Məktəb riyaziyyat təlimində bəzi mühüm bərabərsizliklərin isbatı şagirdlərin təfəkkür fəallığını inkişaf etdirən vasitə kimi

Musa Tapdıq oğlu Rzayev
pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru,
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
E-mail: musa.rzayev.73@mail.ru
Nərmin Xosrov qızı Mirzəzadə
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitet
E-mail: nermin.mirzeyeva99@mail.ru

Rəyçilər: r.ü.f.d., dos. A.Q. Cəfərov,
p.ü.f.d., dos. N.B. Nəsirov

Açar sözlər: bərabərsizlik, anlayış, təfəkkür, məsələ, üsul, müqayisə, sintez, riyazi induksiya, xassə, tənlik, maksimum
Ключевые слова: неравенство, понятие, мышление, задача, метод, сравнение, синтез, математическая индукция, свойство, уравнение, максимум
Key words: inequalities, fundamental, thinking, problem, method, comparison, synthesis, mathematical induction, property, equation, maximum

Məktəb riyaziyyat təlimində bərabərsizlik anlayışının şagirdlərə öyrədilməsi mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Belə ki, tənliklərin, təqribi hesablamaların, funksiyaların araşdırılmasında və s. məsələlərdə geniş istifadə edilir. Aparılan müşahidələrdən aydın olur ki, orta məktəb müəllimləri bərabərsizliklərin isbatına bir o qədər əhəmiyyət vermirlər. Belə müəllimlərə haqq qazandırmaq olmaz. Bərabərsizliklərin isbatı yuxarıda göstərilən məsələlərin həllinə stimul verir. Bu kimi məsələlərin aradan qaldırılması məqsədi ilə məqalədə bir sıra bərabərsizliklərin müxtəlif üsullarla isbatını verməyə çalışacağıq.

Qeyd edildiyi kimi, bərabərsizliklər müxtəlif üsullarla isbat edilir: Bərabərsizliyin hər iki tərəfinin işarəsini müəyyən etməklə; əksini fərz etməklə; bərabərsizliyin tərəflərinin eyni bir ədədlə müqayisə etməklə; sintez üsulu ilə; gücləndirmə üsulu; həndəsi və triqonometrik üsulla. Deyilənlərin bir neçəsini nəzərdən keçirək:

$$\underbrace{\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\cdots+\sqrt{42+\sqrt{42}}}}}}_{n\ \text{dənə}\ 42\ \text{ədədi var}} < 7$$

bərabərsizliyinin doğru olduğunu isbat edin.

Birinci hal: Riyazi induksiya metodunu tətbiq edək. Verilmiş bərabərsizliyin sol tərəfindəki ifadəni S_n ilə işarə edək.

1) N=1 üçün bərabərsizlik doğrudur. Doğrudan da $\sqrt{42} < 7$;

2) Fərz edək ki, bərabərsizlik $n = k$ üçün doğrudur. Onda $S_k < 7$;

3) Göstərək ki, bərabərsizlik üçün doğrudur.

Onda $S_{k+1} < \sqrt{42 + S_k} < \sqrt{42+7} = 7$.

Deməli, buradan aydın olur ki, riyazi induksiya prinsipinə əsasən verilmiş bərabərsizlik ixtiyari n ədədi üçün doğrudur.

İkinci hal: Sonuncu kökaltı ifadədə 42 ədədini 49-la əvəz etsək, alınmış bütün kökaltı ifadələrdən sağdan sola doğru kvadrat alınır və həmin kvadrat 7-yə bərabərdir. Şərtdə verilmiş bərabərsizliyin sol tərəfi isə əvəzləmədən sonra alınmış bərabərsizliyin sol tərəfindən kiçikdir.

Beləliklə, verilmiş bərabərsizliyin doğruluğu alınır.

Üçüncü hal: Əksini fərz edək.

$$\underbrace{\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\cdots+\sqrt{42+\sqrt{42}}}}}}_{n \text{ dənə } 42 \text{ ədədi var}} \geq 7$$

Kvadrata yüksəldək:

$$\underbrace{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\cdots+\sqrt{42+\sqrt{42}}}}}_{n-1 \text{ dənə } 42 \text{ ədədi var}} \geq 49$$

Buradan

$$\underbrace{\sqrt{42+\sqrt{42+\cdots+\sqrt{42+\sqrt{42}}}}}_{n-1 \text{ dənə } 42 \text{ ədədi var}} \geq 7$$

Qeyd edək ki, kvadrata yüksəltmədən və aparılan sadələşdirmədən sonra alınan yeni kök üçün prosesi davam etdirsək doğru olmayan ədədi bərabərsizlik alarıq. Deməli, fərziyyəmiz doğru deyil, verilmiş bərabərsizlik doğrudur.

Dördüncü hal: Məlum xassəni tətbiq etsək, yəni müsbət a ədədi və sonsuz sayda kök işarələri üçün $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}} = \dfrac{\sqrt{4a+1}+1}{2}$ bərabərliyi doğrudur.

Doğrudan da, $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}} = x$ işarə edib kvadrata yüksəltsək $a + x = x^2$ tənliyini almış olarıq. Alınmış sonuncu tənliyi həll edib müsbət kökünü təyin edək. Tənliyin kökləri, $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$ və $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{4a+1}}{2}$ olacaq. Buradan alırıq ki, əgər $a > 0$ şərti ödənildikdə tənliyin müsbət kökü ödənilir və bu kök $x = \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$ ədədidir. Bu təklifi verilmiş tənlikdə aşağıdakı kimi istifadə etmək olar:

$$\underbrace{\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\dots+\sqrt{42+\sqrt{42}}}}}}_{n\ dənə\ 42\ ədədi\ var} < \sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\cdots}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{42\cdot 4+1}+1}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Deməli, bərabərsizlik isbat olundu.

Digər bir bərabərsizliyin isbatına baxaq. Əgər $x > 0, y > 0, z > 0$ və $x + y + z = 1$ olarsa, $\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} < 5$ olduğunu isbat edin.

Birinci üsul. $x > 0, y > 0, z > 0$ şərtini nəzərə alsaq:

$$4x+1 > 0; 4y+1 > 0; 4z+1 > 0$$

Alınmış bərabərsizliklərin hər tərəfini kvadrata yüksəltsək, onda:

$$4x+1 < 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$$

$$4y+1 < 4y^2 + 4y + 1 = (2y+1)^2$$

$$4z+1 < 4z^2 + 4z + 1 = (2z+1)^2$$

$\sqrt{4x+1} < 2x+1$ çünki $2x+1 > 0$

$\sqrt{4y+1} < 2y+1$ çünki $2y+1 > 0$

$\sqrt{4z+1} < 2z+1$ çünki $2z+1 > 0$

Bərabərsizliyi toplayaq və $x + y + z = 1$ şərtini nəzərə alaq.

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} < 2(x+y+z) + 3$$

Deməli, $\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} < 5$ doğrudur.

İkinci üsul: $x > 0, y > 0, z > 0$ və $x + y + z = 1$ şərti ilə bərabərsizliyi isbat edək. Məlumdur ki, müsbət a və b ədədləri $a \neq b$ isə $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ bərabərsizliyi doğrudur. Onda:

$$\sqrt{(4x+1)\cdot 1} < \frac{4x+1+1}{2} = 2x+1$$

$$\sqrt{(4y+1)\cdot 1} < \frac{4y+1+1}{2} = 2y+1$$

$$\sqrt{(4z+1)\cdot 1} < \frac{4z+1+1}{2} = 2z+1$$

Bərabərsizliyi toplayaq və $x + y + z = 1$ şərtini nəzərə alaq.

Onda, $\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} < 2(x+y+z) + 3$

Deməli, $\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} < 5$ bərabərsizliyi doğrudur.

Üçüncü üsul: $\sqrt{4x+1}=m; \sqrt{4y+1}=p; \sqrt{4z+1}=k$ işarə edək. Onda, $4x+1=m^2; 4y+1=p^2; 4z+1=k^2$ doğru bərabərlikləri toplasaq və $x+y+z=1$ şərtini nəzərə alsaq: $m^2+p^2+k^2=3+4(x+y+z)=7$

Məlumdur ki, $m^2+p^2+k^2 \geq \frac{1}{3}(m+p+k)^2$

Çevirmə aparmaqla $(m+p+k)^2 \leq 21$ və ya $m+p+k \leq \sqrt{21} < 5$ alırıq.

Beləliklə, $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1} < 5$ doğrudur.

Dördüncü üsul: $x>0, y>0, z>0$ və $x+y+z=1$ şərti ilə $M=\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}$ ifadəsinin maksimum qiymətini axtaraq. Bunun üçün m^2-nı qiymətləndirək.

$$M^2 \leq (4x+1)+(4y+1)+(4z+1)+2\sqrt{(4x+1)\cdot(4y+1)}+2\sqrt{(4x+1)\cdot(4z+1)}+2\sqrt{(4y+1)\cdot(4z+1)}$$

Müsbət a və b ədədləri üçün $2\sqrt{ab} \leq a+b$ məlum bərabərsizliyini nəzərə alaraq:

$$M^2 \leq (4x+1)+(4y+1)+(4z+1)+(4x+1+4y+1)+(4x+1+4z+1)+(4y+1+4z+1)$$

Sağ tərəfi sadələşdirək və $x+y+z=1$ şərtini nəzərə alaq.

Onda, $M^2 \leq 21$ alarıq. Buradan isə, $M \leq \sqrt{21} < 5$

Biz isbat etdik ki, $x>0, y>0, z>0$ və $x+y+z=1$ şərti ilə

$\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1} < 5$ doğrudur.

Beşinci üsul: Vektorların skalyar hasilinin məlum $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ və $\vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ xassəsindən istifadə edək.

$\vec{u}\left(\sqrt{4x+1}, \sqrt{4y+1}, \sqrt{4z+1}\right)$ və $\vec{v}(1,1,1)$ vektorlarını daxil edək.

Onda, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}$ alarıq.

Verilmiş $x+y+z=1$ şərtini nəzərə almaqla:

$|\vec{u}|=\sqrt{4x+1+4y+1+4z+1}=\sqrt{4(x+y+z)+3}=\sqrt{7}$;

$|\vec{v}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

Onda, $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|=\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{21}$

Xassəyə görə $\vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|=\sqrt{21} < 5$

Beləliklə, $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1} < 5$ doğrudur.

Məktəb riyaziyyat təlimində müxtəlif üsullarla bərabərsizliklərin həlli, şagirdlərdə tədqiqatçılıq, müstəqil düşünmə, o cümlədən təfəkkür çevikliyini formalaşdırır.

Məqalənin aktuallığı. Riyaziyyat təlimində bərabərsizlik anlayışının şagirdlərə müxtəlif üsullarla çatdırılması məqalənin aktuallığını təşkil edir.

Məqalənin elmi yeniliyi. Elmi yenilik ondan ibarətdir ki, məqalədə bərabərsizliklərin isbatında forma və metodlardan bəhs etməklə yanaşı, isbatların bərabərsizliklərin həllində rolu haqqında ətraflı məlumat verilir.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Məqalədə araşdırılan məsələlər gənc tədqiqatçılar, riyaziyyat müəllimləri, VII-VIII sinif şagirdlərə öz töhfəsini verəcək.

Ədəbiyyat

1. Cəbrayılov M.S., Əsgərov K.S. Orta məktəb riyaziyyat kursu. I hissə. Bakı, 1994.
2. Xəlilov H.M. , Məmmədov R.H. və b. Riyaziyyat I. Bakı, 1993.
3. Koçetkov Y.S., Koçetkova Y.S. Cəbr və elementar funksiyalar I və II hissə. Bakı, 1971.
4. Məmmədov R.H. və b. Tənliklər və bərabərsizliklər. Bakı, 1991.
5. Сивашинский И.Х. Теоремы и задачи по алгебре и элементарной функции. М., 1971.
6. Соминский И.С. Элементарная алгебра. М., 1962.
7. Ваховский Е.Б., Рывкин А.А. Задачи по элементарной математике. М., 1969.
8. Лидский и др. Задачи по элементарной математике. М., 1970.

М.Т. Рзаев, Н.Х. Мирзазаде

Доказательство некоторых важных неравенств в преподавании математики в школе как средство развития мыслительной деятельности учащихся

Резюме

В статье показаны пути формирования мыслительной деятельности учащихся посредством доказательства важных неравенств различными способами. Рассмотрены доказательства неравенств на примерах и задачи, развивающие исследовательские навыки.

M.T. Rzayev, N.X. Mirzazade

Poof of some important inequalities in school mathematics teaching as a means of improving students' thinking activities

Summary

The article illustrates ways of forming active thinking practices among students by proving significant inequalities through various means. Additionally, the article reviews proofs of inequalities rooted in examples and problems aimed at the development of research skills.

Redaksiyaya daxil olub: 02.12.2021