z+a)(\bar{z}+\bar{a}) = (z-b)(\bar{z}-\bar{b}) + (z+b$$

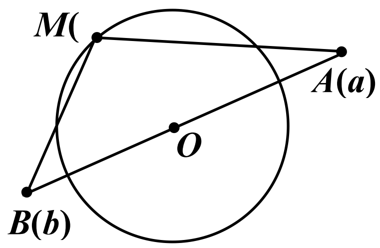
.

Buradan alırıq ki, $a\overline{a} = b\overline{b}$. Lakin

$$a\overline{a} = OA^2 = \left(\frac{1}{2}AC\right)^2, \quad b\overline{b} = OB^2 = \left(\frac{1}{2}BD\right)^2.$$

Deməli, alırıq ki, paraleloqramın diaqonalları bərabərdir yəni o, düzbucaqlıdır.

Məsələ 3. Tutaq ki, A və B nöqtələri hər hansı çevrənin mərkəzinə nəzərən simmetrik nöqtələrdir. İsbat edin ki, bu çevrənin hər hansı M nöqtəsi üçün $MA^2 + MB^2$ cəminin qiyməti sabit kəmiyyətdir.



Həlli. Çevrənin O mərkəzini koordinat başlanğıcı götürək. Tutaq ki, A, B, M nöqtələrinin kompleks koordinatları uyğun olaraq a, b, m-dir. A və B nöqtələri O mərkəzinə nəzərən simmetrik olduqları üçün $b = -a$. Onda

$$MA^2 + MB^2 = (m-a)(\overline{m}-\overline{a}) + (m-b)(\overline{m}-\overline{b}) =$$

$$= (m-a)(\overline{m}-\overline{a}) + (m+a)(\overline{m}+\overline{a}) = 2m\overline{m} + 2a\overline{a}.$$

Burada $m\overline{m} = R^2$ və $a\overline{a} = OA^2 = c^2$.

Deməli, $MA^2 + MB^2 = 2R^2 + 2c^2$ - sabit kəmiyyətdir. İsbat tamamlandı.

Məqalənin aktuallığı. Kompleks ədədlər nəzəriyyəsinin müxtəlif elm sahələrinə geniş tətbiqini göstərmək baxımından yazı aktuallıq kəsb edir.

Məqalənin elmi yeniliyi. Planimetriyaya aid bəzi mürəkkəb məsələlərin kompleks ədədlər cəbrinə görə səmərəli həlli üsulları göstərilir və həndəsi izahı verilir.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Kompleks ədədlər cəbrinin tətbiqi ilə həndəsəyə aid bəzi mürəkkəb məsələlərin daha səmərəli həlli üsullarını göstərmək baxımından məqalənin praktik əhəmiyyəti böyükdür.

Ədəbiyyat

1. Виленкин Н.Я. Функции в природе и технике. М.: Просвещение, 1978.
2. Маркушевич А.И. Комплексные числа и конформные отображения. М.: Наука, 1979.
3. Понарин Я.П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. М.: МЦНМО, 2004.
4. Понтрягин Л.С. Обобщения чисел. М.: УРСС, 2003.
5. Яглом И.М. Комплексные числа. М.: Физматгиз, 1963.

А. Исмаилов

Применение комплексных чисел к решениям геометрических задач

Резюме

Показаны эффективные методы решения некоторых сложных задач планиметрии с применением алгебры комплексных чисел и даны геометрическое изложение этих задач.

A. Ismailov

Application of integrated numbers to solutions of geometric problems

Summary

In the paper is considered effective methods for solving some complex plan metric problems with the use of the algebra of complex numbers and is showed geometric presentation of these problems.

Redaksiyaya daxil olub: 21.09.2018