Məktəbin riyaziyyat təlimində tənliklərin həlli üçün ən vacib metod və çevirmələr

Musa Tapdıq oğlu Rzayev
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin baş müəllimi,
pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru
E-mail: musa.rzayev.73@mail.ru

Rəyçilər: p.ü.e.d., prof. A.S. Adıgözəlov,
p.ü.e.d., dos. N.A. Əliyev

Açar sözlər: tənlik, metod, funksiya, oblast, çoxluq, həqiqi ədəd, çevrilmə, eynigüclü, kənar kök

Ключевые слова: уравнение, метод, функция, область, кластер, действительные числа, преобразование, тождество, ребро корня

Key words: equation, method, function, region, cluster, real numbers, conversion, identical, edge root

Məktəbin riyaziyyat təlimində ən çox rast gəlinən anlayışlardan biri də tənlik anlayışıdır. Tənliklərin həllində şagirdlər bir sıra çətinliklərlə rastlaşırlar. Ona görə də, biz bu mövzu ilə bağlı ən vacib hesab etdiyimiz bir sıra məqamlar üzərində ətraflı dayanacağıq.

V-VII siniflərin riyaziyyat kursunun əsasını bir dəyişənli xətti tənliklər və onların həlli tutur. Ümumi şəkildə bir dəyişənli xətti tənliklər $f(x) = g(x)$ kimi yazılır. Burada *f(x)* və *g(x)* ixtiyari funksiyalardır. Deməli, tənliyə iki funksiyanın bərabərliyi kimi də baxmaq olar. bu funksiyanın mənasının olub olmaması üçün aşağıdakı hallar nəzərə alınmalıdır: 1) verilmiş funksiyaların təyin oblastları üst-üstə düşür; 2) bu funksiyaların ümumi təyin oblastına daxil olan ixtiyari x_0 nöqtəsindəki qiymətləri üst-üstə düşür. Deməli, $f(x_0) = g(x_0)$ ödənir. Ancaq $f(x) = g(x)$ bərabərliyinə tənlik kimi baxdıqda aydın olur ki, qeyri-müəyyən tənlikdir. Belə ki, *x* dəyişənin müəyyən qiymətlərində $f(x) = g(x)$ tənliyini ödənilir, müəyyən qiymətlərdə isə ödənilmir. Bizi isə *x* dəyişənin $f(x) = g(x)$ ifadəsini doğru bərabərliyə çevirən qiymətləri maraqlandırır. Məsələn, 1) $|x| = x$ tənliyi üçün bütün mənfi olmayan həqiqi ədədlər onun köküdür; 2) $\lg(x) = \lg(-x)$ tənliyinin kökü yoxdur. Çünki bərabərliyin sol tərəfi müsbət *x*-lər, sağ tərəfi isə mənfi *x*-lər üçün doğrudur, yəni sağ və sol tərəflərin təyin oblastları ümumi nöqtələrə malik deyillər; 3) *cosx*=2 tənliyinin həqiqi ədədlər çoxluğunda həlli yoxdur, çünki $|cosx_0| \leq 1$ ixtiyari x_0 üçün.

Tənliyi həll etmək-onun kökünün olub və ya olmamasını müəyyən etmək deməkdir.

Orta məktəbin riyaziyyat təlimində həll edilən tənliklər üzərində biz adətən bəzi çevirmələr, yəni tənliyi ardıcıl olaraq daha sadə tənliklərlə əvəz etməklə onu həll edirik. Təbiidir ki, istifadə olunan bütün çevirmələrin tam siyahısını vermək çətindir. Ancaq iki mühüm faktı qeyd edək: 1) bəzi çevirmələr köklərin itməsinə; 2) bəzi çevirmələr isə əlavə köklərin yaranmasına səbəb ola bilər.

Köklərin "itməsi" və "əlavə" köklərin yaranması məsələsi üzərində bir qədər ətraflı dayanaq.

Tutaq ki, $f(x) = g(x)$ tənliyi üzərində müəyyən çevirmələr apardıqdan sonra $f_1(x) = g_1(x)$ tənliyi alınmışdır. Elə bir x_0 ədədi varsa ki, $f(x) = g(x)$ tənliyini ödəyir, lakin çevirmə nəticəsində alınmış $f_1(x) = g_1(x)$ tənliyini ödəmir, onda kökün itməsi baş verib. Digər tərəfdən, elə bir x_0 ədədi varsa ki, $f_1(x) = g_1(x)$ tənliyini ödəyir, ancaq $f(x) = g(x)$ tənliyini ödəmir, bu halda yeni kök yaranmışdır. Deyilənləri nümunə ilə göstərək. $x^3 = x$ tənliyini həll edək: Bu tənliyi həllinə iki cür baxmaq olar. birinci halda tənliyin hər iki tərəfini x-ə ixtisar etsək $x_1 = 1$; $x_2 = -1$ köklərini alırıq ki, burada kökün biri itmiş olur. Kökün itməsinə səbəb bu tənliyin həllində ixtisar etmək olmaz. Deməli, tənliyin düzgün həlli aşağıdakı kimidir:

$$x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Deməli, ümumi nəticəyə gələrək demək olar ki: tənliklərin həlli prosesində tətbiq olunan çevirmələr eynigüclü tənliyə gətirirsə, onda köklərin itməsi baş vermir. Əksinə çevirmələr nəticəsində eynigüclü tənliklər alınmırsa köklərin itməsi baş verir.

Tərif. Verilmiş $f(x) = g(x)$ və $f_1(x) = g_1(x)$ tənlikləri o vaxt eynigüclü tənlik hesab olunur ki, birinci tənliyə daxil olan ixtiyari həlli eyni zamanda ikinci tənliyinin həlli olsun və əksinə.

Tənliyin həlli prosesində köklərin itməsi itməsi baş vermişsə, onda ikinci tənlik birinci tənliyin nəticəsi hesab olunur. Qeyd etmək lazımdır ki, həmişə elementar çevirmələr eynigüclü tənliklərə gətirmir. Bəzən çevirmələr nəticəsində eynigüclü tənliklər alınmır. Ona görə də, son nəticədə alınan həllər yoxlanılmalıdır.

Orta məktəbin riyaziyyat təlimində həll olunan tənliklər üçün ən zəruri olan metod və çevirmələri nəzərdən keçirək.

1. Toplananları bərabərliyin bir tərəfindən digər tərəfinə keçirməklə tənliyin həll edilməsi: $f(x) = \varphi(x) + g(x)$ tənliyindən $f(x) - \varphi(x) = g(x)$ tənliyinə keçilməsi. Qeyd edək ki, bu cür keçid həmişə eynigüclü tənliklə nəticələnir. Bunu isbat edək. Tutaq ki, x_0 verilmiş $f(x) = \varphi(x) + g(x)$ tənliyinin həllidir. Yəni, $f(x_0) = \varphi(x_0) + g(x_0)$ ödənir. Bu, o deməkdir ki, 1) x_0 nöqtəsi $f(x), \varphi(x)$ və $g(x)$ funksiyasının hər birinin təyin oblastına daxildir. Yəni, f (x_0) ədədləri müəyyəndir; 2) bu ədədlər $f(x_0) = \varphi(x_0) + g(x_0)$ münasibəti vasitəsilə əlaqədardır. $f(x_0) = \varphi(x_0) + g(x_0)$ tənliyinin hər iki tərəfinə - ədədini əlavə edək, onda $f(x_0) - \varphi(x_0) = \varphi(x_0) - \varphi(x_0) + g(x_0)$ və ya $f(x_0) - \varphi(x_0) = g(x_0)$ tənliyini alarıq. Bu isə o deməkdir ki, $f(x) - \varphi(x) = g(x)$ tənliyinin həllidir. Bu dediklərimizdən belə nəticəyə gəlirik $f(x) = \varphi(x) + g(x)$ tənliyinin hər bir həlli $f(x) - \varphi(x) = g(x)$ tənliyinin həlli və əksin.

Deməli, toplananlardan birini bərabərliyin bir tərəfindən digər tərəfinə keşirdikdə əvvəlki tənliklə eynigüclü tənlik alınır. Cəbri tənliklərin həllində bu metoddan (çevirmədən) tez-tez istifadə edilir.

2. Oxşar hədlərin islahı metodu.

$f(x) + \varphi(x) = \varphi(x) + g(x)$ tənliyində oxşar hədləri bərabərliyin bir tərəfindən digər tərəfinə yığmaqla onunla eyni güclü olan tənliyi alırıq, yəni. Buradan isə $f(x) = g(x)$ tənliyi alınır. Metodu ətraflı araşdırmazdan əvvəl bir misala baxaq.

Misal. $x^2 + lgx = x + lgx \Rightarrow x^2 = x$

$x^2 = x$ tənli iki $x_1=1$, $x_2=0$ kökü köklərinə malikdir. Ancaq $x^2 + lgx = x + lgx$ tənliyi yeganə x=1 kökünə malikdir. x=0 kənar kökdür.

İndi isə ümumi qaydanı aşağıdakı kimi söyləmək olar. funksiyaları necə olursa-olsun tənliyi tənliyinin nəticəsidir. Bu cür həll zamanı köklər itmir, ancaq yuxarıdakı misalda göründüyü kimi kənar köklər alına bilər. Ona görə də oxşar hədlərin islahı metodunun tətbiqi zamanı alınan kökləri yoxlamaq lazımdır.

Aşağıdakı kimi təbii bir sual meydana çıxır. Hansı hallarda bu çevirmənin tətbiqi zamanı eynigüclü tənlik alınır və kökləri yoxlamaq lazım gəlir? $f(x) = g(x)$ tənliyindəki $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının təyin oblastlarının kəsişməsi hər hansı $\varphi(x)$ funksiyasının təyin oblastına daxildirsə, onda baxdığımız tənliklər eynigüclüdür, əks halda kənar köklər əmələ gəlir.

3. Tənliyin hər iki tərəfinin eyni bir ifadəyə vurmaqla həll edilməsi: $f(x) = g(x)$ tənliyindən $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ tənliyinə keçilməsi. Bu metod haqqında aşağıdakını söyləmək olar.

1) əgər *f(x)* və *g(x)* funksiyalarının təyin oblastlarının kəsişməsi $\varphi(x)$ funksiyasının təyin oblastına daxildirsə, onda verilmiş tənliklər doğrudur;

2) $\varphi(x) \neq 0$ şərti *f(x)* və *g(x)* funksiyalarının təyin oblastlarının kəsişməsində ödənilirsə, onda verilmiş tənliklər eynigüclüdür.

Qeyd edək ki, tənliyin hər iki tərəfini $\varphi(x) \neq 0$ ifadəsinə böldükdə həm köklərin itməsinə, həm də kənar köklərin əmələ gəlməsinə səbəb olur. Məsələn, $x^2 - x = 0$ tənliyinə baxaq. Tənliyin hər iki tərəfini -ə vuraq. Onda $\frac{x^2 - x}{x} = 0$ alarıq. Bu tənlik birinci tənliyin nəticəsi deyil. Doğrudan da, birinci tənliyin x_1=0 və x_2=1 kimi iki kökü var. Ancaq $\frac{x^2 - x}{x} = 0$ tənliyinin isə *x*=1 kökü var. Kökün itməsi ifadəsinin *x*=0 olduqda təyin olunmaması ilə bağlıdır.

4. Tənliyin sağ və sol tərəfini eyni natural dərəcədən qüvvətə yüksəltməklə həll etmə metodu: $f(x) = g(x)$ tənliyindən $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ tənliyinə keçmə.

Bu metod tənliklərin həlli prosesində çox istifadə olunur, xüsusən də irrasional tənlikləri həlli zamanı.

Tutaq ki, *f(x)* və *g(x)* funksiyaları müəyyən *M* çoxluğunda təyin olunmuşlar (başqa sözlə, *M* çoxluğu *f(x)* və *g(x)* funksiyalarının hər birinin təyin oblastına daxildir). *n* ixtiyari natural ədəddir. Fərz edək ki, *M* çoxluğu həqiqi ədədlər çoxluğudur və bu çoxluqda *f(x)* və *g(x)* funksiyaları həqiqi qiymətlər alır. Onda aşağıdakıları söyləmək olar.

1) İxtiyari natural *n* üçün $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ tənliyi $f(x) = g(x)$ tənliyinin nəticəsidir.

2) Əgər *n*-təkdirsə (*n=2k+1*), onda $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ tənliyi $f(x) = g(x)$ tənliyi ilə *M* çoxluğunda eynigüclüdür.

3) Əgər *n*-cütdürsə (*n=2k*), onda $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ tənliyi *M* çoxluğunda $|f(x)| = |g(x)|$ tənliyi ilə eynigüclüdür. Bu tənlik isə $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$ tənliklər sistemi ilə eynigüclüdür.

5. Məchulun əvəz edilməsi metodu.

Məchulun əvəz edilməsi metodu *f(g(x))*=0 (16) şəklində tənliklərin həlli prosesində tətbiq edilir. Bu metod aşağıdakı teoremə əsaslanır.

Teorem. *f*(*t*)=0 (17) tənliyinə baxaq. Burada *t*-köməkçi məchul olub və $t_1, t_2, \ldots, t_k$ isə tənliyin kökləridir. Onda *f(g(x))*=0 tənliyini həll etmək üçün $g(x) = t_m, (m = \overline{1,k})$ tənliyinin bütün köklərini tapmaq kifayətdir. Bu köklərin birləşməsi isə *f(g(x))*=0 tənliyinin bütün köklərini verər. Başqa sözlə, $\{f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow \{g(x) = t_1 \cup g(x) = t_2 \cup \cdots \cup g(x) = t_k\}\}$.

Qeyd edək ki, bu metod verilmiş tənliyi bir neçə sadə tənlikdən ibarət sistemə gətirməklə həll etməyə imkan verir.

Misal. $x^2 - \frac{4}{x^2} = x - \frac{2}{x}$

Yeni dəyişən $t = x - \frac{2}{x}$ daxil etsək, onda alarıq $t^2 - t = 0$. Bu tənliyin kökləri isə $t_1=0$, $t_2=1$. Deməli, $x - \frac{2}{x} = 0$ və $x - \frac{2}{x} = 1$ tənliklərini alırıq. Bunları həll edib: $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$ və $x_1 = 2, x_2 = -1$ tapırıq.

Məqalənin aktuallığı. Məktəbin riyaziyyat təlimində ən çox rast gəlinən məsələlərdən biri də tənlik anlayışıdır. Tənliklərin həllində şagirdlər bir sıra çətinliklərlə rastlaşdığından və məqalə də bu mövzuya həsr olunduğundan onu aktual hesab etmək olar.

Məqalənin elmi yeniliyi. Elmi yenilik tənliklərin həllində yeni metodlardan istifadə olunmasıdır.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Məqalədən orta ümumtəhsil məktəblərinin müəllimləri, tələbə və magistrantlar istifadə edə bilərlər.

Ədəbiyyat

1. A.S.Adıgözəlov və b. Elementar cəbr. Bakı, 2012.
2. Məmmədov R.H. Tənliklər və bərabərsizliklər. Bakı, 1991.
3. Məmmədov Ə.H, Şükürov R.Y. Elementar riyaziyyat. Bakı, 2011.
4. Зайцев В.В., Рыжков В.В., Сканави М.И. Задачи по элементарной математике. М., 1976.
5. Гусев А.А., Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике. Геометрия. М., 1992
6. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике. М., 1991.

М.Т. Рзаев

Наиболее важные методы и преобразования в решении уравнений в обучении математики в школе

Резюме

В статье изучается одно из важнейших понятий школьного курса математики понятие-уравнение. Рассматривается важные методы и преобразования при решениях уравнений и иллюстрируется на примерах.

M.T. Rzayev

The most important method and transformations in solving equations in teaching mathematics at school

Summary

The article studies one of the most important concepts of the school course in mathematics, the concept-equation. Important methods and transformations are considered in solving equations and illustrated by examples.

Redaksiyaya daxil olub: 12.11.2019