Orta məktəbdə riyaziyyat kursunda triqonometrik bərabərsizliklərin həlli metodikası

Səməd Məmməd oğlu Çərkəzov
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin
Quba filialının müəllimi
E-mail: semedcerkesov9@gmail.com

Rəyçilər: f.-r.ü.f.d., dos. A.Q. Cəfərov,
p.ü.f.d., dos. N.B. Nəsirov

Açar sözlər: bərabərsizlik, monoton artan və azalan, vahid çevrə, funksiya, dövr, aralıq, triqonometriya, qrafik, qövs

Ключевые слова: уравнение, монотонное увеличение и уменьшение, единый круг, функция, период, середина, тригонометрия, графика, дуга

Key words: inequality, monotonous ascending and descending, single circle, function, period, interval, trigonometry, graph, arc

Kurikulum islahatı nəticəsində məktəb riyaziyyat kursunun məzmunu əsaslı şəkildə dəyişmiş, aktual olmayan mövzular proqramdan çıxarılmış və daxil edilən yeni mövzular məzmun xətlərinə ayrılmışdır. Riyaziyyatda beş məzmun xəttindən biri "Cəbr və funksiyalar" adlanır. Bu məzmun xəttinə daxil olan standartlardan biri də "Triqonometrik bərabərsizliklərin həlli"-dir. Bu mövzunun tədrisi müxtəlif dərsliklərdə şərhi müxtəlifdir, vahid yanaşma yoxdur.

Təcrübə göstərir ki, şagirdlər triqaonametrik tənliklərə nisbətən triqonometrik bərabərsizliklərin həllində daha çox çətinlik çəkirlər. Xüsusən də son nəticədə alınmış əsas bərabərsizliklərin ümumi həllini tapmaqda səhvlərə yol verilir. Bəzi hallarda səhvlər triqonometrik funksiyaların və onların daxil olduğu bərabərsizliklərin əsas xassələrini yaxşı başa düşmədiyi üçün yaranır.

Aşağıda triqonametrik bərabərsizliklərin son mərhələsinə uyğun çəkilmiş: 1) vahid çevrədən və 2) uyğun funksiyanın qrafikindən əyani olaraq istifadə etməklə verilmiş triqonametrik bərabərsizliyin həllinin düzgün seçilməsi üsulları sadalanacaqdır.

Təlimin əsas prinsiplərindən biri olan əyanilik prinsipinə görə, verilmiş bərabərsizliyə aid çertyojuvahid çevrəni (və ya uyğun triqonometrik funksiyanın qrafikini) şagirdlərə hazır verilə bilər və ya onların özlərinə uyğun çertyojun hazırlanmasını təklif etmək olar. Hazır çertyojları ilk mərhələlərdə, vaxta qənaət etmək məqsədi ilə misalın yazılı həllində tətbiq etmək tövsiyə olunur. Çertyojda (vahid çevrədə və ya funksiyanın qrafikində) həm şərtin, həm də son nəticədə alınan funksiyanın xassələri təsvir olunmalıdır. Çertyojdan istifadə edən zaman şagirdlərə çox diqqətli olmaları tövsiyə olunmalıdır.

Qrafik mümükün qədər bərabərsizlikdə iştirak edən triqonometrik funksiyanın xassələrini əyani əks etdirməlidir. Şagirdlərə belə bir fikir aşılanmalıdır ki, qrafik hələ məsələnin həlli demək deyildir. Onda yalnız ümumi bir hal göstərilmişdir. Qrafik yalnız əyani vəsaitdir. Hər bir triqonametrik bərabərsizliyin son ifadəsinə uyğun çertyoju qurmaq tapşırılmalıdır.

Metodik baxımdan triqonametrik bərabərsizliklərin ümumi həlli qaydaları üzərində dayanacağıq.

Sadə triqonametrik bərabərsizlikləri həll etmək üçün $\sin x$ və $\cos x$ funksiyalarının ən kiçik müsbət dövrünün $T = 2\pi$, tgx və $ctgx$ funksiyalarının isə müsbət dövrünün $T = \pi$ olduğunu, bilmələrinin zəruri olduğunu şagirdlərin diqqətinə çatdırmaq lazımdır.

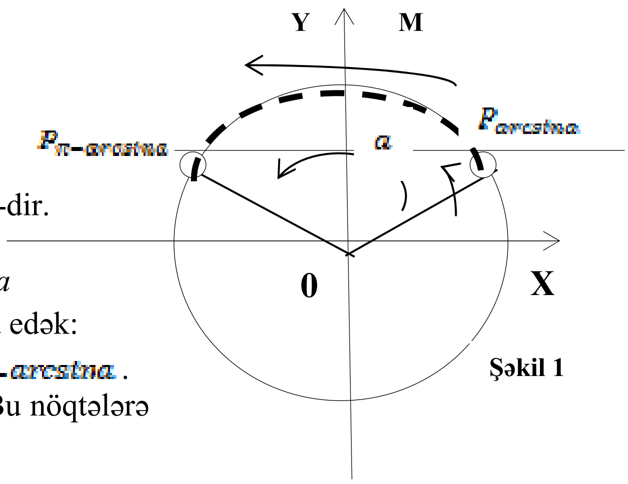
Beləliklə, yalnız $\sin x$ və $\cos x$ daxil olan bərabərsizlikləri uzunluğu 2π olan hər hansı aralıqda həll etmək kifayətdir. Bütün həllər çoxluğunu almaq üçün həmin aralığın uclarının üzərində $2\pi\kappa, \kappa \in Z$ dövrlərini əlavə etmək lazımdır. Yalnız tgx və ya $ctgx$ daxil olan bərabərsizlikləri uzunluğu π olan hər hansı aralıqda həll etməkdən sonra, bu aralığın uclarının üzərinə $\pi k, k \in Z$ dövrlərini əlavə etməklə bütün həllər çoxluğunu almaq olar.

Uzun illərin təcrübəsi göstərir ki, təlimin əyanilik prinsipinə əsaslanaraq $\sin x > a\ (\sin x < a)$, $\cos x > a\ (\cos x < a)$, $tgx > a\ (tgx < a)$ və $ctgx > a\ (ctgx < a)$ bərabərsizliklərini həm vahid çevrənin köməyi ilə, həm də uyğun triqonometrik funksiyanın qrafikindən istifadə etməklə həll etmək məqsədə uyğundur. Bu üsullardan hansının səmərəli olduğunu seçmək şagirdlərin ixtiyarına vermək olar.

Sadə triqonametrik bərabərsizliklərin həlli qaydalarını göstərək.

I. $\sin x > a$, ($\sin x \geq a$) triqonametrik bərabərsizliyinin həlli qaydasını izah edək.

Bilirik ki, $-1 \leq \sin x \leq 1$ olduğundan, $a > 1$ olarsa, bərabərsizliyin həlli yoxdur.



Şəkil 1

Yəni, $x \in \emptyset$.

$a \leq -1$ olarsa, bu bərabərsizliyin həlli bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur. Yəni: $x \in R$-dir.

1-ci hal: $0 < a < 1$ olduqda $\sin x > a$ bərabərsizliyini həll edək. Vahid çevrədə $y = a$ düz xətti ilə çevrənin kəsişmə nöqtələrini qeyd edək: A və B. Bu nöqtələr belədir: $P_{arcsina}$ və $P_{\pi-arcsina}$. A və B nöqtələrinin ordinatı a-ya bərabərdir. Bu nöqtələrə uyğun bucaqlar isə $\arcsin a$ və $\pi - \arcsin a$–dır. 1-ci şəkildən göründüyü kimi, verilən bərabərsizliyin həlli sinusu a-dan böyük olan $\overset{\frown}{AMB}$ qövsünün üzərindəki nöqtələrə uyğun bucaqlardır. Deməli, $0 < a < 1$ olduqda $\arcsin a < x < \pi - \arcsin a$ olur.

Bu şərti ödəyən x-lər verilən bərabərsizliyi $(0, \pi)$ aralığındakı həllidir. Sinusun əsas müsbət dövrünün $T = 2\pi$ olduğunu nəzərən alsaq və bu həllə $2\pi\kappa,\ \kappa \in Z$ ədədini əlavə etsək,ümumi həll:

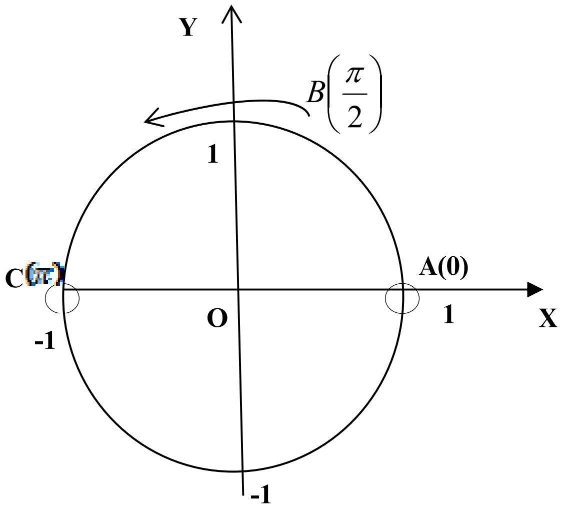
$$\arcsin a + 2\pi k < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k, \qquad k \in Z \qquad (1)$$

şəklində olar. Onu da: $x \in (\arcsin a + 2\pi k;\ \pi - \arcsin a + 2\pi k), \qquad k \in Z$ kimi aralıq şəklində yazmaq olar.

I. Vahid çevrədən istifadə etməklə $\sin x > 0$ bərabərsizliyini həll etmək, vahid çevrədə ordinatları müsbət olan nöqtələr çoxluğunu tapmaq deməkdir. 4-cü şəkildən göründüyü kimi belə nöqtələr vahid çevrənin I və II rüblərində $\overset{\frown}{ABC}$ qövsünün, A və B nöqtələri arasında olmaqla, bütün nöqtələridir (yəni bucaqlarıdır). Başqa sözlə $0 < x < \pi$ şərtini ödəyən X-lərə uyğun olan bütün nöqtələrdir (bucaqlardır). Əgər $y = \sin x$ funksiyasının $T = 2\pi$ dövrlü funksiya

olduğunu nəzərə alsaq: $2\pi\kappa < x < \pi + 2\pi\kappa, \quad \kappa \in Z$
şərtini ödəyən bütün X-lərin $\sin x > 0$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğunun olduğuna əmin ola bilərik.

II. İstənilən $\cos x > a$ şəklində olan triqonometrik bərabərsizliyinin həllini vahid çevrənin və ya uyğun triqonometrik funksiyanın qrafikinin, xassələrinin köməyi ilə tapmaq olar. Lakin yeni qayda olaraq, triqonometrik funksiyaların çevirmə düsturlarından istifadə etməklə də $\cos x > a$ bərabərsizliyini $\sin x > a$ bərabərsizliyinə gətirməklə də həll etmək olar. Belə ki, $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ düsturuna əsasən, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > 0$ bərabərsizliyinə gətirməklə həll edirik. Burada $-1 \le a \le 1$ olduqda $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > a$ triqonometrik bərabərsizliyinin həlli:



Şəkil 4

$\arcsin a + 2\pi\kappa < \frac{\pi}{2} - x < \pi - \arcsin a + 2\pi\kappa, \quad \kappa \in Z$ şəklindədir. Buradan sadə çevrilmələr apararaq alırıq ki, $\cos x > a$ triqonometrik bərabərsizliyinin həlli:

$-\arccos a + 2\pi k < x < \arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$

şəklindədir. Bu bərabərsizliyin ümumi həllər çoxluğunu

$x \in (-\arccos a + 2\pi k;\ \arccos a + 2\pi k),\ \ k \in Z$

aralıqlarının birləşməsi şəklində göstərmək olar.

$\cos x < a$ bərabərsizliyini həll etmək üçün yuxarıdakı bərabərsizlikdə $x = \pi - y$ əvəzləməsini aparaq. Onda $\cos x < a$ bərabərsizliyindən: $\cos y > -a$ bərabərsizliyini alarıq. $x = \pi - y$ əvəzləməsinə görə $y = \pi - x$ $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ olduğundan və (3) düsturuna əsasən:

$-\arccos(-a) + 2\pi k < \pi - x < \arccos(-a) + 2\pi k,\ \ k \in Z$

Buradan

$-(\pi - \arccos a) + 2\pi k < \pi - x < (\pi - \arccos a) + 2\pi k$, $k \in Z$ alarıq. Bərabərsizliklərin məlum xassələrindən istifadə edərək sadələşdirmələr aparmaqlabu bərabərsizliyi aşağıdakı şəklə gətirmək olar:

$$\arccos a + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi k,\ \ k \in Z \qquad (4)$$

$\sin x \ge a$ ($\sin x \le a$), $\cos x \ge a$ ($\cos x \le a$) triqonometrik bərabərsizliklərin həlləri çoxluqlarını tapmaq üçün yuxarıda verdiyimiz uyğun düsturlarda işarələrinin əvəzinə $\ge$" ($\le$) işarələrini yazmaq lazımdır.

Məqalənin aktuallığı. Triqonometrik bərabərsizliklərin həlli zamanı həllərin seriyalarının birləşdirilməsinə xüsusi diqqət yetirilməlidir. Bu şagirdlərdə ümumiləşdirmə qabiliyyətini inkişaf etdirmək üçün yaxşı vasitədir. Məqalədə istifadə edilən üsullar müvafiq nümunələrlə möhkəmləndirildiyindən ümumiləşdirmə müvəffəqiyyətlə başa çatmış olur. Aktualllığı həm də ondan ki, hazırda buraxılış və qəbul imtahanlarında açıq tipli suallarda həllin izahlı verilməsi tələb olunur və bu məsələ də məqalədə diqqət mərkəzində saxlanılmışdır.

Məqalənin elmi yeniliyi. Orta məktəb riyaziyyatının tədrisi prosesində kurikulum proqramına əsasən "Cəbr və funksiyalar" məzmun xərri ilə "Həndəsə" məzmun xətti arasında əlaqələrə aydınlıq gətirilmişdir.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Triqonometrik bərabərsizliklərin həllində vahid çevrədən və triqonometrik funksiyaların qrafikindən və xassələrindən istifadə edilməklə təlimin əyanilik prinsipinə əsaslanır. Məhz bu üsullarla bərabərsizliklərin həllinin tapılması mənimsəməni yüksəldir, biliyin təchizinə, aydın və şüurlu başa düşməsinə kömək edir. Çünki burada əyaniliyin simvolik əyanilik (çertyojlar və qrafiklər) növündən istifadə edilir.

Ədəbiyyat

1. M.C. Mərdanov, M.H. Yaqubov. Cəbr və analizin başlanğıcı. X sinif üçün dərslik. Çaşıoğlu, Bakı, 2003, 304 səh.

2. R.H. Hüseynov, Ç.C. Xəlilov. Riyaziyyat. Bakı, DİM, 2003, 303 səh.

3. Ə.A. Quliyev. X-XI siniflərdə cəbr və analizin başlanğıcı. Bakı, "Elm", Bakl, 2014, 416 səh.

4. Ə. Məmmədov. Elementar riyaziyyata aid məsələ və misallar. Metodik vəsait, ADPU, Bakı, 2015, 979 səh.

5. M.H. Yaqubov, T.X. İsmayılov. Riyaziyyat. Çaşıoğlu, Bakı, 2008, 855 səh.

С.М. Черкесов

Методика решение тригонометрического неравенство в курсе математики средней школе

Резюме

В X классе курса математики в средней школе изучается тематика по тригонометрическим уравнениям. Во время решения тригонометрических уравнений ученики встречаются с трудностями при нахождении общего решения заданных тригонометрических уравнений. Практика показывает, что во время решения тригонометрических уравнений общие решения можно показывать с легкостью, при этом используя графику соответствующей тригонометрической функции и единый круг с целью (с точки зрения) наглядности. Для этого следует рекомендовать ученикам еще лучшее изучение свойств тригонометрической функции. В данной статье дано объяснение образцов решения тригонометрических уравнений, используя наглядным образом единый круг и графику согласно системе координат.

S.M. Charkasov

Technique for solving trigonometric inequality in a high school mathematics course

Summary

Inequalities in the secondary school mathematics course, their properties are of trigonometric inequalities is studied in the 10th grade. When solving trigonometric inequalities, they have great difficulty in finding general solutions to a given trigonometric inequality. Experience has shown that when solving trigonometric inequalities, it is easy to show general solutions using a single circle and a graph of the corresponding trigonometric function for the purpose of visibility. To do this, students should be encouraged to study the properties of trigonometric function.This article explains examples of solving trigonometric inequalities using visual aids from a single circle and the corresponding graph in the coordinate system.

Redaksiyaya daxil olub: 14.03.2022