Məktəb riyaziyyat kursunda limitin tədrisi metodikası

Leyla Namazova
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
E-mail: lnamazova11@gmail.com

Rəyçilər: ped.ü.e.d., prof. A.S. Adıgözəlov,
ped.ü.f.d. M.T. Rzayev

Açar sözlər: arqument, kəsilməzlik, qrafik, yığılma, sağ, sol, birtərəfli
Ключевые слова: аргумент, непрерывность, график, накопление, право, слева, односторонний
Key words: argument, indefinite, graph, stacking, right, left, one-sided

Funksiyanın limiti cəbr analizinin əsas anlayışlarından biridir. İlk dəfə yunan filosofları Arximed və Evklidin əsərlərində rast gəlinir. Müasir riyaziyyatda isə ingilis alimi İsaak Nyuton tərəfindən işlədilmişdir.

Tutaq ki, y=f(x) funksiyası a nöqtəsinin hər hansı ətrafında (funksiya a nöqtəsində təyin olunmaya bilər) təyin olunmuşdur. Əgər arqumentin bu ətrafa daxil qiymətlərindən a-ya yığılan istənilən $x_1, x_2, ... x_n, ...$ ($x_n \neq a, n \in N$) ardıcıllığı üçün funksiyanın uyğun qiymətlərindən düzəldilmiş f(x_1), f(x_2),...,f(x_n),... ardıcıllığı A-ya yığılarsa, A ədədinə y=f(x) funksiyasının a nöqtəsində limiti deyilir və $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ = A və ya x $\to a$ olduqda f(x)$\to A$ kimi işarə olunur.

Limitin tərifinə görə x$\to a$ olduqda f(x)$\to A$. Onda aydındır ki, x$\to a$ olduqda f*(x)-A*$\to 0$ Deməli, $a(x)$ = f(x)-A işarə etsək, f(x)=A+ $a(x)$ olar və buradan alarıq ki, x $\to a$ olduqda $\alpha(x) \to 0$.

Deməli, x$\to a$ *olduqda f(x) funksiyasının limiti yalnız və yalnız onda A-ya bərabər olar ki, f(x) funksiyasını* x$\to a$ *olduqda* $\alpha(x) \to 0$ *şərtini ödəyən* $\alpha(x)$ *üçün*

$$f(x)=A+a(x)$$

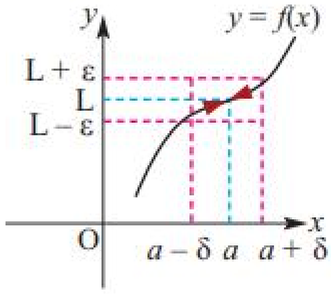
şəklində göstərmək mümkün olsun.

Limitin tərifindən istifadə edərək, bəzi funksiyaların limitini hesablayaq.

Misal. f(x)=C (C-sabitdir) funksiyasının x $\to a$ *olduqda limitinin C-yə bərabər olmasını göstərək.*

Həlli. a nöqtəsini özündə saxlayan istənilən intervaldan götürülmüş x-lər üçün $x_n \to a$ *olduqda* f(x_n)=C olduğu üçün

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} C = C.$$



Misal. f(x)=x. İsbat edək ki, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a.$

Həlli. n olduqda $x_n \to a$ şərtini ödəyən x_n ardıcıllığı üçün

$$\lim_{x \to \infty} f(x_n) = \lim_{x \to \infty} x_n = a \text{ olduğundan}$$

limitin tərifinə görə

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} a = a$$

Qeyd edək ki, funksiyanın nöqtədə limiti anlayışını aşağıdakı kimi də vermək olar.

Tutaq ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $\delta > 0$ ədədi tapmaq olar ki, $0 < | x - a | < \delta$ şərtini ödəyən x-lər üçün $| f(x) - L| < \varepsilon$ olur. Onda L ədədinə f(x) funksiyasının a nöqtəsində limiti deyilir və bu $\lim_{x \to a} f(x) = L$ kimi yazılır.

Bunu həndəsi olaraq qısaca belə izah etmək olar.

İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün ordinat oxu üzərində L nöqtəsinin $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ ətrafını götürək və $L - \varepsilon$, $L + \varepsilon$ nöqtələrindən absis oxuna paralel xətlər çəkək: eni 2ε olan zolaq alarıq. f(x) funksiyasının $(a - \delta; a + \delta)$ ətrafında olan bütün x-lərə $(x \neq a)$ uyğun qiymətləri $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ intervalında, qrafiki isə eni 2ε olan bu zolaqda yerləşəcək.

Nümunə 1. Limitin tərifindən istifadə etməklə $\lim_{x \to 2}(3x - 2) = 4$ olduğunu göstərək.

Həlli: İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi qeyd edək. $|x - 2| < \delta$ şərtini ödəyən x-lər üçün $|(3x - 2) - 4|$ kəmiyyətini qiymətləndirək: $|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = 3|x - 2| < 3\delta$. $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ kimi seçsək, $|x - 2| < \delta$ şərtini ödəyən x-lər üçün $|(3x - 2) - 4| < \varepsilon$ münasibəti ödənəcək. Bu isə, tərifə görə, $\lim_{x \to 2}(3x - 2) = 4$ olması deməkdir.

Yuxarıda qeyd etdik ki, $\lim_{x \to a} f(x) = A$ olarsa, onda bu funksiya $f(x) = A + a(x)$ şəklində göstərilir, burada $x \to a$ olduqda $\alpha(x) \to 0$. Belə $\alpha(x)$ funksiyalarına ***sonsuz kiçilən funksiyalar*** deyilir.

Əgər $\lim_{x \to a} a(x) = 0$ olarsa, onda $\alpha(x)$ funksiyası $x \to a$ olduqda *sonsuz kiçilən* funksiya adlanır.

Əgər $\lim_{x \to a} \beta(x) = \infty$ olarsa, onda $\beta(x)$ funksiyasına $x \to a$ olduqda *sonsuz böyüyən* funksiya deyilir.

Limiti müxtəlif üsullarla təxmin və ya müəyyən etmək olar.

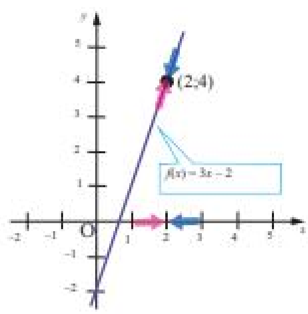
• cədvələ görə • qrafikə görə • analitik üsulla

Funksiyanın qiymətlər cədvəlinə və qrafikinə görə limitin təxmin edilməsi.

Nümunə 2. Qiymətlər cədvəli tərtib etməklə limiti tapın: $\lim_{x \to 2}(3x - 2)$

Həlli: x-in soldan və sağdan 2-yə yaxın bəzi qiymətlərində $f(x) = 3x - 2$ funksiyasının uyğun qiymətlərini cədvəldə yazaq.

x	1,9	1,99	1,999	2,0	2,001	2,01	2,1
f(*x*)	3,700	3,970	3,997	?	4,003	4,030	4,300



x-in qiyməti 2-yə həm soldan, həm də sağdan yaxınlaşdıqca f(x)-in qiyməti 4-ə yaxınlaşır. $f(x) = 3x - 2$ funksiyasının qrafikini qurmaqla da x-in 2-yə həm sağdan, həm də soldan yaxınlaşması ilə bu funksiyanın qiymətinin 4-ə yaxınlaşdığını, "yığıldığını" görmək olar. Deməli, $\lim_{x \to 2}(3x - 2) = 4$

Limitin varlığı. Birtərəfli limitlər.

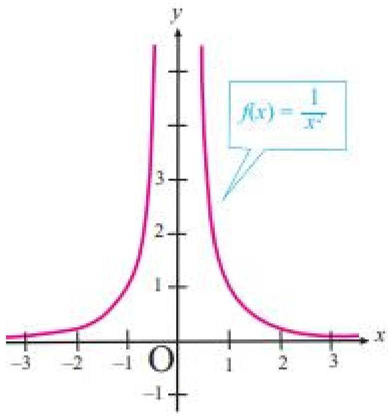
Bəzən x dəyişəninin a-ya yalnız bir tərəfdən (sağdan və ya soldan) yaxınlaşdığı hallara baxmaq lazım gəlir.

Sol limit. x-in qiymətləri a-dan kiçik qalmaqla a-ya yaxınlaşdıqda f(x) – L fərqi sıfıra yaxınlaşırsa, L ədədinə f(x) funksiyasının a nöqtəsində sol limiti deyilir və $\lim_{x\to a} - f(x)$ kimi yazılır.

Sağ limit. x-in qiymətləri a-dan böyük qalmaqla a-ya yaxınlaşdıqda f(x) – L fərqi sıfıra yaxınlaşırsa, L ədədinə f(x) funksiyasının a nöqtəsində sağ limiti deyilir və $\lim_{x\to a} - f(x)$ kimi yazılır.

f(x) funksiyasının sağ və sol limitləri varsa və bərabərdirsə, onda x = a nöqtəsində f(x) funksiyasının limiti var və

$$\lim_{x\to a} - f(x) = \lim_{x\to a} + f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$



Funksiyanın nöqtədə limitinə verilən tərifdə a və L ədədlərinin sonlu olduğunu nəzərdə tutmuşduq. Lakin a və L (biri və ya hər ikisi) sonlu olmaya bilər.

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ limitini nəzərdən keçirək. Qrafikdən də göründüyü kimi, x-in qiyməti soldan və sağdan sıfıra yaxınlaşdıqca, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ funksiyasının qiyməti sonsuz böyüyür. Deməli, | x | -in qiymətini kifayət qədər kiçik götürməklə f(x) funksiyasının qiymətinin istənilən ədəddən böyük olmasına nail ola bilərik. Məsələn,

|x|-in qiyməti kiçildikcə funksiyanın qiyməti qeyri-məhdud böyüyür.

$\frac{1}{x^2}$ funksiyası $x \to 0$ olduqda sonsuz böyüyəndir. Bu belə yazılır: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$

$$0 < |x| < \frac{1}{10} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > 100,$$

$$0 < |x| < \frac{1}{1000} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > 1000000$$

Funksiyanın kəsilməzliyi bir çox hallarda sadəcə olaraq aşağıdakı kimi izah edilir. *Əgər hər hansı funksiyanın qrafikini qələmi vərəqdən ayırmadan çəkmək mümkündürsə, bu funksiya kəsilməz funksiyadır. Əks halda qrafikin kəsilmə nöqtələri (sıçrayış nöqtələri) adlanan nöqtələri var və bu funksiya kəsiləndir.* Kəsilən funksiyanın qrafikini qələmi vərəqdən ayırmadan bir dəfəyə çəkmək mümkün deyil. Funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyi. Funksiyanın nöqtədə kəsilməz olması üçün qrafik bu nöqtədə qırılmamalı, qrafikdə sıçrayış olmamalıdır.

Məqalənin aktuallığı. Müşahidələr göstərir ki, məktəb riyaziyyat kursunda limitin tətbiqləri şagirdlər tərəfindən müxtəlif çətinliklərlə rastlaşır. Bir çox hadisələri öyrənərkən aydın olur ki, burada funksiya həm sağ, həm də sol tərəfdən eyni bir ədədə yaxınlaşarsa həmin ədəd funksiyanın limiti olur. Məsələn: funksiyanın qrafikini quran zaman qırılmalar olur. Bu nöqteyi nəzərdən funksiyaların limitinin tətbiqlərinin araşdırılması aktuallıq kəsb edir. Ona görə də riyaziyyat dərs proqramında limit mövzusuna üstünlük verilir.

Məqalənin elmi yeniliyi. Məktəb riyaziyyat kursunun təlimində şagirdə fərdi yanaşma zərurəti meydana çıxır. Bu səbəbdən də materialın əhəmiyyəti mənimsəmə, həm də şərhetmə xarakterinə görə zəruri sayılır.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Məqalədən orta ixtisas və orta ümumtəhsil məktəblərinin müəllimləri, eləcə də tələbə və magistrantlar istifadə edə bilərlər.

Ədəbiyyat

1. Qəhrəmanova N., Kərimov M., Quliyev Ə. Riyaziyyat fənni üzrə 11-ci sinif üçün dərslik. Baki, 2018.
2. Əliməmmədov R. Riyaziyyat: Abuturiyentlər üçün dərs vəsaiti. Bakı, 2013.
3. https://www.trims.edu.az/noduploads/book/quot-riyaziyyat-quot-fanni-uzra-11-ci-sinif-ucun-darslik.pdf
4. http://unec.edu.az/application/uploads/2015/06/riyazianaliz_cavab01az.pdf
5. https://az.wikipedia.org/wiki/Limit_(riyaziyyat)
6. https://www.kitabyurdu.org/muhazire/m-riyaziyyat/406-riyaziyyat-muhazireler.html

Л. Намазова

Методы преподавания предел в школьном курсе математики

Резюме

В этой статье объясняются предел, функциональные возможности, свойства предел и важность программы, а предел — одна из самых важных проблем в математике.

L. Namazova

Methods of teaching limit in school mathematics course

Summary

In this article, the features, functionality, limit of a function properties and importance of the program are explained. Limit is the one of the most important issues in mathematics.

Redaksiyaya daxil olub: 27.02.2019