Riyazi məsələlərin vektorlar metodu ilə həlli

Mətləb Hüseynqulu oğlu Ağayarov
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru,
Sumqayıt Dövlət Universitetinin dosenti
Mehman Nəbi oğlu Sadiqov
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru,
Sumqayıt Dövlət Universitetinin dosenti
Fəxrəddin Feyzullah oğlu Əliyev
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru,
Sumqayıt Dövlət Universitetinin dosenti
E-mail: AMISUM-ALAVA@mail.ru

Rəyçilər: r.ü.f.d., dos. N.S. Bayramova,
r.ü.f.d., dos. M.N. Heydərova

Açar sözlər: vektor, vektorlar metodu, afin məsələlər, metrik məsələlər
Ключевые слова: вектор, векторный метод, аффинные задачи, метрические задачи
Key words: vector, vektorial method, affine tasks, metrical tasks

Vektor anlayışı müasir riyaziyyatın fundamental anlayışlarından biri hesab edilməklə tətbiq sahələri də müxtəlifdir. Belə ki, fizika, nəzəri mexanika, klassik diferensial həndəsə, tenzor analizi və s. sahələrdə vektorun tətbiqi olduqca genişdir. Məhz buna görə də orta məktəb riyaziyyat kursunda vektorlar mövzusunun, eləcə də vektorlar üsulu ilə riyazi məsələlərin həllinin öyrədilməsi xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Onun tətbiq sahələrinin genişliyini nəzərə alaraq, hesab etmək olar ki, vektorların riyazi məsələlərin həllinə tətbiqi aktualdır və zaman keçdikcə aktual olaraq qalacaqdır.

Vektor termini iki mənada xarakterizə edilir:

1) həndəsədə istiqamətlənmiş düz xətt parçası kimi;

2) fizikada vektorial kəmiyyət kimi.

Vektorlar metodu ilə həll olunan riyazi məsələləri iki qrupa ayırmaq olar: afin məsələlər və metrik məsələlər. Afin məsələlərin həllində vektorların skalyar hasili əməlindən istifadə olunmur, metrik məsələlərin həllində isə vektorların skalyar hasili əməlindən istifadə olunur.

Vektorlar metodu ilə həll olunan riyazi məsələlərin həlli üçün metodiki ədəbiyyatlarda əksini tapmış bəzi faydalı məsləhətlərdən aşağıdakı məzmunda istifadə oluna bilər:

— Məsələnin şərti vektor dilinə çevrilməklə ifadə və işarə edilir:

— vektorların daxil edilməsi, koordinat sisteminin və bazis vektorların seçilməsi, daxil edilmiş vektorların bazis vektorlar üzrə ayrılışı;

— vektorların bərabərlikləri sisteminin (yaxud bir bərabərliyin) tərtib edilməsi;

— vektorların bərabərliyinin sadələşdirilməsi;

— vektorların bərabərliyinin cəbri tənliklə və ya tənliklər sistemi ilə əvəz edilməsi və həmin tənliyin və ya tənliklər sisteminin həll edilməsi;

— alınmış tənliyin və ya tənliklər sisteminin həllinin həndəsi mənasının aydınlaşdırılması.

Yuxarıda deyilənləri nəzərə alaraq, riyazi məsələlərin həllinə vektorlar metodunun tətbiqinin öyrənilməsi üçün qarşıya aşağıdakı məqsədlər qoyulur:

— müxtəlif həndəsə məsələlərinin (həm afin, həm də metrik məsələlərin) həllinin səmərəli üsullarını öyrənmək və teoremləri isbat etmək bacarıqlarına yiyələnmək;

— şagirdlərdə ümumiləşdirmə və konkretləşdirmə vərdişlərinin formalaşdırılması;

— şagirdlərdə çeviklik kimi elə təfəkkür keyfiyyəti aşılamaq ki, onlarda məqsədyönlülük, rasionallıq və s. kimi keyfiyyətlər formalaşsın.

Riyazi məsələlərin vektorlar metodu ilə həlli müasir riyaziyyatın tədrisi metodikasında problemli məsələlərindən biri olmuş və problem olmaqda da qalır. Çünki bu mövzu məktəb riyaziyyat kursunun ən çətin mövzularından olub, əsasən həndəsə kursunda öyrədilir və ən çox da burada öz tətbiqini tapır. Həmçinin, bir çox cəbri məsələlər var ki, onları vektorlar metodu ilə də həll etmək daha səmərəlidir.

Təqdim olunan məqalədə müxtəlif şəkilli cəbri məsələnin həllində vektorların tətbiqinə aid nümunələrə baxılır.

Misal 1. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} 3^x + 3^y + 3^z = 9, \\ 9^x + 9^y + 9^z = 27, \\ x^z + z^y + y^x = 9. \end{cases}$$

Həlli. Qeyd edək ki, verilmiş tənliklər sistemini cəbri üsulla həll etmək heç də asan deyil. Lakin, vektorların tətbiqi ilə bu misalı həll etməklə işimizi asanlaşdırarıq.

Tutaq ki, $\vec{a}(3^x; 3^y; 3^z)$ və $\vec{b}(1;1;1)$. Onda iki vektorun skalyar hasilinin koordinatlarla ifadəsi düsturuna görə $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3^x\cdot 1 + 3^y \cdot 1 + 3^z \cdot 1 = 9$, onların mütləq qiymətləri olar.

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(3^x)^2 + (3^y)^2 + (3^z)^2} = \sqrt{9^x + 9^y + 9^z} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3},$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

Həmçinin, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right| = 9$ olduğundan, buradan alırıq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının əmələ gətirdiyi bucaq -a bərabərdir, yəni $\varphi = 0$. Bu isə o deməkdir ki, bu vektorlar kollineardır. Kollinearlıq şərtinə görə

$$\frac{3^x}{1} = \frac{3^y}{1} = \frac{3^z}{1}$$

olduğundan, buradan $3^x = 3^y = 3^z$, yəni $x = y = z$ olar. Bunları verilmiş sistemin birinci tənliyində nəzərə alsaq,

$3^x + 3^x + 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^{x+1} = 9 \Leftrightarrow 3^{x+1} = 3^2 \Leftrightarrow x+1 = 2 \Leftrightarrow x = 1, \quad y = z = 1$ olar.

Beləliklə, $(1;1;1)$ üçlüyü verilmiş tənliklər sisteminin ikinci və üçüncü tənliyini də ödədiyindən, bu sistemin həlli $(1;1;1)$ olar.

Misal 2. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ olarsa, $5x + 3y - z$ ifadəsinin ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

Həlli. $\vec{a} = (x;y;z)$ və $\vec{b} = (5;3;-1)$ işarə edək. $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 \le \left|\vec{a}\right|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2$ doğru bərabərsizliyinə əsasən $(5x+3y-z)^2 \le (x^2+y^2+z^2)\cdot(25+9+1)$ alarıq. Buradan isə

$(5x+3y-z)^2 \le 4\cdot 35, \qquad |5x+3y-z| \le 2\sqrt{35}$

və ya

$-2\sqrt{35} \le 5x + 3y - z \le 2\sqrt{35}$ olar.

Deməli, $5x+3y-z$ ifadəsinin ən böyük qiyməti $2\sqrt{35}$, ən kiçik qiyməti isə $-2\sqrt{35}$-dir.

Misal 3. İrrasional tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} x\sqrt{y^2-1}+y\sqrt{x^2-1}=3\sqrt{x^2+y^2-2}, \\ x^2+y^2=9. \end{cases}$$

Həlli. Əvvəlcə $\vec{u}(x;y)$ və $\vec{v}\left(\sqrt{x^2-1};\sqrt{y^2-1}\right)$ işarə edək. Onda $|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{9}=3$ olar ki, bu halda tənliklər sisteminin birinci tənliyi

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \qquad (1)$$

şəklinə düşür.

(1) bərabərliyi onu göstərir ki, $\vec{u}$ və $\vec{v}$ vektorları kollineardırlar. Onda

$$x\sqrt{x^2-1}=y\sqrt{y^2-1}. \qquad (2)$$

Aşkardır ki, $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$ funksiyası $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ çoxluğunda artandır və deməli, (2) –nin həlli yeganədir. Ona görə də (2)-dən alınır ki, $x=y$. Bütün bunlardan, $x=y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ alarıq. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}};\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ cütü verilmiş tənliklər sisteminin həllidir.

Misal 4. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} y^2z^2+4x^2z^2+9x^2y^2=25x^2y^2z^2, \\ x^2+4y^2+25z^2=16, \\ 13\sqrt{5}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y+2\sqrt{3}z=24. \end{cases} \qquad (3)$$

Həlli. Asanlıqla göstərmək olar ki, burada $x\neq 0,\neq 0,z\neq 0$. Onda sistemin birinci tənliyinin hər iki tərəfini $x^2y^2z^2\neq 0$ -a bölsək, ona eynigüclü olan

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=25, & (4) \\ x^2+4y^2+25z^2=16, & (5) \\ 13\sqrt{5}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y+2\sqrt{3}z=24 & (6) \end{cases}$$

tənliklər sistemini alarıq. (3) sistemini həll etmək üçün $\vec{u}\left(\frac{1}{x};\frac{2}{y};\frac{3}{z}\right)$ və $\vec{v}(x;2y;5z)$ işarə edək. Onda

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{x}\cdot x+\frac{2}{y}\cdot 2y+\frac{3}{z}\cdot 5z=1+4+15=20$$

alarıq. (4) və (5)-ə əsasən, $|\vec{u}|=5, |\vec{v}|=4$ olar. Deməli, $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$. Sonuncu bərabərlik göstərir ki, $\vec{u}$ və $|\vec{v}|$ vektorlrı kollineardır. Kollinearlıq şərtinə görə $\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{3}{5z^2}$ olduğundan, buradan $y^2=x^2$ və $z^2=\frac{3}{5}x^2$ alarıq. y və z -in x -lə ifadə edilmiş bu qiymətlərini (5) tənliyində nəzərə alsaq,

$$x^2 + 4x^2 + 25\cdot\frac{3}{5}x^2 = 16$$ və ya $20x^2 = 16$

olar. Buradan $x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}, y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}, z = \pm\frac{2\sqrt{3}}{5}$ alarıq.

Beləliklə, $x \neq 0, \neq 0, z \neq 0$ olduğundan, (4) və (5) tənliklərinin həlli aşağıdakı şəkildə olan səkkiz üçlükdən ibarətdir:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{2\sqrt{3}}{5}\right);\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{2\sqrt{3}}{5}\right);\left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{2\sqrt{3}}{5}\right);\left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right);$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{2\sqrt{3}}{5}\right);\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{2\sqrt{3}}{5}\right);\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{2\sqrt{3}}{5}\right);\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{2\sqrt{3}}{5}\right).$$

Bu üçlüklərin (3) tənliklər sisteminin həlli olması üçün onlar (6) tənliyini də ödəməlidir. Lakin, yoxlama göstərir ki, bunlardan yalnız $\left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$ üçlüyü (6) tənliyini ödəyir. Deməli, (3) sisteminin həlli $\left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$ üçlüyüdür.

Misal 5. Funksiyanın ən kiçik qiymətini tapın:

$$f(x) = x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2 - 38x + 74} + \sqrt{2x^2 + 6x + 9} + \sqrt{2x^2 - 30x + 117}.$$

Həlli. $\vec{a}(x, 2x)$; $\vec{b}(5 - x, 7 - 2x)$; $\vec{c}(x + 3{,}3)$; $\vec{d}(6 - x, 9 - x)$ vektorlarına baxaq. Onda

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + 4x^2} = x\sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{(5 - x)^2 + (7 - 2x)^2} = \sqrt{5x^2 - 38x + 74},$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(x + 3)^2 + x^2} = \sqrt{2x^2 + 6x + 9},$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{(6 - x)^2 + (9 - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 30x + 117}.$$

Deməli, $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| \geq |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}|$ olduğundan,

$$\min f(x) = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}|.$$

$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ işarə edib $\vec{p}$ vektorunun uzunluğunu tapaq.

$\vec{p}(x + 5 - x + x + 3 + 6 - x; 2x + 7 - 2x + x + 9 - x) = \vec{p}(14; 16)$ olduğundan

$|\vec{p}| = \sqrt{14^2 + 16^2} = \sqrt{452} = 2\sqrt{113}$, deməli $\min f(x) = 2\sqrt{113}$.

İndi isə vektorlar metodunun köməyi ilə həlli nisbətən mürəkkəb olan bir tənliyi həll edək.

Misal 6. Tənliyi həll edin:

$$x\sqrt{2(5 - 8x^2)} + 240\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{26(x^2 + 225)}. \quad (1)$$

Həlli. Məlumdur ki,

$$a_1a_2 + b_1b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \quad (2)$$

bərabərsizliyi $n = 2$ üçün Koşi-Bünyakovski bərabərsizliyinin xüsusi halıdır. Həmçinin, aydındır ki, əgər $\vec{a}(a_1;b_1)$ və $\vec{b}(a_2;b_2)$ vektorları kollineardırsa, onda

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ bərabərliyi ödənilir.

İndi isə verilmiş tənliyi aşağıdakı kimi çevirək:

$$x\sqrt{10-16x^2} + 240\sqrt{1+x^2} = \sqrt{26(x^2+225)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{4}\sqrt{10-16x^2} + 60\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{4}\sqrt{26(x^2+225)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{\frac{5}{8}-x^2} + 60\sqrt{1+x^2} = \sqrt{\frac{13}{8}(x^2+225)}.$$

Sonuncu tənliyin sol tərəfinə (2) düsturunu tətbiq edək:

$$x\sqrt{\frac{5}{8}-x^2} + 15\cdot\sqrt{1+x^2} \le \sqrt{x^2+225}\cdot\sqrt{\left(\frac{5}{8}-x^2\right)+(1+x^2)} =$$

$$= \sqrt{x^2+225}\cdot\sqrt{\frac{5}{8}+1} = \sqrt{\frac{13}{8}\left(x^2+225\right)}$$

Buradan çıxır ki, $(x:15)$ və $\left(\sqrt{\frac{5}{8}-x^2};4\sqrt{1+x^2}\right)$ vektorları kollinieardır, onda

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{5}{8}-x^2}} = \frac{15}{4\sqrt{1+x^2}}$$ bərabərliyi doğrudur, burada $\frac{5}{8}-x^2 \rangle 0, x\rangle 0$.

Onda $\frac{x^2}{\frac{5}{8}-x^2} = \frac{225}{16(1+x^2)}$ və ya $16x^2(1+x^2) = 225\left(\frac{5}{8}-x^2\right)$.

$x^2 = t \geq 0$ əvəzləməsini etməklə sonuncu tənliyi

$$128t^2 + 1928t - 1125 = 0$$

şəklinə gətirmək olar. Bu tənlikdən $t_1 = \frac{9}{16}, t_2 = -\frac{125}{8}$ və $x^2 = \frac{9}{16}$, $x^2 = -\frac{125}{8}$

alarıq. $x > 0$ olduğunu da burada nəzərə alsaq, birinci tənliyin kökü $x = \frac{3}{4}$, $x^2 > 0$ olduğundn ikinci tənliyin kökü yoxdur. Beləliklə, verilmiş tənliyin kökü $x = \frac{3}{4}$-dür.

Məqalənin aktuallığı. Vektor haqqında anlayışların müxtəlif elmlərin, o cümlədən fizika və riyaziyyatın cəbr sahəsinə tətbiqinin genişləndirilməsi məqalənin aktuallığını təşkil edir.

Məqalənin elmi yeniliyi. Elmi yenilik kəmiyyətlərin və onlarla bağlı məsələlərdə Vektorların tətbiqinin daha da dərinləşdirilməsi, bir çox müxtəlif tip çətinlik dərəcəsi yüksək olan misalların orta məktəb proqramına uyğun, ancaq qismən çətin metod və priyomların tətbiqi ilə həll edilməsi ilə bağlıdır.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Məqalədə göstərilən misalların vektorlarn tədbiq edilməsiylə müxtəlif rasional üsullarla həlli metodikası şagirdlərə, həmçinin tədqiqatçılara vektorlarn həm cəbri, həm də fiziki məsələlərin həllində, eləcə də uyğun isbatında yardımçı ola bilər.

Ədəbiyyat

1. Беккер Б.М., Некрасов В.Б. Применение векторов для решения задач. Санкт-Петербург, 1997.
2. Алгоритмический подход к решению геометрических задач. Москва, 1996.
3. Кушнир А.И. Векторные методы решение задач. Киев, 1994.
4. Vəliyev M.M. Məktəb həndəsə kursunda vektorlar metodu ilə məsələ həlli üsulları. Bakı, 2001.

М.Г. Агаяров, М.Н. Садигов, Ф.Ф. Алиев

Решение математических задач векторным методом

Резюме

В статье показана методология решения некоторых математических задач методом векторов, способы применения концепции вектора к другим наукам, в том числе к измерению величин в физике, и во многих сложных физических задачах к вычислениям.

M.H. Agayarov, M.N. Sadiqov, F.F. Aliyev

Solving mathematical problems by the vector method

Summary

The article shows the methodology of solving some mathematical problems by the method of vectors. Ways to apply the concept of vector to other sciences, including the measurement of quantities in physics, and in many complex physical problems, to calculations.

Redaksiyaya daxil olub: 17.03.2021