Ali pedaqoji məktəblərin "Riyazi analiz" kursunun «Ədədi sıralar» bölməsinin tədrisi prosesində kontrmisallardan istifadə imkanları

Əhməd Nüsrət oğlu Məmmədov
pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru,
Bakı Qızlar Universitetinin dosenti
E-mail: ahmed mamedov@bk.ru

Rəyçilər: r.ü.f.d., dos.E.C. İbadov
r.ü.f.d., R.H. Şirinov

Açar sözlər: kontrmisallar, yığılan sıra, dağılan sıra, xüsusi cəm, yığılan ardıcıllıq, dağılan ardıcıllıq

Ключевые слова: контрпримеры, сходящие ряды, расходящие ряды, частичные сумму, сходящие последовательности, расходящие последовательности

Key words: contra-examples, collapsible series, collapsible series, special sum, accumulated sequence, collapsible sequence

Azərbaycan müstəqillik əldə etdikdən sonra, onun ictimai-siyasi o cümlədən, mədəni həyatında ciddi dəyişikliklər baş verməkdədir. Bu istiqamətdə cəmiyyətimizin bütün sahələrində inkişaf sürətlə aparılır. Onun əsasında duran respublikamızın təhsil sistemi məzmun və xarakterini dəyişir, dünya təhsil sisteminin tələb etdiyi ən əsas keyfiyyətləri qazanaraq, dünya təhsil sisteminə inteqrasiya edir.

XXI əsrin əvvəllərində respublikamızın təhsil sisteminin yenidən qurulması, modernləşdirilməsi və aparılan işlərin yeni innovasiyalardan, yeni təlim və pedaqoji texnologiyalardan istifadə olunmaqla yerinə yetirilməsi ümdə problem kimi qarşıda durur, başqa sözlə desək, yeni təlim və pedaqoji texnologiyaların təlimdə tətbiqi prioritet problem hesab olunur. Onların yerinə yetirilməsi, həll olunması üçün müasir, yeni pedaqoji tədqiqatlar aparmağa ehtiyac duyulur.

Burada ali pedaqoji məktəblərin bakalavriat pilləsinin «Riyaziyyat», «Riyaziyyat və informatika», «İnformatika» ixtisasında təhsil olunan "Riyazi analiz" kursunun (fənninin) geniş tətbiqi əhəmiyyəti olan «Ədədi sıralar» bölməsinin tədrisi prosesində qurulan kontmisallar və onlardan istifadə olunması imkanları və metodikasından danışılır.

Qeyd edək ki, ali pedaqoji məktəblərin inkişafının, yüksək ixtisaslı mütəxəssislər hazırlanması, onların professional və vətəndaşlıq vəzifələrinin əsasını elmi-pedaqoji kadrların fəaliyyəti təşkil edir.

Ümumiyyətlə, onu qeyd edək ki, riyaziyyatın tədrisi prosesində, istifadə olunan metod və vasitələr özünün spesifik xüsusiyyətləri ilə digər fənlərdən həmişə seçilir. Belə metod və vasitələr, həmçinin müasir texniki vasitələr (texnologiyalar) bir çox tədris vəsaitlərində geniş şəkildə öz əksini tapmaqdadır. Bunlar kurikulumun təhsilə yeni baxışların vüsət aldığı bir dövrdə, məktəblərdə şəxsiyyətyönülü bacarıq və vərdişlərin inkişafı baxımından daha prioritetdir.

Təlim prosesinin keyfiyyət və səmərəliliyinin yüksəldilməsi, tələbələr tərəfindən riyazi anlayışların əsaslı şəkildə öyrənilməsi və mənimsənilməsində digər metod və vasitələrlə yanaşı, təlimdə konrmisallardan istifadə mühüm rol oynayır.

Konrmisallardan ən çox təlim prosesində bu və ya digər təklifin inkarının doğru olub olmamasını göstərmək üçün istifadə olunur.

Bu işdə «Ədədi sıralar» bölməsində bəzi teorem və təkliflərdə kontrmisallar və onların istifadə olunması yeri, imkanları və onun istifadə metodikasından bəhs olunur.

Məlumdur ki, bu bölmədə əvvəlcə «Ədədi sıra» anlayışına tərif verilir.

Tərif. Tutaq ki, $a_1 + a_1 + ... + a_n + ...$ həqiqi ədədlər ardıcıllığı verilmişdir. Bu ardıcıllığın hədlərindən düzəlmiş

$$a_1 + a_1 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

sonsuz cəminə ədədi sıra deyilir.

Tərifdən sonra bir sıralara aid bir neçə misal (nümunə) göstərilir. Bundan sonra "Sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığı" və nəhayət "yığılan sıra" və "dağılan sıra" anlayışları verilir. Belə ki, sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığı yığılan olduqda sıraya yayılan, əks halda isə dağılan sıra deyilir.

Sadə misallar əsasında yığılan və dağılan ədədi sıralarına aid aşağıdakı nümunələrə baxmaq təlimin səmərəliliyi və metodiki yanaşma baxımından faydalıdır.

1. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$ sırasına yığılan olmasın araşdırılması və cəminin tapılması.

2. 1+2+3+…+n+… sırasına dağılan olmasının araşdırılması.

3. $1+q+q^2+…+q^n+…$ sırasının hansı halda yığılan və hansı halda dağılan olmasının araşdırılması.

4. Daha ümumi halda

$b_1+b_2+…+b_n+…$, burada $b_n=b_1 \cdot q^{n-1}$, sırasının hansı halda yığılan, hansı halda isə dağılan olmasının araşdırılması.

Tələbələrin diqqətini bunların araşdırılmasına yönəltdikdən sonra uyğun misalların (nümunələrinin) müstəqil qurulmasını onların özlərinə də tapşırmaq, bilik, bacarıq və vərdişlərinin inkişaf etdirilməsi baxımından da əhəmiyyətlidir.

Aşağıdakı teoremlərə baxaq.

Teorem 1. $a_1 + a_1 + ... + a_n + ... \qquad (1)$

$$b_1 + b_2 + ... + a_n + ... \qquad (2)$$

sıraları yığılandırsa, onda onların uyğun olaraq cəmi, fərqi adlanan

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n) + ... \qquad (3)$$

və

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + ... + (a_n - b_n) + ... \qquad (4)$$

sıralarının hər biri yığılandır. Tələbələrin diqqətini bu teoremin tərsinin doğru olub-olmamasına yönəltmək lazımdır.

Yəni iki sıranın cəmi yığılan olduqda hər bir sıranın yığılması haqqında nə demək olar? Yaxud cəm sıra yığılan olduqda, hər bir sıranın yığılan olmasını hökm etmək olarmı?

Kontrmisal. 1. $\sum_{n-1}^{\infty} a_n = 1 + 1 + ... + 1 + ...$ və $\sum_{n-1}^{\infty} b_n = -1 - 1 - ... - 1 - ...$ sıraların hər biri dağılandır, onların cəmi isə yığılandır. Yəni dağılan sıraların da cəmi yığılan (bu halda) ola bilər.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+...$ və $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n})=-1-\frac{1}{2}-...-\frac{1}{n}+...$ sıralarının hər biri dağılandır. Lakin onların cəmi yığılandır və bu iki sıranın cəmi $S=0$-dır.

Bu və ya digər misallarla tələbələrdə fikir formalaşır: Yuxarıdakı teoremin tərsi həmişə doğru deyil. yəni dağılan sıraların da cəmi yığılan ola bilər.

Analoji kontrmisalları sıralarının fərqi üçün də göstərmək olar (bunu tələbələrin özünə tapşırmaq olar).

Riyazi analizin bu bölməsində aşağıdakı teoremləri də nəzərdən keçirək.

Teorem 2. (1-ci müqayisə əlaməti) Hədləri mənfi olmayan.

$$a_1+a_2+...+a_n+..., \qquad (1)$$

$$b_1+b_2+...+b_n+... \qquad (2)$$

sıraları üçün n-in müəyyən n_0 nömrəsindən sonra gələn $(n\geq n_0)$ qiymətlərində $a_n\leq b_n$ ödənərsə və (2) sırası yığılandırsa, onda (1) sırası da yığılandır, yaxud (1) sırası dağılandırsa, onda (2) sonrası da dağılandır.

Sual: Bu teorem ixtiyari işarəli sıralar üçün də doğrudurmu?

Ümumi həddi $a_n=-\frac{1}{n}$ və $b_n=\frac{1}{3^n}$ sıralarının hədləri arasında

$a_n<b_n$, yəni $-\frac{1}{n}<\frac{1}{3^n}$ münasibəti ödənir.

$\sum_{4=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ sırası yığılandır:

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}+...$ bu sıranın cəmi $S=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

Lakin $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ sırası dağılandır. Yaxud bu misal üçün teoremin 2-ci hissəsi ödənmir yəni, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ dağılandır, lakin $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ sırası dağılan deyil.

Digər müqayisə əlamətləri üçün də xarakterik kontrmisallar qurmaq mümkündür.

Bu teoremi $|a_n|\leq|b_n|$ şəklinin ödədiyi hal üçün də ümumiləşdirib müvafiq kontrmisallar göstərmək olar. Məsələn, ümumi hədləri $a_n=\frac{1}{n\ln n}$ və $b_n=\frac{(-1)^n}{n}$ olan sıralara baxmaq kifayətdir.

Teorem 3. Sıra yığılandırsa, onda onun ümumi həddinin limiti sıfra bərabərdir (Koşi meyarının əsasən göstərilir).

Məntiqin qanunları baxımında buraya yanaşsaq, onda belə bir nəticəyə gəlmək olur ki, əgər sıranın ümumi həddinin limiti sıfra bərabər deyilsə, yəni (1) sırası üçün $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ olarsa, onda sıra dağılandır. Təbii ki, zəruri şərtin deyilişindən və isbatından sonra, dərhal tələbələrin qarşısına belə bir sual çıxır: Həmin şərt həm də kafi ola bilərmi? Yəni, ümumi həddin limiti sıfra bərabər olan elə sıralar varmı ki, yığılan olsun?

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ harmonik sırasının ümumi həddinin limiti sıfırdır: $\lim_{n-2\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Koşi meyarına əsasən göstərmək olar ki, $\sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sırası dağılandır.

Sıranın ümumi həddinin limiti sıfra bərabərdir, lakin sıra dağılandır.

Daha bir misala baxaq.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$ sırası üçün $a_n = \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, (ekvivalent sonsuz kiçilənlər) və $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Ona görə də $\lim_{n\to 2\infty} \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}} = 0$.

$$a_k = \frac{k+2}{(k+1)\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$S_n = \sum_{k-1}^{n} a_k \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Deməli, $S_n \geq \sqrt{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, yəni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dağılandır.

Əlavə olaraq $\ell_n\left(1+\frac{1}{1}\right) + \ell_n\left(1+\frac{1}{2}\right) + ... + \ell_n\left(1+\frac{1}{n}\right) + ...$ sırasının yığılmasının zəruri şərtə görə araşdırmağı tələbələrin özlərinə tapşırmaq olar.

Teorem 4. $a_n \geq 0$ olduqda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığılandırsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ sırası da yığılandır.

Ümumi həddi $a_n = \frac{1}{2n-1}$ olan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ sırasının dağılan olduğunu göstərək.

Sıranın $\{S_n\}$ xüsusi cəmlər ardıcıllığı artandır. Doğurdan da:

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{2n-1}$$

$$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}$$

$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} \geq 0 \Rightarrow S_{n+1} > S_n$, yəni $\{S_n\}$ ardıcıllığı artan ardıcıllıqdır. Göstərək ki, o yuxarından məhdud deyil.

$\{S_n\}$ ardıcıllığının { $S_2 n$ } alt ardıcıllığına baxaq.

$$S_2 = 1 + \frac{1}{3} \quad S_4 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7},\ S_8 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}, \ldots$$

$$S_2 n = \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) + ...\left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + ... + \frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$$

$$\frac{1}{2^n+2}+\frac{1}{2^n+3}+....+\frac{1}{2^{n+1}-1}>\frac{2^{n-1}}{2^{n+1}}=2^{-2}=\frac{1}{4}$$ yəni,

$1+\frac{1}{3}>1$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}>\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}>\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$, …

Deməli, $S_2n=\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)+...+\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+...+\frac{1}{2^{n+1}}\right)>$

$>1+(\mathrm{n}-1)\frac{1}{4}=1+\frac{n-1}{4}$, yəni $\mathrm{S}_2n>1+\frac{\mathrm{n}-1}{4}$

Buradan alınır ki, $\{S_n\}$ardıcıllığının $\{S_{2^n}\}$ altardıcıllığı yuxarıdan qeyri-məhduddur. Deməli, $\{s_n\}$ ardıcıllığı da artan ardıcıllıq və yuxarıdan qeyri-məhdud olduğundan dağılandır. Bu isə onu göstərir ki, verilmiş $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ sırası dağılandır. Bu sıranın hədlərinin kvadratlarından düzəlmiş $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ sırası yığılandır. Müqayisə əlamətinə əsasən $\frac{1}{(2n-1)^2}<\frac{1}{n^2}$ doğru bərabərsizliyindən $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ sırası yığılan olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ sırasının da yığılan olması alınır. Ona görə də alırıq ki, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ sırasının yığılmasından $\sum_{4=1}^{\infty}a_n$ sırasının həmişə yığılan olması alınmır. Deməli, tərs təklif həmişə doğru deyil.

"Ədədi sıralar" bölməsində bir sıra kafi şərtlər isbat olunur:

1. Dalamber əlaməti:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\ a_n>0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$$

a) $L<1$ olduqda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ yığılır

b) $L>1$ olduqda $\sum_{4=1}^{\infty}a_n$ sırası dağılır.

c) $L=1$olduqda sıra yığıla da bilər dağıla da bilər (məsələ açıq qalır).

Burada da tələbələrin qarşısına təbii ki, aşağıdakı sual çıxır: Bu şərt zəruri ola bilərmi, yəni $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sırası yığılandırsa, buradan alınırmı ki, $L<1$, başqa sözlə $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, yaxud digər şərtlər doğru ola bilərmi?

Suala cavab vermək üçün aşağıdakı sıraya baxaq:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+...+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+....$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3^n}{2^n}\right)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\infty$$

Lakin $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$ sırası yığılandır.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}$$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=S_1^{(n)}$ və $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}=S_2^{(n)}$ işarə etsək, $\lim_{n\to\infty}S_1^{(n)}=1$, $\lim_{n\to\infty}S_2^{(n)}=\frac{1}{2}$ olduğundan

$\lim_{n\to\infty}S_n=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ olar.

Ona görə də $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$, sıranın özü isə yığılandır. Deməli, tərs teorem (təklif) ümumiyyətlə, doğru deyil.

Qeyd edək ki, Dalamber əlamətini (limit şəklində ifadəsini) Riyazi analiz kursunda ümumiləşmiş harmonik sıra adlanan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ tətbiq etmək olmaz (α - istənilən həqiqi ədəddir)

$$\lambda_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \text{ və } \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}=1$$

Göründüyü kimi Dalamber əlaməti tətbiq oluna bilmədi.

Lakin məlumdur ki, bu sıra $\alpha>1$ olduqda sıra yığılan $\alpha\le 1$olduqda isə dağılandır.

Ümumi həddi $a_n=\frac{n!e^n}{n^n}$ olan sırası üçün $\lambda_n=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$ olduğundan $\lambda_n>1$ (bütün n-lər üçün).

Deməli, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n}$ sırası dağılandır.

Lakin Dalamber əlamətinin limit şəklində ifadəsini tətbiq etsək:

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=1$$

Yəni, limit şəklində Dalamber əlaməti, limitsiz şəklində verilən Dalamber əlamətindən güclüdür.

Bu bölmədə daha bir təklifi (teoremi) nəzərdən keçirək.

Teorem 4. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,(a_n>0)$ sırası üçün $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$ limiti varsa, onda $\lim_{n\to\infty\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$ limiti də var.

Məlum olduğu kimi:

2) Koşi əlaməti

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$$

$L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ olsun

$L > 1$ olduqda isə $\sum\limits_{-1}^{\infty} a_n$ sırası dağılandır.

Ümumiləşmiş harmonik sırasına bu əlaməti tətbiq etmək olmaz. Belə ki,

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^{\alpha} = 1 \quad \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 - dir\right)$$

Lakin $\alpha > 1$ olduqda sıra yığılan $\alpha \le 1$ olduqda isə dağılandır.

Təbii ki, belə bir sual yaranır: Bu teoremin də tərsi həmişə doğrudurmu? Yəni $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ limitinin varlığından çıxırmı ki, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ limiti də var?

Aşağıdakı misala baxaq:

$$a_n = \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}},\ \sigma_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{3+(-1)^n} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2\left(3+(-1)^n\right)}$$

$\{\sigma_n\}$ ardıcıllığı üçün $\sigma_{2n} = \frac{3-1}{2\cdot(3+1)} = \frac{1}{4}$, $\sigma 2_{n+1} = \frac{3+(-1)^{2n+2}}{2\left(3+(-1)^{2n+1}\right)} = \frac{4}{4} = 1$

$\{\sigma_{2n}\}$ və $\{\sigma_{2n+1}\}$ altardıcıllıqları müxtəlif limitlərə yığıldığından

$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ yoxdur. Lakin

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(3+(-1)^n\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\cdot \ell n\left(3+(-1)^n\right)}$$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\ell_n 3 + \frac{(-1)^n}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}$, yaxud $n = 2k$, $n = 2k-1$ hallarına baxmaqla da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ olduğunu göstərmək olar.

Deməli, tərs təklif bu halda da doğru deyil.

Bu və ya digər misallar göstəririk ki, Koşinin radikal əlaməti, Dalamber əlaməti ilə müqayisədə daha güclü əlamətdir.

Qeyd edək ki, digər teorem və təkliflərdə də kontmisallardan istifadə etdikdə anlayışlar tələbələr tərəfindən düzgün mənimsənilir və onların formalaşmalarında müstəsna əhəmiyyət kəsb edir.

Məqalənin aktuallığı. Ali pedaqoji məktəblərin "Riyazi analiz" kursunun səmərəliliyinin artırılmasında bir çox metod və vasitələr mövcuddur. Onlarından biri də təlimdə kontrmisallardan istifadədir. Belə misallar öyrəniləcək mövzuda teorem və digər təkliflərdəki şərtlərin nə dərəcədə zəruri və ya kafi olduğu, təkliflərin tərsinin doğru olub-olmaması qurulan kontrmisallarla mənimsədilir.

Məqalənin elmi yeniliyi. "Riyazi analiz" kursunda ilk dəfə olaraq təlim prosesində kontrmisalların yeri və istifadə olunması müəllif tərəfində ideya kimi irəli sürülür və təlimin keyfiyyətinin yüksəldilməsində bir vasitə olduğu tədqiq olunur.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Müəllif tərəfindən irəli sürülən bu ideya-kontrmisallardan istifadə yönümündə alınan elmi-nəticələrdən "Riyazi analiz" kursunun digər bölmələrində də tətbiq oluna bilər. Təlim prosesində kontrmisallar tələbələrin riyazi analiz dair biliklərinin sistemləşdirilməsində, o cümlədən, bilik və bacarıqlarını formalaşmalarında yaradıcılıq imkanlarının artırılmasında müstəsna əhəmiyyət kəsb edir. Hal-hazırda müəllif tərəfindən digər riyazi fənlərin təlimi prosesində də geniş tətbiq olunur və inkişaf etdirilir. Bu da təlimin səmərəliliyi baxımından çox əhəmiyyətlidir.

Ədəbiyyat

1. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1997.

2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М.: Наука, 1969.

3. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М., 2004.

4. Шибинский В.М. Примеры и контрпримеры по математическому анализу. М.: Высшая школа, 2007.

5. Demidoviç B.P. Riyazi analizdən məsələ və çalışmalar (rus dilindən tərcümə). Bakı, 2001.

6. Davıdov N.A., Korovkin P.P., Nikolski V.N. Riyazi analizdən məsələlər (rus dilindən tərcümə). Bakı: Elm və Təhsil, 2016.

А.Н. Мамедов

Возможности использования контрпримеров в процессе преподавания раздела «Числовые ряды» курса «Математический анализ» высших педагогических школ

Резюме

Исследовательская работа основана на примерах, используемых в обучении математическому анализу. Контрпримеры используются в процессе обучения, когда необходимо показать, что то или иное предположение не соответствует действительности. Здесь в разделе «Числовые ряды» приведены контрпримеры и методы и инструменты для их использования, которые играют неоценимую роль в повышении эффективности обучения, повышении творческого потенциала студентов.

Автор считает, что использование контрпримеров очень важно в других разделах курса «Математический анализ», а также при преподавании других математических дисциплин.

A.N. Mammadov

Possibilities of using counter-examples in the process of teaching the section "Numerical series" of the course "Mathematical analyses of higher pedagogical schools

Summary

The research work in based on the examples used in the teaching of mathematical analysis. Counter-examples are used in the learning process when it is necessary to show that one or another suggestion is not true. Here in the section "Numerical series" are given counter-examples and methods and tools for their use, which play an invaluable role in increasing the effectiveness of training, increasing the creative potential of students.

The author believes that the use of contra-examples is very important in other sections of the course "Mathematical analysiz", as well as in the teaching of other mathematical disciplines.

Redaksiyaya daxil olub: 06.12.2021