Sferanın digər fiqurlar ilə kombinasiyası və onlara aid məsələlər

Nazxanım Rəhman qızı Sabirli
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
E-mail: nazxanim_sabirli@gmail.com

Rəyçilər: p.ü.f.d., dos. N.B. Nəsirov,
p.ü.f.d., dos. T.M. Əliyeva

Açar sözlər: çoxüzlü, sfera, çevrə, prizma, düzbucaqlı paralelepiped
Ключевые слова: многомерная, сферы, круг, призма, прямоугольный параллелепипед
Key words: multifaceted, sphere, circle, prism, rectangular parallelepiped

Fəza fiqurlarının kombinasiyasına aid həndəsi məsələləri həll etməzdən əvvəl bu məsələlərin həlli zamanı nəzəriyyənin müvafiq bölmələri xüsusi ilə daha çox təkrarlanır. Sferanın başqa cisimlərlə kombinasiyası məsələlərinə gəldikdə isə bu qaydadan kənara çıxılır və hər bir məsələ üçün müxtəlif təkliflərin isbatı ayrıca verilir.

Sferanın başqa cisimlərlə kombinasiyası məsələsinə keçməzdən əvvəl nöqtələrin bəzi həndəsi yeri mövzusunu təkrar etmək faydalıdır.

1. Verilmiş iki nöqtədən bərabər uzaqlıqda olan nöqtələrin həndəsi yeri, ucları verilmiş nöqtələr olan və onun ortasından keçən müstəvidir.

2. Bir-birinə paralel iki müstəvidən bərabər uzaqlıqda olan nöqtələrin həndəsi yeri, verilmiş müstəvilərə paralel olan və onlar arasındakı məsafənin ortasindan keçən müstəvidir.

3. İkiüzlü bucağın üzlərindən bərabər uzaqlıqda olan nöqtələrin həndəsi yeri, bu ikiüzlü bucağı yarıya bölən müstəvidir. Belə müstəvi tənbölən müstəvi adlanır.

4. Çevrənin bütün nöqtələrindən bərabər uzaqlıqda olan nöqtələrin həndəsi yeri, bu çevrə müstəvisinə perpendikulyar olan və onun mərkəzindən keçən düz xətdir.

Buradan aşağıdakı nəticələrə gələ bilərik:

Nəticə: Çevrə daxilinə çəkilmiş çoxbucaqlının bütün təpələrindən bərabər uzaqlıqda olan nöqtələrin həndəsi yeri bu çoxbucaqlı müstəvisinə perpendikulyar olan və çevrənin mərkəzindən keçən düz xətdir.

1. Əgər sfera çoxüzlünün bütün üzlərinə toxunarsa, onda sfera çoxüzlünün daxilinə çəkilmiş, çoxüzlü isə sfera xaricinə çəkilmiş adlanır.

2. Əgər sfera çoxüzlünün bütün təpələrindən keçərsə, onda sfera çoxüzlünün xaricinə çəkilmiş, çoxüzlü isə sfera daxilinə çəkilmiş adlanır.

3. Əgər sfera silindrin, kəsik konusun (konusun) oturacaqlarına (oturacağına) və bütün doğuranlara toxunarsa, onda sfera silindrin, kəsik konusun (konusun) daxilinə çəkilmiş, silindr, kəsik konus (konus) isə sferanın xaricinə çəkilmiş adlanır.

Təriflərdən aşkardır ki, bu cisimlərdən birinin ox kəsiyinin daxilnə böyük dairə çevrəsi çəkmək olar

4. Əgər oturacaqların çevrələri sferaya aid olarsa, onda sfera silindr, kəsik konus xaricinə çəkilmiş adlanır. Əgər oturacağı və təpə nöqtəsi sferaya aid olarsa, onda sfera konus xaricinə çəkilmiş adlanır.

Tərifdən aşkardır ki, bu cisimlərin hər birinin ox kəsiyinin xaricinə böyük dairə çevrəsi çəkmək olar.

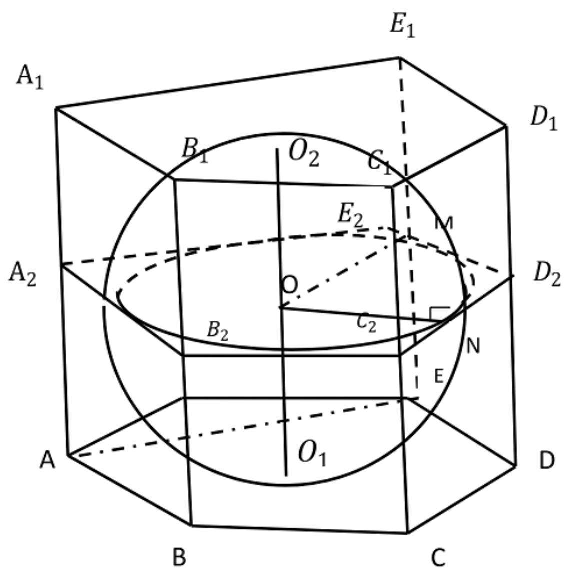
Sferanın mərkəzi haqqında ümumi qeydlər edək:

1. Çoxüzlü daxilinə çəkilmiş sferanın mərkəzi, çoxüzlünün bütün ikiüzlü bucaqlarının tənböləni müstəvilərinin kəsişmə nöqtəsində yerləşir. Bu nöqtə həmişə çoxüzlünün daxilindədir.

2. Çoxüzlü xaricinə çəkilmiş sferanın mərkəzi, çoxüzlünün bütün tillərinə perpendikulyar olan və onların ortasından keçən müstəvilərin kəsişmə nöqtəsində yerləşir. O, çoxüzlünün daxilində, səthi üzərində və çoxüzlünün xaricində yerləşə bilər.

Düz prizma daxilə çəkilmiş sferaya aid məsələyə baxaq:

Məsələ. İsbat edin ki, düz prizmanın daxilinə yalnız va yalnız o vaxt sfera çəkmək olar ki, onun oturacağı daxilinə çevrə çəkmək mümkündür və prizmanın hündürlüyü bu çevrənin diametrinə bərabərdir.



Şəkil 1.

Zəruriliyin isbatı: Tutaq ki, hər hansı düz prizmanın daxilinə sfera çəkilmişdir (şəkil 1). İsbat edək ki, bu prizmanın oturacağı daxilinə çevrə çəkmək olar və prizmanın hündürlüyü bu çevrənin diametrinə bərabərdir. Sferanın O mərkəzində onun CC_1DD və DD_1E_1E üzləri ilə toxunma nöqtəsinə OM və ON radiuslarını çəkək. Onda bu radiuslar yan üzlərə perpendikulyar olar. OM va ON radiuslarından $A_2B_2C_2D_2E_2$ müstəvisini keçirək. Bu müstəvi göstərilən üzlərə və onların DD_1 kəsişmə xəttinə perpendikulyar olacaqdır (müstəvilərin perpendikulyarlıq əlaməti). Deməli, DD_1-ə paralel olan qalan yan tillərə də perpendikulyardır. Buna görə də bu müstəvi bütün yan üzlərə perpendikulyardır.

Əgər O nöqtəsindən qalan yan üzlərə perpendikulyar endirsək, onların hamısı $A_2B_2C_2D_2E_2$ müstəvisi üzərində olacaqdır (iki müstəvinin perpendikulyarlıq əlaməti). Beləliklə, O nöqtəsi perpendikulyar kəsiyin bütün tərəflərindən bərabər uzaqlıqdadır, yəni perpendikulyar kəsiyin daxilinə çəkilmiş mərkəzidir. Bu kəsik oturacağa bərabərdir. Ona görə də oturacağın daxilinə radiusu sferanın radiusuna bərabər olan çevrə çəkmək olar.

OO_1 və OO_2 radiusları (burada O_1 və O_2 nöqtələri sferanın oturacaqları ilə toxunma nöqtələridir), oturacaqlara perpendikulyar olan O_1O_2 parçasını əmələ gətirir. Buna görə də prizmanın hündürlüyü sferanın diametrinə və ya çevrənin diametrinə bərabərdir.

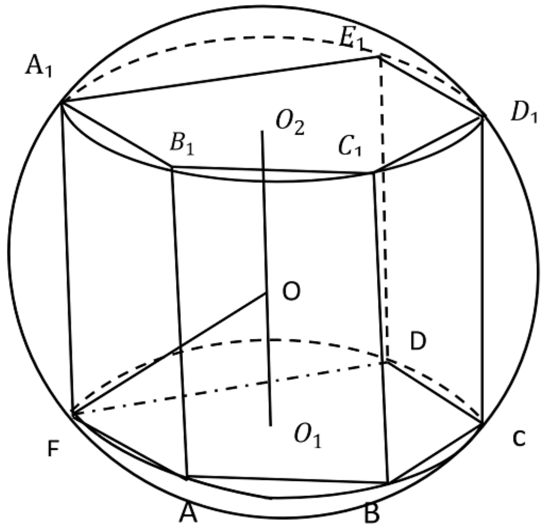
Kafiliyin isbatı: Tutaq ki, düz prizmanın oturacağı daxilinə çevrə çəkmək mümkündür və prizmanın hündürlüyü bu çevrənin diametrinə bərabərdir. İsbat edək ki, prizma daxilinə sfera çəkmək olar. Başqa sözlə, prizmanın bütün üzlərindən bərabər uzaqlıqda olan nöqtə vardır.

Prizmanın oturacaqları daxilinə çəkilmiş çevrələrin O_1 və O_2 mərkəzlərindən bu oturacaqlara perpendikulyar olan O_1O_2 düz xəttini çəkək. O_1O_2 düz xətti bütün yan tillərə paralel olduğundan (eyni müstəviyə perpendikulyar olan iki düz xətt haqqındakı teorem), onda o hər bir yan üzə də paraleldir (düz xətt və müstəvinin paralellik əlaməti). K toxunma nöqtəsindən keçən O_1K radiusu CD va C_1C-yə perpendikulyar olduğundan C_1CD_1D üzünə də pendikulyardır (düz xətt və müstəvinin perpendikulyarlıq əlaməti). Beləliklə, O_1O_2 düz xətti hər bir yan üzdən prizmanın oturacağı daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu qədər məsafədədir. Buna görə də, əgər prizmanın bütün üzlərindən bərabər uzaqlıqda ola nöqtə mövcuddursa, onda, bu nöqtə O_1O_2 parçasına aid olmalıdır.

Şərtə görə prizmanın O_1O_2 hündürlüyü prizmanın oturacağı daxilinə çəkilmiş çevrənin diametrinə bərabərdir. Buna görə də prizmanın bütün üzlərindən bərabər uzaqlıqda olan O_1O_2 parçasının orta nöqtəsidir. Başqa sözlə, prizmanın daxilinə çəkilmiş sferanın mərkəzidir. Bu nöqtə yeganədir.

Nəticə 1. Düz prizmanın daxilinə çəkilmiş sferanın mərkəzi onun oturacağı daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzindən keçən hündürlüyünün ortasında yerləşir.

Nəticə 2. H = 2r şərti ödənildikdə (H – prizmanın hündürlüyü, r- oturacağın daxilinə çəkilmiş çevrə radiusu) üçbucaqlı, düzgün dördbucaqlı (oturacağın qarşı tərəfləri cəmi bir-birinə bərabər olduqda) prizmanın daxilinə sfera çəkmək olar.



Prizmanın xaricinə çəkilmiş sferaya aid məsələyə baxaq:

Məsələ. İsbat edin ki, prizma xaricinə yalnız və yalnız o vaxt sfera çəkmək olar ki, prizma düz prizmadır və onun oturacağı xaricinə çevrə çəkmək mümkündür.

Zəruriliyin isbatı: Tutaq ki, sfera prizmanın xaricinə çəkilmişdir (şəkil 2). İsbat edək ki, prizma düz prizmadır və onun oturacağı xaricinə çevrə çəkmək mümkündür.

Prizmanın oturacaq müstəvisi (sferanın müstəvi ilə kəsişməsi haqqında teoremə əsasən) sferanı oturacağın bütün təpələrinin yerləşdiyi çevrə üzrə kəsər. Deməli, prizmanın oturacağı xaricinə çevrə çəkmək mümkündür. Prizmanın istənilən yan üz müstəvisi də sferanı çevrə üzrə kəsəcəkdir. Paraleloqramdan yalnız düzbucaqlını çevrə daxilinə çəkmək mümkün olduğundan, deməli prizmanın bütün yan üzləri düzbucaqlıdır. Onda, yan till, məsələn, BB_1 tili AB və BC–yə perpendikulyardır. Buna görə də (düz xətt və müstəvinin perpendikulyarlıq əlamətinə görə) BB_1, oturacaq müstəvisinə perpendikulyardır. Deməli, prizma düzdür.

Kafiliyin isbatı: Tutaq ki, düz prizmanın oturacağı xaricinə çevrə çəkmək mümkündür. İsbat edək ki, belə prizmanın xaricinə sfera çəkmək olar. Başqa sözlə, prizmanın bütün təpələrindən bərabər uzaqlıqda olan nöqtə var. Prizmanın oturacaqları bərabər olduğundan onların xaricinə çəkilmiş çevrələr də bərabərdir. Yuxarı oturacaq xaricinə çəkilmiş çevrənin O_2 mərkəzindən alt oturacağa O_2O_1 perpendikulyarı çəkirik. $O_2A_1AO_1$, $O_2B_1BO_1$, O_2C_1CO və b. düzbucaqlıdır. Buna görə də, $O_2A_1 = O_2B_1 = O_2C_1 = ...$ bərabərliyindən $O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1 = ...$ bərabərliyi alınır. Deməli, O_1 nöqtəsi alt oturacaq xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir. Buna görə də, O_2O_1 düz xətti oturacaqların xaricinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzindən keçib, oturacaq müstəvisinə perpendikulyardır. O_1O_2 düz xəttinin bütün nöqtələri hər bir oturacağın təpələrindən bərabər uzaqlıqdadır. Digər tərəfdən müstəvinin prizmanın yan tilinin ortasından keçən bütün nöqtələri, yan tilin bir cüt təpəsindən bərabər uzaqlıqdadır, məsələn AA_1.

Bu həndəsi yerlərin kəsişməsi prizmanın bütün təpələrindən bərabər uzaqlıqda olan, yəni prizma xaricinə sferanın mərkəzi olan O nöqtəsini verir.

Nəticə 1. Düz prizma xaricinə çəkilmiş sferanın mərkəzi oturacaqların xaricinə çəkilmiş dairələrin mərkəzindən keçən prizma hündürlüyünün ortasında yerləşir.

Nəticə 2. Düz üçbucaqlı prizmanın, düzgün prizmanın, düzbucaqlı paralelepipedin, oturacağının qarşı bucaqları cəmi 180^0-yə bərabər olan düz dördbucaqlı prizmanın xaricinə sfera çəkmək olar.

Məqalənin aktuallığı. Ümumtəhsil məktəblərində şagirdlər həndəsə məzmun xətti üzrə materialları cəbri materiallara nisbətən çətin mənimsəyirlər. Xüsusi ilə fəza fiqurları və onların kombinasiyalarına aid məsələ həllində şagirdlər bir çox çətinliklərlə qarşılaşırlar. Bu kimi çətinliklərin aradan qaldırılmasına müəyyən köməklik göstərmək məqsədi ilə mövzunun metodik işlənməsi aktuallıq kəsb edir.

Məqalənin elmi yeniliyi. Elmi yenilik ondan ibarətdir ki, məqalədə sfera və onun digər fiqurlarla qarşılıqlı vəziyyətinə aid bir neçə məsələ həllinə baxılmış və bu nümunələr əsasında müəllif əhəmiyyət kəsb edən metodiki mülahizələr irəli sürülmüşdür.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Məqalədən orta ixtisas və orta ümumtəhsil məktəblərinin müəllimləri, tələbə və magistrantlar istifadə edə bilərlər.

Ədəbiyyat

1. Ümumtəhsil məktəbləri üçün riyaziyyat proqramları (kurikulum). Bakı, 2019.
2. N.Qəhrəmanova və başqaları. Riyaziyyat: 11-ci sinif üçün dərslik. Bakı, 2020.
3. Ə. Quliyev. Çoxüzlülərin səthinin və həcminin hesablanması. Bakı, 2002.

Н.Р. Сабирли

Сочетание сферы с другими фигурами и их проблемы

Резюме

В средних школах учащиеся испытывают трудности с усвоением материалов геометрического содержания по сравнению с материалами по алгебре. Студенты сталкиваются с множеством трудностей, особенно при решении задач, связанных с пространственными фигурами и их сочетаниями. Методологическая разработка темы имеет большое значение для оказания некоторой помощи в преодолении таких трудностей.

В статье рассматривается решение ряда вопросов, связанных со сферой и ее взаимодействием с другими фигурами, и на основе этих примеров автор выдвигает методологические соображения. При этом объясняется сочетание геометрии с другими фигурами и методика решения их задач и приводятся примеры интересных доказательств.

N.R. Sabirl

The combination of the sphere with other figures and their problems

Summary

In secondary schools, students have difficulty mastering geometric content materials compared to algebraic materials. Students face many difficulties, especially in solving problems related to spatial figures and their combinations. The methodological development of the topic is of great importance in order to provide some assistance in overcoming such difficulties.

The article considers the solution of several issues related to the sphere and its interaction with other figures, and on the basis of these examples, the author puts forward methodological considerations. At the same time, the combination of geometry with other figures and the methodology of solving their problems are explained and examples of interesting proofs are given.

Redaksiyaya daxil olub: 14.04.2021