Məktəb riyaziyyat kursunda limit anlayışı və onun öyrədilməsi metodikası

Aytac Seyidova
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
E-mail: aytac.seyidova.95@gmail.com

Rəyçilər: ped.ü.e.d., prof. A.S. Adıgözəlov,
f.-r.ü.e.d., dos. İ.C. Mərdanov

Açar sözlər: cəbr, ədəd, ardıcıllıq, silsilə, limit, funksiya
Ключевые слова: алгебра, номер, правопреемство, прогрессия, предел, функция
Key words: algebra, number, sequence, series, limit, function

Müşahidələr göstərir ki, limit anlayışı məktəb riyaziyyat kursunun ən mühüm anlayışlarından biridir. Mühüm olmaqla yanaşı, bu anlayış bir çox mövzuların öyrənilməsində aparıcı rol oynayır. Bu baxımdan biz diqqət yetirməliyik ki, bu anlayış məktəb kursunda şagirdlərə daha sadə və başa düşülən dildə çatdırılsın. Limit anlayışı şagirdlərin nəzərinə onuncu sinif proqramında sadə şəkildə verilsə də on birinci sinif proqramında bu anlayışa daha çox yer verilir. Belə ki, şagirdlər əvvəlcə funksiya anlayışı ilə tanış olurlar və onu yaxşı mənimsədikdən sonra limit anlayışı tədris olunur. Belə ki, bu mövzuda şagirdlərə

1. Dəyişən və sabit kəmiyyətlər
2. Funksiya anlayışı
3. Dəyişən kəmiyyətin limiti
4. Funksiyanın limiti
5. Limit haqqında əsas teoremlər
6. Məşhur limitlər
7. Funksiyanın kəsilməzliyi
8. Kəsilməz funksiyanın bəzi xassələri anlayışları öyrədilir. Aydındır ki, ali məktəb kursunda bu anlayış daha da dərin şəkildə tədris olunur və müxtəlif elmi müəssisələrdə bu mövzu haqqında tədqiqatlar aparılır. Biz də limit anlayışının tədrisi metodikasını daha sadə şəkildə verməyə çalışaq. Bu məqsədlə əvvəlcə dəyişən və sabit kəmiyyətləri öyrənək.

Ümumiyyətlə riyazi kəmiyyətlərə nəzər salsaq biz onların iki hissəyə ayrılmış olduğunu görərik: sabit kəmiyyətlər və dəyişən kəmiyyətlər. Həmişə (yaxud da müəyyən proses dövründə) eyni bir ədədi qiyməti olan kəmiyyətlərə sabit kəmiyyətlər, müxtəlif ədədi qiymətlər alan kəmiyyətlərə isə dəyişən kəmiyyətlər deyilir. Məlumdur ki, sabit kəmiyyətə həmişə eyni bir ədədi qiymət alan dəyişən kəmiyyət kimi də baxmaq olar. Bundan sonra biz dəyişən kəmiyyətləri *x, y, z, u,...* və s. hərfləri ilə sabit kəmiyyətləri isə *a, b, c,...* və s. hərfləri ilə işarə edəcəyik.

Demək lazımdır ki, konkret fiziki hadisələrə baxanda belə bir hal ola bilər ki, eyni bir ad daşıyan kəmiyyət hadisələrin birində sabit, digərində isə dəyişəndir. Məsələn, bərabərsürətli hərəkətin sürəti sabitdir, bərabərtəcilli hərəkətdə isə sürət dəyişən kəmiyyətdir. Başqa sözlə desək öz ədədi istənilən hadisədə sabit saxlayan kəmiyyətlərə mütləq sabitlər deyilir. Məsələn, çevrə uzunluğunun diametrə nisbəti mütləq sabit kəmiyyətdir, yəni π = 3,14159... . dəyişən kəmiyyət müxtəlif ədədi qiymətlər aldığından baxılan məsələnin xarakterindən asılı olaraq bu qiymətlərin toplusu müxtəlif ola bilər

Tərif. Dəyişən kəmiyyətin ala bildiyi bütün qiymətlər çoxluğuna bu kəmiyyətin dəyişmə oblastı deyilir.

İndi isə funksiya anlayışı ilə tanış olaq.

Verilmiş x və y dəyişən kəmiyyətləri bir-birindən asılı olaraq istənilən qiymətləri ala bilirsə, yəni birinin aldığı qiymətlər, o birinin bu və ya başqa qiymətləri alıb almamasından asılı deyilsə, onlara asılı olmayan və ya sərbəst dəyişən kəmiyyətlər deyilir. Aydındır ki, belə dəyişən kəmiyyətlərin ayrılıqda öyrənməyin heç bir mənası yoxdur. Buna görə də riyaziyyat elmində asılı olan dəyişən kəmiyyətlər öyrənilir.

Tərif. Əgər hər hansı f qaydası və ya qanunu vasitəsilə x dəyişən kəmiyyətinin X dəyişmə oblastındakı hər bir qiymətinə y dəyişən kəmiyyətinin Y dəyişmə oblastında müəyyən bir qiyməti uyğun olarsa, belə uyğunluğa funksiya deyilir və funksiya $y = f(x)$ kimi işarə edilir.

Bu halda x dəyişəni arqument və ya sərbəst dəyişən, y dəyişəni funksiya və ya asılı dəyişən, x və y dəyişənləri arasındakı asılılıq funksional asılılıq adlanır. X çoxluğuna funksiyanın təyin oblastı, Y çoxluğuna isə funksiyanın qiymətlər oblastı deyilir.

Funksiyanı aşağıdakı müxtəlif şəkildə işarə etmək olar: $y=f(x)$, $y=F(x)$, $y=g(x)$ və s. Verilmiş $y=f(x)$ funksiyasının $x=a$ nöqtəsində aldığı qiyməti $f(a)$ kimi işarə edilir.

Tutaq ki, $y=f(x)$ funksiyası [a,b] parçasında təyin edilib. Absisləri arqumentin qiymətləri, ordinatları isə funksiyanın qiymətləri olan M(x,y) nöqtələrinin həndəsi yerinə $y=f(x)$ funksiyasının qrafiki deyilir.

Əgər x dəyişənin hər bir qiymətinə y dəyişəninin ancaq bir qiyməti uyğun olarsa, onda y funksiyası x-ın birqiymətli funksiyası deyilir. Əgər x dəyişəninin heç olmasa bəzi qiymətlərinə y dəyişəninin bir neçə qiyməti uyğun gələrsə, onda belə funksiyaya çoxqiymətli funksiya deyilir.

f funksiyasının verilməsi, x arqumentinin hər bir qiymətinə görə $f(x)$ funksiyasının uyğun qiymətinin necə tapılması deməkdir. Funksiyanın verilməsinin 3 üsulu vardır: analitik, yəni düstur vasitəsilə, cədvəl və qrafik.

Funksiyanın limiti ilə tanış olmazdan əvvəl dəyişən kəmiyyətin limiti ilə tanış olaq.

Tərif 1. Əgər əvvəlcədən verilmiş istənilən kiçik müsbət ε ədədi üçün x dəyişən kəmiyyətinin elə qiymətini göstərmək olarsa ki, həmin dəyişənin sonra gələn bütün qiymətləri $|x-a|< \varepsilon$ bərabərsizliyini ödəsin, onda a ədədinə x dəyişənin limiti deyilir.

Əgər a ədədi x dəyişən kəmiyyətinin limitidirsə, onda deyirlər ki, x dəyişəni a-ya yaxınlaşır və bunu simvolik olaraq belə işarə edirlər: $x \to a$, yaxud $\lim x=a$.

Limitin tərifini həndəsi istilahlarla belə demək olar: əgər a ədədinin mərkəzi a nöqtəsində, radiusu isə ε olan istənilən kiçik ətrafında x dəyişəninin elə qiymətini tapmaq mümkündür ki, x-in bütün sonrakı qiymətlərinə uyğun nöqtələr bu ətrafda yerləşərsə, onda a sabiti x dəyişəninin limitidir.

Tərif 2. Əgər istənilən müsbət M ədədi üçün x dəyişən kəmiyyətinin elə qiymətini göstərmək olar ki, dəyişənin ondan sonra gələn bütün qiymətləri $|x|>M$ bərabərsizliyini ödəsin, onda x kəmiyyəti sonsuz böyüyən və sonsuzluğa yaxınlaşan adlanır.

Sonsuz böyüyən kəmiyyəti işarə etmək üçün aşağıdakı simvollardan istifadə edilir: $\lim x = \infty$, $x \to \infty$, $\lim x \to -\infty$, $x \to -\infty$.

Tərif 3. Əgər istənilən kiçik müsbət ε ədədi üçün x dəyişənin elə qiymətini göstərmək olarsa ki, həmin dəyişənin sonra gələn bütün qiymətləri $|x|<$ bərabərsizliyini ödəsin, onda deyirlər ki, x dəyişəni sıfıra yaxınlaşır və yaxud sonsuz kiçiləndir

Əgər kəmiyyət sonsuz kiçiləndirsə, onda o belə işarə olunur: $x \to 0$, $\lim x=0$.

Sonsuz kiçilən və sonsuz böyüyən kəmiyyət arasında aşağıdakı teoremlərlə ifadə edilən sıx əlaqə vardır.

Teorem 1. Əgər x sonsuz böyüyən kəmiyyətdirsə, onda $\frac{}{x}$ sonsuz kiçilən kəmiyyətdir.

Teorem 2. Əgər x sonsuz kiçilən kəmiyyətdirsə, onda $\frac{}{x}$ sonsuz böyüyən kəmiyyətdir.

Sonsuz kiçilən və sonsuz böyüyən kəmiyyətlərin bir sıra xassələri vardır.

1. Sonlu sayda sonsuz kiçilənlərin cəbri cəmi sonsuz kiçilən kəmiyyətdir.
2. Sonsuz kiçilən kəmiyyətlərin fərqi sonsuz kiçiləndir.
3. Sonsuz kiçilən kəmiyyətlə məhdud kəmiyyətin hasili sonsuz kiçiləndir.
4. Sonsuz kiçilən kəmiyyətin sabit kəmiyyətə hasili sonsuz kiçiləndir.
5. İki sonsuz kiçilən kəmiyyətin hasili sonsuz kiçiləndir.
6. Sonsuz kiçilən kəmiyyətin tam müsbət qüvvəti sonsuz kiçiləndir.
7. İki sonsuz kiçilən kəmiyyətin nisbəti heç də həmişə sonsuz kiçilən olmur.

Funksiyanın limiti anlayışını daxil edək.

Tərif 1. Tutaq ki, *y=f(x)* funksiyası a nöqtəsinin bir ətrafında və ya bu ətrafın bəzi nöqtələrində təyin olunmuşdur. Əgər istənilən kiçik müsbət ε ədədi üçün elə δ ədədi var ki, *x*-in *a*-dan fərqli və |*x-a*| < ε bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlər üçün

f(x)=A+ α(x) və ya f=A+α (1)

Burada *α=α(x)* kəmiyyəti *x→a* şərtində sonsuz kiçiləndir. Bunun əksi də doğrudur: əgər (1) bərabərliyi ödənirsə, onda $\lim\limits_{x\to a} f(x)$=A.

Tərif 2. *X* dəyişəni a ədədinin yalnız kiçik qiymətlər alaraq ona yaxınlaşdıqda, *f(x)* funksiyası A_1 limitinə yaxınlaşarsa, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$=$A_1$ yazırlar və A_1 ədədinə *f(x)* funksiyasının *a* nöqtəsində sol limiti deyirlər. Əgər x kəmiyyəti yalnız a-dan böyük qiymətlər alırsa, onda $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$=$A_2$ yazırlar və A_2 ədədinə funksiyanın *a* nöqtəsində sağ limiti deyilir.

Tərif 3. Əgər kiçik müsbət ε ədədi üçün elə *N* ədədi göstərmək olarsa ki, |*x*|>*N* bərabərsizliyini ödəyən bütün *x*-lər üçün |*f(x)-A*|< bərabərsizliyi ödənərsə, onda *A* ədədinə *x* sonsuzluğa yaxınlaşdıqda *f(x)* funksiyasının limiti deyilir və aşağıdakı kimi işarə edilir:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

Məqalənin aktuallığı. Müşahidələr göstərir ki, məktəb riyaziyyat kursunda limit anlayışı və onun öyrənilməsi zamanı şagirdlər müxtəlif çətinliklərlə rastlaşır. Bu nöqteyi-nəzərdən limit anlayışının araşdırılması aktuallıq kəsb edir.

Məqalənin elmi yeniliyi. Məktəbdə riyaziyyat kursunda şagirdə fərdi yanaşma zərurəti meydana çıxır. Bu səbəbdən də materialın əhəmiyyəti mənimsəmə, həm də şərhetmə xarakterinə görə zəruri sayılır.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Məqalədən orta ixtisas və orta ümumtəhsil məktəblərinin müəllimləri, eləcə də tələbə və magistrantlar istifadə edə bilərlər.

Ədəbiyyat

1. R.Məmmədov. Ali riyaziyyat kursu, I hissə, “Maarif”, Bakı, 1978, II hissə. 1981, III hissə. 1984.
2. Məsimova S.N. Ali riyaziyyatın əsasları. Bakı, Yeni Nəsil, 2006.

3. Piskunov N.S. Diferensial və inteqral hesabı. Bakı. Maarif, I, II c., 1965.

А. Сеидова

Понимание предела и методика его обучения в школьном курсе математики

Резюме

В этом теме мы ознакомились предел и его методика и обучение в школьном курсе математики. В статье мы коснулись и изучили понятия изменяющихся и постоянных величий, функциональных понятий, пределов переменных и пределов функциональности.

A. Seyidova

Limit understanding of the school math course and its teaching methodology

Summary

In this regard, we have come to terms with the concept of limit and its teaching method. We have touched and examined the concepts of changing and constant quantities, functional concept, limits of variables and limit of functionality in the article.

Redaksiyaya daxil olub: 26.02.2019