

Funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətlərinin tapılmasının öyrənilməsində fənlərarası əlaqənin təşkili metodikası

Məftun Nizami qızı Heydərova

Sumqayıt Dövlət Universitetinin dosenti,

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru

Ülviyyə Sanqan qızı Əliyeva

Sumqayıt Dövlət Universitetinin baş müəllimi

E-mail: ulaliyeva_71@mail.ru

Rəyçilər: r.ü.f.d., dos. N.S. Bayramova,

r.ü.f.d., dos. M.N. Sadiqov

Açar sözlər: funksiya, ən böyük qiymət, ən kiçik qiymət, fənlərarası əlaqə

Ключевые слова: функция, наибольшее значение, наименьшее значение, междисциплинарная связь

Key words: function, highest value, smallest value, interdisciplinary communication

Orta məktəbdə riyaziyyat fənninin öyrənilməsinin ən mühüm məqsədlərindən biri törəmənin köməyi ilə şagirdlərdə ekstremuma aid məsələ həlli bacarıqlarının formalaşmasıdır. Doğrudan da, onlarda riyazi modelin qurulması və istifadə edilməsinin bütün fazaları dəqiq göstərilir: formalaşma – məsələ şərtini təsvir edən funksiyanın tərtibi; formalaşmış məsələnin həlli – törəmə funksiyanın qiymətini sıfıra bərabər edən və ya törəmənin olmadığı nöqtələrdə (böhran nöqtələrdə) argumentin qiymətlərinin axtarılması; interpretasiya – məsələnin xüsusiyyətlərini nəzərə almaqla böhran nöqtələrin təhlil edilməsi.

Bununla yanaşı nəzərə almaq lazımdır ki, törəmənin istifadəsi ilə həll edilən məsələləri bir çox hallarda digər üsullarla da (elementar üsullarla) həll etmək mümkündür. Ekstremal məsələlərin müxtəlif həll üsullarının müqayisə edilməsi bir neçə cəhətdən faydalı ola bilər:

– törəmənin köməyi ilə məsələ həllinin xarakterini törəmədən istifadə edilmədən axtarılan üsullarla müqayisə etmək olar;

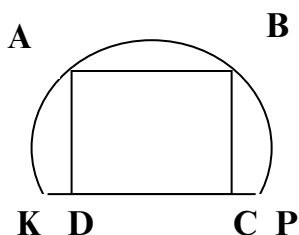
– ekstremal məsələlərin elementar üsullarla həllinin tapılması adətən böyük zəhmət tələb edir və ona zəhm və yaradıcı elementlər daxildir. Eyni zamanda törəmənin istifadəsi prinsipə mürəkkəb olmaya bilər, lakin kifayət qədər böyük hesablamalarla əlaqədardır.

Misal 1. Yarım dairə daxilində çəkilmiş bütün düzbucaqlılardan sahəsi ən böyük düzbucaqlını tapın.

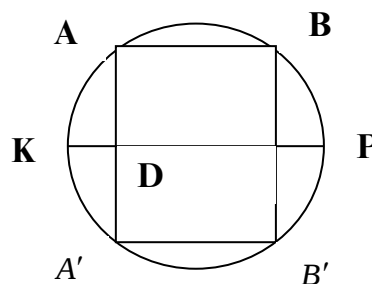
Elementar həll. Tutaq ki, $ABCD$ yarım dairə daxilində çəkilmiş düzbucaqlı, KP isə bu dairənin diametridir (şəkil 1). Bu çevrənin KP diametrinə nəzərən onun obrazı ilə birləşməsi çevrə verir. Həmin çevrə daxilində $AA'B'B$ düzbucaqlısı çəkilmişdir.

$A'B' = Z_{KP}(AB)$ (şəkil 2). $ABCD$ düzbucaqlısı sahəsi $AA'B'B$ düzbucaqlısı sahəsinin yarısına bərabərdir. Buradan alınır ki,

$(ABCD\text{-nin sahəsi maksimum}) \Leftrightarrow (AA'B'B \text{ sahəsi maksimum}).$



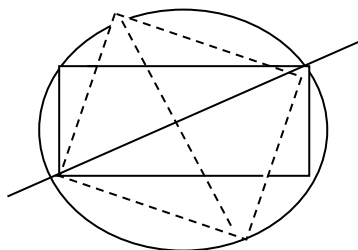
Şəkil 1.



Şəkil 2.

Lakin çevrə daxilinə çəkilmiş bütün düzbucaqlılardan sahəsi ən böyük olanı kvadrattır. Buradan cavab alırıq; axtarılan düzbucaqlının tərəfləri 2:1 nisbətində, sahəsi R^2 -na bərabərdir, burada R – yarım dairənin radiusudur.

Dairə daxilinə çəkilmiş düzbucaqlının ən böyük sahəsinin tapılması məsələsi VIII sinfin riyaziyyat kursunda asanlıqla həll edilə bilər. Doğrudan da, düzbucaqlının diaqonalı onu hipotenuzu dairənin diametrinə bərabər olan iki düzbucaqlı üçbucağa bölür (şəkil 3). Həmin üçbucaqların hündürlükləri o zaman maksimum olar ki, onlar uyğun yarım dairənin diametrinə perpendikulyar radiusa bərabər olsun. Bu halda hər iki üçbucaq bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaq olacaq. Yəni, düzbucaqlı kvadrata çevriləcəkdir.



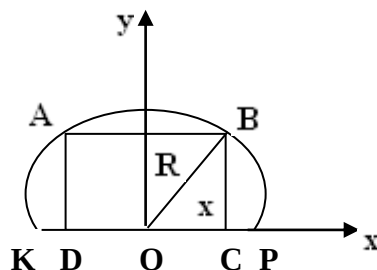
Şəkil 3.

Törəmənin köməyi ilə həll. Verilmiş yarım dairənin koordinat müstəvisində yerləşdiyini fərz edək (şəkil 4). Onda $ABCD$ düzbucaqlısının sahəsi $f(x)$ funksiyası (burada $x=OC$) ilə ifadə edilir:

$$f(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2};$$

$$D(f) =]0; R[.$$

$f(x)$ funksiyasının törəməsi



Şəkil 4.

$f'(x) = 2 \cdot \frac{R^2 - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ şəklindədir. $f(x)$ funksiyasının ekstremumu üçün arqumentin qiymətləri

$$R^2 - 2x^2 = 0 \text{ və ya } x = \frac{\sqrt{2}}{2} R \text{ və } f(x) = R^2$$

tənliklərindən tapılır.

Qeyd edək ki, bu halda böhran nöqtəsinin xarakteri riyazi təsəvvürlərin cəlb edilməsi ilə asan müəyyən edilir: x -in $]0; R[$ intervalının uclarına yaxın qiymətlərində $f(x)$ funksiyası sıfıra yaxın qiymətlər alır (uyğun düzbucaqlılar da «nazikləşir»); əgər x -in qiymətləri $]0; R[$ aralığının uclarından uzaqlaşdıqca $f(x)$ funksiyası artır. Lakin funksiyanın yalnız bir böhran nöqtəsi vardır; aydındır ki, bu nöqtə maksimumdur. Şübhəsiz ki, gətirilən mühakimələr kifayət qədər ciddi deyil, lakin onlar nəticənin əyani aydınlaşdırılması üçün faydalıdır.

Misal 2. Arqumentin müsbət qiymətlərində

$$y = 5x + \frac{2}{x}$$

funksiyasının ən kiçik qiymətini tapın.

Elementar həll. İki ədədin ədədi orta və riyazi orta qiymətləri arasındakı bərabərsizliyə əsasən

$$5x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{5x \cdot \frac{2}{x}} = 2 \cdot \sqrt{10}$$

yazmaq olar. $5x = \frac{2}{x}$ olduqda bərabərsizlik bərabərliyə çevrilir. Buradan $x^2 = \frac{2}{5}$ və ya

$x = \sqrt{0,4}$ tapılır. Funksiyanın ən kiçik qiyməti $2\sqrt{10}$ -a bərabərdir.

Bu misal törəmənin köməyi ilə həllin üstünlüyünü göstərmək üçün əlverişlidir. Lakin bununla yanaşı ədədi orta və riyazi orta anlayışlarının işlədilməsi məqsədlə elementar üsulun şərh olunması məqsəduyğundur.

İndi də törəmənin tətbiq edilməsi vasitəsi ilə cavabın gözlənilmədən alınmasını göstərən aşağıdakı misalları nəzərdən keçirək. Həmin misallar şagirdlərin riyazi intuisiyasının sonrakı inkişafı üçün çox əhəmiyyətlidir. Şagirdlər qarşısında sual qoymaq lazımdır ki, cavabın belə gözlənilməzliyini aydınlaşdırmaq, onu qabaqcadan görmək olarmı? kimi iş aparmaqla müəlim Gözlənilməyən cavablar verən məsələlərin olmasını şagirdlərə bildirməkdir.

Misal 3. Hündürlüyü $H=1$ m, oturacağın radiusu $R=3$ m olan konusun təpə nöqtəsindən keçən kəsiyin ən böyük sahəsini tapın.

Məsələ şərti ilə «qaçaraq» tanışlıq və konusun sahəsi ən böyük olan kəsiyi kimi onun ox kəsiyi olacağı ehtimal olunur. Ox kəsiyində alınan üçbucağın oturacağının uzunluğunun ən böyük olması da bu intuitiv təsəvvürü möhkəmləndirir.

Həlli. Tutaq ki, kəsik konusun oturacağındakı dairəni AB parçası üzrə kəsir (şəkil 5). AB parçasına OK perpendikulyarını nəzərdən keçirək $x=OK$ qəbul edək. Onda ABC üçbucağının sahəsi x -dən asılı funksiya kimi ifadə olunajaqdır:

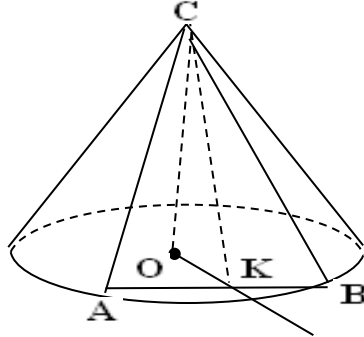
$$f(x) = \frac{1}{2} AB \cdot CK = \sqrt{9 - x^2} \cdot \sqrt{1 + x^2}; \quad D(f) =]0; 3[$$

$f(x)$ funksiyasının nəzərdən keçirilən $[-3; 3]$

təbii təyin oblastında törəməsi $x = 0$, $x = 2$ və $x = -2$

nöqtələrdə sıfır bərabərdir. Parçada funksiyanın ən böyük qiymətinin tapılması qaydasından istifadə

Şəkil 5.



edərək $[0;3]$ parçasında $f(x)$ funksiyası bu qiyməti $x=2$ nöqtəsində alır. Beləliklə, kəsiyin ən böyük sahəsinin 5-ə bərabər olduğunu tapırıq. Qeyd edək ki, $x=0$ qiymətinə uyğun olan konusun ox kəsiyinin sahəsi 3-ə bərabərdir; bu isə genişlənmiş təyin oblastında $f(x)$ funksiyanın minimumudur.

Konusun kəsiyi sahəsinin maksimum qiymət aldığı yeri tapmağı aşağıdakı kimi aydınlaşdırmaq olar: ABC üçbucağının sahəsi CK hündürlüyü və AB oturacağından asılıdır. x -in qiymətləri 0-dan 3-ə qədər artdıqda oturacağın uzunluğu monoton artır. Ancaq bu dəyişmələr bir birini kompensasiya etmir. Bunu hündürlüyü oturacağından çox kiçik olan (məsələn, $H=1$, $R=10$) konus üzərində əyani olaraq təsəvvür etmək olar. Belə konus üçün göründüyü kimi, $x=0$ qiymətindən başlayaraq x -in qiymətləri artdıqca kəsiyin sahəsi əvvəlcə artır; ona görə ki, bu halda AB oturacağı nəzərə alınmayacaq dərəcədə azalır, OK hündürlüyü sürətlə artır: mütləq qiymətcə x -in kiçik qiymətlərində

$$AB = \sqrt{100 - x^2} \approx 10 \left(1 - \frac{x^2}{20} \right) = 10 - 0,5x^2;$$

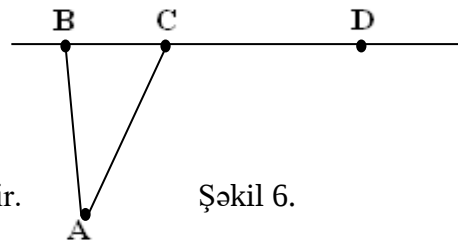
$$KC = \sqrt{1 + x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{2};$$

$$S(CAB) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot KC \approx 10 + 4,5x^2 \geq 10 \text{ olur.}$$

Misal 4. Meşədə ovçu düzxətli yoldan 5 km, yolun kənarında yerləşən evindən 12 km məsafədədir. Meşədə onun hərəkəti 3 km/saat, yolda isə 5 km/saat-dır. Onun evə gələ bilməsinə sərf olunan ən az vaxtı tapın.

Məsələ ovçunun yola çıxma yerinin tapılmasına gətirilir. Təbii olaraq belə ehtimal olunur ki, ən yaxşı meşədən mümkün qədər tez çıxmaqdır, yəni yola perpendikulyar istiqamətdə hərəkətdir; çünki, ondan sonra böyük sürətlə hərəkət etmək olar. Digər tərəfdən, əgər ACD marşrutu

(şəkil 6) seçilərsə, onda AC parçasında itirilən vaxtı (AB parçası ilə müqayisədə) CD parçasında (BD ilə müqayisədə) qazılan vaxtla kompensasiya etməklə vaxt qazanmaq imkanı itirilməmişdir. Ona görə birinci fərziyyə artıq elə də aşkar görünməməlidir.



Şəkil 6.

Həlli. Şəkil 5-ə əsasən $AB=5$ km, $BD=13$ km və $BC=x$ km olsun. Onda

$$f(x) = \frac{12-x}{5} + \frac{\sqrt{25+x^2}}{3}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

funksiyasının ən kiçik qiymətini axtarmalıyıq. $f(x)$ funksiyasının törəməsini hesablayıb

$$f'(x) = -\frac{1}{5} + \frac{x}{3\sqrt{25+x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ tənliyindən } x = \frac{15}{4} \text{ yeganə kök tapırıq. Aydındır ki, } f(x) \text{ funksiyasının yeganə}$$

ekstremal nöqtəsi vardır. Bu nöqtədə $f(x)$ özünün ən kiçik qiymətini alır və ovçunun evə çatması üçün sərf olunan 3 saat 44 dəqiqəyə bərabər ən az vaxtı tapırıq.

Qeyd etmək lazımdır ki, həm misal 3-də, həm də misal 4-də parametrlərin ədədi qiymətlərinin seçilməsi başqa olsa idi, onda cavab keyfiyyətə başqa ədədlər ola bilərdi: misal 3-də kəsiyin ən böyük qiyməti konusun ox kəsiyi ola bilərdi, misal 4-də C nöqtəsi D nöqtəsi ilə üst-üstə düşdükdə minimum qiymətini alardı.

Törəmənin tətbiqi ilə əlaqədar materiallar arasında ekstremuma aid mətnli məsələlərin həlli şagirdlərdə ciddi çətinliklər yaradır. Törəmənin tətbiqinin köməyi ilə məsələ həlli üsulu məsələnin məzmunundan asılı olmayaraq universal üsul olduğunu müəllimin nəzərə çatdırması faydalıdır.

Belə praktik məsələləri həll etmək üçün əvvəlcə onu riyazi terminlərdə ifadə etmək (məsələnin riyazi modelini qurmaq), sonra onu riyazi metodlarla həll etmək (bu halda törəməni tətbiq etmək) və bundan sonra alınan nəticəni təklif olunan məsələnin terminlərində interpretasiya etmək lazımdır.

Həmin plan aşağıdakı kimi ola bilər:

- 1) nəzərdən keçirilən məsələdə hansı kəmiyyətlər sabit, hansıları dəyişəndir; hansı kəmiyyət araşdırılır;
- 2) bütün dəyişənlərdən bir asılı olmayan dəyişəni seçmək və onun qiymətlər oblastını müəyyən etmək;
- 3) bu məsələdə araşdırılan kəmiyyəti seçilmiş asılı olmayan kəmiyyətlə ifadə etmək;
- 4) Alınan funksiyanın dəyişənin qiymətlər oblastında böhran nöqtələrini tapmaq;
- 5) tapılan böhran nöqtələrində və alınan funksiyanın təyin olunduğu parçanın uc nöqtələrində funksiyanın qiymətlərini hesablamaq;
- 6) məsələnin tələbinə uyğun olaraq bu qiymətlər arasından ən böyük və ya ən kiçik olanını seçmək və məsələdə qoyulan suala cavab vermək.

Həmin plan cədvəl şəklində hazırlanaraq sinif divarında asıla bilər, həmçinin şagirdlərin dəftərlərində yazıla bilər. Nəzərə almaq lazımdır ki, göstərilən plan işin asanlaşmasına kömək edən vasitədir. Məsələni düzgün həll edən, lakin bu plandan istifadə etməyən şagirdin qiymətini azaltmaq da doğru deyildir.

Göstərilən planda ən mürəkkəb iş üçüncü bənddən ibarətdir. Şagird verilmiş məsələdə seçilən dəyişəndən asılı araşdırılan kəmiyyətin ifadə etdiyi funksional asılılığın analitik düsturunun yazılması. Ona görə işin bu hissəsini yerinə yetirməyə şagirdləri hazırlamaq lazımdır. Bu məqsədlə onlara aşağıdakı kimi məsələlər təklif oluna bilər:

- 1) kvadratın tərəfinin onun sahəsindən asılılığını düsturla ifadə edin;
- 2) verilmiş perimetri P olan düzbucaqlının tərəflərindən birinin uzunluğu x -dir. Bu düzbucaqlının $S(x)$ sahəsinin x tərəfindən asılılığını düsturla ifadə edin;
- 3) verilmiş həcmi V olan konusun yan səthinin sahəsini:

a) oturacağın radiusu; b) konusun hündürlüyü vasitəsilə ifadə edin.

4) r radiuslu çevrə daxilinə çəkilmiş düzbucaqlının sahəsini onun tərəflərindən biri ilə ifadə edən düstur düzəldin.

Müəyyən bir kəmiyyətin digərinin funksiyası kimi göstərən ifadənin axtarılmasına aid məsələlərin həlli funksiyanın analitik düsturun köməyi ilə verilməsinin nəzərdən keçirilməsi ilə bərabər. «Ədədi funksiyalar» mövzusunun materialları ilə yaxşı əlaqələndir.

İlk vaxtlarda bu məsələlərdə nisbətən sadə riyazi materialdan istifadə olunur: şagirdlərə riyaziyyat kursundan ən elementar məlumatlar lazımdır ki, onları analiz kursu üzrə məsələnin həllinə gətirə bilsin.

Mövzunun öyrənilməsində aralıqda funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətinin tapılması haqqındakı məsələnin böyük əhəmiyyəti vardır. Bu məsələni nəzərdən keçirdikdə ilk növbədə aralıqda funksiyanın «ən böyük» və «ən kiçik» qiymətinin nə demək olduğunu aydınlaşdırmaq lazımdır. Şagirdlər özləri üçün aydınlaşdırmalıdırlar ki, funksiyanın aralıqda «ən böyük» («ən kiçik») qiyməti funksiyanın bu aralıqda aldığı bütün qiymətlərdən ən böyüyünə («ən kiçiyinə») deyilir. Sonra aralığın hansı nöqtələrində ən böyük və ya ən kiçik qiymətlərin alınma bilməsinin aydınlaşdırılması üzrə iş aparılır. Funksiyanın bu zaman həmin aralıqda diferensiallanan olması tələbələrin diqqətinə çatdırılması xüsusi əhəmiyyətə malikdir. Belə ki, onun əsasında funksiyanın aralıqda kəsilməz olması haqqında nəticə çıxarılır.

Funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətlərinin axtarılmasının dərslərdə göstərilən uyğun qayda ilə nümayiş etdirərək müəllim bu qaydanın aralıq üçün ifadə edildiyini nəzərə almalıdır. Bu isə $[a;b]$, $[a;b[$, $]a;b]$, $]a;b[$ şəklində istənilən aralıq kimi başa düşülür. Belə olduqda $[a;b[$, $]a;b]$, $]a;b[$ aralıqlarının hər iki uc nöqtələrində, qaydanın tələb etdiyi kimi, funksiyanın qiymətlərinin tapılması mümkün deyildir.

Məqalənin aktuallığı. Funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətlərinin tapılmasına aid materialın öyrənilməsi müxtəlif məsələlərin, o cümlədən, riyazi məsələlərin həlli üçün analizin başlanğıcında verilən nəzəriyyənin tətbiq dairəsinin genişliyini göstərməyə imkan verir.

Məqalənin elmi yeniliyi. Məlumdur ki, istənilən məsələnin həlli müəyyən plan tərtibi ilə, məsələnin alqoritminin işlənilib hazırlanması ilə sadələşir. Ona görə şagirdlərlə birlikdə ekstremuma aid məsələlərin həlli planının işlənməsi də faydalı olar.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Məqalədə qeyd olunan məsələlərdə nisbətən sadə riyazi materialdan istifadə olunur: şagirdlərə riyaziyyat kursundan ən elementar məlumatlar lazımdır ki, onları analiz kursu üzrə məsələnin həllinə gətirə bilsinlər.

Ədəbiyyat

1. Adıgözəlov A.S., Əliyeva T.M. Riyaziyyatın tədrisi prosesində fənlərarası əlaqələrin tətbiqi. Metodik vəsait. Bakı, Maarif, 1993, 166 s.

2. Mustafayev Q.A. Orta məktəbdə riyazi analiz elementlərinin tədrisi. Bakı, Maarif, 1967, 102 s.

М.Н. Гейдарова, У.С. Алиева

Составление методики по организации междисциплинарных связей при изучении нахождения наибольшего значений функции

Резюме

Одной из важных задач при изучении школьного курса математики является формирование у школьников навыков решения задач на экстремум. В данной статье для решения вышеуказанной задачи используются более простые способы и методы решений, так как для решения задач из курса математического анализа ученикам необходимы элементарные знания из школьного курса математики.

M.N. Haydarova, U.S. Aliyeva

Drafting a procedure for organization interdisciplinary relationships in studying finding the biggest and the smallest function values

Summary

One of the important tasks in the study of the school course of mathematics is the formation of students' skills in solving problems for extremism. In this article, to solve the above problem, simpler methods and methods of solutions are used, since to solve problems from the course of mathematical analysis, students need basic knowledge from the school course of mathematics.

Redaksiyaya daxil olub: 02.10.2020