

Müəyyən integralın cisimlərin həcmnin hesablanmasına tətbiqi

Vüsalə Səfərova

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti

E-mail: vusale.seferova.95@mail.ru

Rəyçilər: ped.ü.e.d., prof. A.S. Adıgözəlov,
ped.ü.f.d. Ə.A. Gərayev

Açar sözlər: çoxüzlü, silindir, doğuran, hündürlük, sahə, yan səth, həcm, integral

Ключевые слова: многогранный, цилиндр, образующая, высота, площадь, боковая поверхность, объем, интеграл

Key words: multiline, cylinder, bearing, altitude, area, side surface, volume, integral

Hesab edək ki, bizə hamar yaxud da hissə-hissə hamar səthlə hüdudlu bir cisim verilmişdir. Həmin cismi Ox -ə perpendikulyar olan müstəvilərin vasitəsi ilə n sayda laya bölək. Tutaq ki, Ox -ə perpendikulyar olan bu kəsiklərin hamısının Q -sahəsini təyin etmək həmin kəsiyin koordinat başlanğıcından olan x məsafədən asılıdır. Bu isə o deməkdir ki, baxdığımız cismin Ox oxuna perpendikulyar olan kəsiyin sahəsi- $Q(x)$ x -in funksiyası olur. İndi isə cismin $x = x_1$ funksiyasına uyğun i -ci MM_1 kəsiyini nəzərdən keçirək. Kəsiyin sahəsi $Q(x_i)$ -dir. Verilmiş kəsiyin sağında yerləşən qonşu NN_1 kəsiyi x -in qiyməti x_{i+1} -ə uyğundur. Cismin bu iki kəsiyinin arasında olan i -ci layın qalınlığı $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ olacaqdır. İndi isə $Q(x_i)$ sahəsinin üzərində elə bir elementar silindr quraq ki, silindrin doğuranları Ox oxuna paralel, hündürlüyü isə Δx_i olsun. Qurduğumuz elementar silindrin həcmi $Q(x_i)\Delta x_i$ -ə bərabər olsun. İndi isə cismin bütün laylarını yuxarıda verilən qayda vasitəsilə qurulan elementar silindirlərlə əvəzləyək. Bu elementar silindirlərin həcmələrinin cəmi aşağıdakı ifadəyə bərabər olacaqdır:

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i)\Delta x_i$$

Baxılan cismin V həcmi ilə V_n həcmi bir-birindən fərqlidir. Ancaq Δx_i -lərdən ən böyüyünü göstərən λ -nın sıfıra yaxınlaşdırılması şərtilə cismin Ox -ə perpendikulyar olan kəsiklərinin sayını sonsuz artırısaq, bu zaman $V - V_n$ fərqi sonsuz kiçiləcək və beləliklə sıfıra yaxınlaşacaq (bunu həndəsi və mexaniki əyaniliklə bu cür təsəvvür edə bilərik: x kəmiyyəti $OA=a$ -dan $OB=b$ -ə qədər dəyişdiyi zaman cismin Ox oxuna nəzərən perpendikulyar olan MM_1 kəsiyi, özünə paralel qalması və öz sahəsini müəyyən bir qanunla dəyişməsi şərtilə arasıkəsilməz soldan sağa doğru hərəkətlə cismi təşkil edir.) Bununla da

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} V - V_n = 0$$

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} V_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i)\Delta x_i$$

olmalıdır.

$\sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i)\Delta x_i$ cəminə $Q(x)$ -in $[a, b]$ seqmentində integral cəmi deyilir. Bunun üçün də axırıncı bərabərlikdən

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x) dx$$

düsturu alınar. Bu düstur cismin Ox-ə perpendikulyar olan hərəkət edən kəsiyinin $Q(x)$ sahəsinə əsasən həcmnin müəyyən integral ilə hesablanması düsturudur.

Əgər cismin Oy-ə perpendikulyar mütəhərrik kəsiyinin sahəsi $P(y)$ kimi verilsə, bu zaman cismin V həcmi yuxarıdakı mühakiməyə oxşar olaraq

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} P(y) dy$$

düsturu ilə veriləcəkdir. Burada nəzərdə tutacağıq ki, cismin Oy-ə perpendikulyar kəsiyi özünə paralel qalmaqla aşağıdan yuxarıya doğru hərəkət etdiyi zaman y α -dan β -a qədər dəyişir.

Misal.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoidinin həcmi Ox oxuna perpendikulyar olan kəsiyin sahəsinin vasitəsi ilə hesablayın.

Həlli.

Verilmiş ellipsoidi Ox-ə perpendikulyar $x=h$ müstəvisi vasitəsilə kəsək. Bu zaman

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 - \frac{h^2}{a^2} \\ x &= h \end{aligned} \right\}$$

yaxud da

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)} &= 1 \\ x &= h \end{aligned} \right\}$$

ellipsini alırıq. Daha sonra həmin ellipsin yarımxları b_1 və c_1 -lə işarə edilsə

$$b_1 = b \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}, \quad c_1 = c \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}$$

yaxud

$$b_1 = b \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}, \quad c_1 = c \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}$$

alınacaqdır. Artıq analitik həndəsədən bizə məlum olan ellipsin sahə düsturuna nəzərən baxılan ellipsin sahəsi- $Q(x)$

$$Q(x) = \pi b_1 c_1 = \pi b \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}} \cdot c \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}} = \pi b c \left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)$$

olacaqdır.

$$Q(x) = \pi b c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

alınar. Burada x kəmiyyəti $-a$ -dan $+a$ -ya dəyişərsə, sahəsi $Q(x)$ -lə ifadə olunan ellipsin özünə paralel qalmaqla hərəkəti vasitəsilə verilmiş ellipsoid əmələ gəlir. Onun ifadəsini

$V = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x) dx$ düsturunda $Q(x)$ -in yerinə qoysaq və integral sərhədlərinin $-a$ -dan $+a$ -ya

dəyişdiyini nəzərə alsaq, həmin ellipsoidin həcmi üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$V = \int_{-a}^{+a} \pi b c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b c \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_{-a}^{+a} = \pi b c \left[a - \frac{a}{3} - \left(-a + \frac{a}{3}\right) \right] = \frac{4}{3} \pi a b c$$

Bununla da görə bilərik ki, verilən-üçoxlu ellipsoidin həcmi $V = \frac{4}{3} \pi a b c$ -ə bərabərdir.

Əgər ellipsoidin oxları bir-birinə bərabədirsə onda o kürəyə çevrilər. Bu səbəbdən də ellipsoidin həcmi düsturunda $b=c=a$ qəbul olunarsa, o zaman a radiuslu kürənin həcmi $V = \frac{4}{3} \pi a^3$ -na bərabərdir. Həqiqətən də mərkəzi koordinat başlanğıcı, radiusu isə a -ya bərabər olan kürənin tənliyi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ -dir. Həmin kürə Ox -ə perpendikulyar $x=h$ müstəvisi vasitəsilə kəsilərsə

$$y^2 + z^2 = a^2 - h^2, \quad x = h$$

çevrə alınacaqdır. Bu çevrə vasitəsilə əhatə olunmuş dairənin sahəsi $Q(x) = \pi(a^2 - h^2) = \pi(a^2 - x^2)$ -ə bərabər olacaqdır. X kəmiyyətinin $-a$ -dan $+a$ -ya qədər dəyişdiyi zaman $Q(x)$ sahəli dairənin Ox oxuna perpendikulyar qalması şərtilə soldan sağa doğru hərəkəti nəticəsində kürə əmələ gəlir. Bu səbəbdən də $V = \int_{-a}^{+a} Q(x) dx$ düsturunu tətbiq etsək

$$V = \int_{-a}^{+a} Q(x) dx = \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) dx = \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{+a} = \pi \left[a^3 - \frac{a^3}{3} - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3}\right) \right] = \frac{4}{3} \pi a^3$$

alınar. Baxılan kürənin həcmi $V = \frac{4}{3} \pi a^3$ -dur.

Məqalənin aktuallığı. Məktəb təcrübəsi göstərir ki, fırlanma cismi səthinin müəyyən integral vasitəsilə hesablanması həlli şagirdlərdə müxtəlif çətinliklərlə qarşılaşır. Bu integral hesabına dair çalışmaların təliminin araşdırılması aktuallıq kəsb edir. Riyaziyyatın tədrisi metodikasında elə təlim metodları vardır ki, müəllim bu metodlardan istifadə etməklə şagirdin tədqiqatçılıq qabiliyyətlərini inkişaf etdirir. Məlumdur ki, müasir dövrdə təhsil sahəsində ciddi dəyişikliklər mövcuddur.

Məqalənin elmi yeniliyi. Məktəb riyaziyyat kursunun təlimində şagirdə fərdi yanaşma zərurəti meydana çıxır. Bu səbəbdən də materialın əhəmiyyəti mənimsəmə, həm də şərh etmə xarakterinə görə zəruri sayılır.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Məqalədən orta ümumtəhsil məktəblərinin müəllimləri, tələbə və magistrantlar istifadə edə bilərlər.

Ədəbiyyat

1. Ümumtəhsil məktəblərinin I-XI sinifləri üçün riyaziyyat proqramı. Bakı, 2015.
2. Ağayev B.A., Riyaziyyatın tədrisi metodikası. Bakı: Azərnəşr, 1964.
3. Azərbaycan Sovet məktəbində riyaziyyatın tədrisinə dair. Bakı: Azərnəşr, 1964.
4. Adıgözəlov A.S. Fasiləsiz təhsil sistemində məktəb riyaziyyat kursunun tətbiqi funksiyanın fənlərarası əlaqə əsasında reallaşdırılması, riyaziyyatın tədrisi metodikası üzrə dis. Bakı, 1992.

В. Сафарова

Применение определенного интеграла для расчета объема объектов

Резюме

Вопрос об увеличении научного уровня и эффективности обучения был выдвинут своевременно и выделив достаточное пространство для интерпретации научных принципов преподавания системы исследований по интеграции средних школ и их применения в различных ситуациях. Методологические соображения для изучения интегрированной учебной системы, которые будут выражены в предмете, помогут при преподавании математике в средних школах и улучшить учебные пособия и учебные программы. Таким образом, можно достичь развития учеников путем координации теоретической и практической деятельности по изучению системы интеграции на курсе математики средней школы.

V. Safarova

Application of certain integral to the calculation of the volume of objects

Summary

The issue of increasing the scientific level and effectiveness of the training has been put forward in a timely manner by allocating sufficient space for the interpretation of the scientific principles of the teaching of the system of studies on the integration of secondary schools and the application of them in different situations. The methodological considerations for the study of the Integrated Study System, which will be expressed in the subject, will help maths of secondary schools, improve teaching aids and curricula. Thus, it is possible to achieve the development of pupils by coordinating theoretical and practical activity on the study of the system of integration in the secondary school mathematics course.

Redaksiyaya daxil olub: 12.10.2018