ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЮЩЕЙ ВЯЗКО-УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГОЙ ТРУБКЕ

Акбарлы Рейхан Сайяд- старший преподаватель, кафедра Механика, АзАСУ, akbarli89@mail.ru
Алиев Али Бакир- доцент, кафедра Теоретической механики и механики всей среды, БГУ, alialiev.b@gmail.com
Киясбейли Энфира Талат- кандидат физико-математических наук, кафедра Теоретической механики и механики всей среды, БГУ, mexanika.bsu.az@mail.ru

Аннотация. Исследуется пульсирующее течение вязкоупругой несжимаемой жидкости в полубесконечной вязко-упругой трубке переменного кругового сечения. В предлагаемой статье рассматривается волновое течение жидкости, заключенной в деформируемую трубку. Математическая модель используемой системы описывается уравнением движения несжимаемой вязко-упругой жидкости совместно с уравнением неразрывности и уравнением динамики для изотропной линейно вязко-упругой трубки переменного кругового сечения. Решение задачи сводится к решению сингулярной кривой задачи Штурма-Лиувилля. В простейшем случае выявлено влияние реологии жидкости на волновые характеристики.
Ключевые слова: вязкоупругой жидкости, упругая трубка, волна, пульсирующее течение

PULSATING NON-VISCOUS VISCO-ELASTIC FLUID IN AN ELASTIC TUBE

Akbarli Reyhan Sayyad-senior lecturer, department of Mechanics, AzUAC, akbarli89@mail.ru
Alıyev Ali Bakir- docent, department of Theoretical mechanics and mechanics of the whole environment, BSU, alialiev.b@gmail.com
Kiyasbayli Enfira Talat- PhD in physics and mathematics, department of Theoretical mechanics and mechanics of the whole environment, BSU, mexanika.bsu.az@mail.ru

Abstract. A pulsating flow of a viscoelastic incompressible fluid in a semi-infinite viscoelastic tube of variable circular cross section is investigated. The proposed article considers the wave flow of a fluid enclosed in a deformable tube. The mathematical model of the system used is described by the equation of motion of an incompressible visco-elastic fluid together with the equation of continuity and the equation of dynamics for an isotropic linearly viscous-elastic tube of variable circular cross section. The solution of the problem is reduced to the solution of the singular curve of the Sturm-Liouville problem. In the simplest case, the effect of the rheology of the fluid on the wave characteristics is revealed.
Keywords: viscoelastic fluid, elastic tube, wave, pulsating flow

В настоящее время большое внимание привлекают задачи математической физики, связанные с описанием волновых движений жидкостей различной физической природы. Этот интерес обусловлен не только большой прикладной значимостью указанных задач, но и их новым теоретическим и математическим содержанием, часто не имеющим аналогов в классической математической физике. Здесь среди актуальных проблем гидродинамики, весьма важным представляется изучение течения жидкостей в деформируемых трубках. Это утверждение подтверждается широким распространением в технике и живых организмах систем транспортировки жидкости (трубопроводный транспорт, гемодинамика). При решении такого рода задач необходимо привлекать к рассмотрению уравнения движения трубки с учетом влияния движущейся в ее полости жидкости на динамику трубки. Специфика таких исследований, корни которых заложены в работах Л.Эйлера, И.Громека, Е.Жуковского, подробно отражены в работах [1,2,3,4]. Однако учет ряда весьма важных факторов, таких как вязко-упругие свойства жидкости и материала трубки в купе с ее сужением изучены недостаточно. В работе [5], на основе одномерных линейных уравнений, построено аналитическое решение задачи о пульсирующем течении вязко-упругой жидкости в упругой трубке с учетом эффекта сужения. Поставленная задача приводит к решению сингулярной краевой задаче Штурма-Лиувилля.

1.Формулировка уравнений гидроупругости для моделей гидродинамики, обладающих конечным спектром времен релаксации и ретардации.

Сначала положим, что дана полубесконечная трубка переменного кругового сечения радиуса $R=R(x)$ и толщиной h, где $R(x)$ монотонна убывающая функция $\forall x\in[0,\infty]$, а x-продольная координата. Система одномерных уравнений гидроупругости состоит из уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x}(S\,u)+L\frac{\partial w}{\partial t}=0, \tag{1.1}$$

уравнение импульсов

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(-p+\sigma), \tag{1.2}$$

уравнения движения трубки, которое для линейной вязко-упругости имеет вид [6]:

$$p=\frac{h}{R^2(x)}E^{v}\,w=\rho_*\,h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{1.3}$$

При написании уравнения (1.3) полагалось, что трубка тонкостенная и она жестко прикреплена к окружающей среде, вследствие чего трубка не может совершать движение вдоль оси [6]. Классические представления гидродинамики идеальной и вязкой ньютоновой жидкости неприемлемы при описании течения сплошных сред, содержащих длинные «высокомолекулярные» соединения. Этот факт имеет первостепенное значение для многих технологических процессов, в которых приходится встречаться с движением коллоидных растворов, суспензий, эмульсий и т.д. с этой целью, для замыкания установленных выше уравнений, запишем реологическое соотношение для жидкости и примем его в форме линейной вязко-упругости .

$$\prod_{j=1}^{r}\left(1+\lambda_j\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma=2\eta\prod_{j=1}^{s}\left(1+\theta_j\frac{\partial}{\partial t}\right)e \tag{1.4}$$

В уравнениях (1.1)-(1.4) $u(x,t)$ - скорость течения жидкости, $w(x,t)$ - радиальное смещение стенки трубки, $p(x,t)$ - гидродинамическое давление, $\sigma(x,t)$ - «вязко-упругое» напряжение, ρ и ρ_* - соответственно плотности, жидкости и материала трубки, $e(x,t)$ - скорость деформации, $S=\pi R^2(x)$ - площадь поперечного сечения, $L=2\pi R(x)$ - длина окружности трубки, η - динамический коэффициент вязкости жидкости, а величины λ_j и θ_j образуют спектры релаксации и ретардации соответственно. В (1.3) E^{v} - оператор наследственного [6]

$$E^{v}=E\left(1-\Gamma^*\right),$$

в котором E - модуль упругости, Γ^* - оператор релаксации

$$\Gamma^* w(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(t-\tau)w(x,\tau)d\tau,$$

а $\Gamma(t-\tau)$ - разностное ядро релаксации. Таким образом соотношение (1.3) в развернутом виде записывается как

$$p=\frac{h}{R^2(x)}E\left\{w(x,t)-\int_{-\infty}^{t}\Gamma(t-\tau)w(x,\tau)d\tau\right\}. \tag{1.5}$$

Учитывая в (1.4) равенство $e=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, уравнение (1.4) перепишем в виде:

$$\prod_{j=1}^{r}\left(1+\lambda_j\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma=2\eta\prod_{j=1}^{s}\left(1+\theta_j\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1.6}$$

Известно, что существуют два класса линейных вариантов модели (1.6). к первому классу относятся среды, обладающие мгновенной упругость, для которых $r=s+1$. Ко второму классу отнесены модели, обнаруживающие при мгновенном нагружении вязкое поведение. Для них $r=s$.

Далее, не умоляя общности, функцию $R(x)$ запишем посредством равенства $R(x)=R_\infty\, g(x)$ и примем, что функция $g(x)$ дважды дифференцируема. Будем также полагать, что на бесконечности трубка имеет постоянное поперечное сечение R_∞. Отсюда имеем:

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=1. \tag{1.7}$$

Одновременно считаем, что

$$\lim_{x\to\infty} g'(x)=0,\ \lim_{x\to\infty} g''(x)=0, \tag{1.8}$$

где штрихи здесь и далее означают дифференцирование по координате x. Примером такой функции является, например функция

$$g(x)=1+e^{-\alpha x}\ (\alpha>0), \tag{1.9}$$

которая характеризует конусообразное сужение трубки по ее длине. Тогда, учитывая (1.5) и (1.6) приходим к следующей замкнутой системе уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{g'(x)}{g(x)}u+\frac{2}{R_\infty\, g(x)}\frac{\partial w}{\partial t}=0, \tag{1.10}$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \tag{1.11}$$

$$p=\frac{h}{R_\infty^2\, g'(x)}E\left\{w(x,t)-\int_{-\infty}^{t}\Gamma(t-\tau)w(x,\tau)d\tau\right\}, \tag{1.12}$$

$$\prod_{j=1}^{r}\left(\sigma+\lambda_j\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)=2\eta\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\theta_j\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right). \tag{1.13}$$

Вывод дифференциального уравнения для амплитуды скорости. Сведем полученную систему дифференциальных уравнений в частных производных (1.10)-(1.13) к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для описания сложных импульсов, характерных для волновых процессов, используется гармонический анализ, то есть импульсы сложной формы раскладываются на синусоидальные составляющие, образующие ряд Фурье. В силу линейности и однородности системы прослеживается прохождение каждой гармоники и для определения формы импульса в любой точке суммируются составляющие, соответствующие данной координате. Таким образом, математически, принципиальное значение имеет исследование чисто синусоидального колебания. Отмеченное позволяет представить все искомые функции пропорционально временному множителю $\exp(i\omega t)$, где ω - задаваемое действительное значение угловой частоты, а i - мнимая единица. Следовательно, представим возмущения в классе бегущих волн

$$u=u_1(x)\exp(i\omega t),$$

$$w = w_1(x)\exp(i\omega t), \quad (2.1)$$
$$p = p_1(x)\exp(i\omega t),$$
$$\sigma = \sigma_1(x)\exp(i\omega t).$$

Здесь u_1, w_1, p_1 и σ_1 - вообще говоря комплексные функции координаты положения. Прежде всего преобразуем уравнение (1.12). Подставив второе и третье выражения (2.1) в (1.12), придем к соотношению

$$p_1 \exp(i\omega t) = \frac{h}{R_\infty^2 g'(x)} E\left\{ w_1 \exp(i\omega t) - w_1 \int_{-\infty}^{t} \Gamma(t-\tau)\exp(i\omega\tau)\, d\tau \right\}. \quad (2.2)$$

Отсюда, приняв $t-\tau=\theta$, после ряда преобразовании вместо (2.2) получим:

$$p_1 = w_1 h\left\{ \frac{E}{R_\infty^2 g^2(x)}(1-\alpha) - \rho_* \omega^2 \right\},$$
$$\alpha = \int_0^\infty \Gamma(\theta) e^{-i\omega\theta}\, d\theta, \quad (2.3)$$

а величина θ записывается как $\theta = t-\tau$. Из всей совокупности возможных ядер релаксации, комплексную величину α, определяемую формулой (2.3) можно определить либо аналитически, либо численно. Точно также, преобразуя уравнения (1.10), (1.11) и (1.13), окончательно будем иметь:

$$u_1' + 2\frac{g'(x)}{g(x)} u_1 + 2i\frac{\omega}{R_\infty g(x)} w_1 = 0, \quad (2.4)$$
$$i\omega\rho u_1 = -p_1' + \sigma_1', \quad (2.5)$$
$$p_1 = k(x) w_1, \quad (2.6)$$
$$\sigma_1 = 2\eta\frac{b}{a} u_1', \quad (2.7)$$

где, ради краткости, введем обозначения

$$a = \prod_{j=1}^{r}(1+i\lambda_j\omega), \quad b = \prod_{j=1}^{s}(1+i\theta_j\omega), \quad (2.8)$$
$$k(x) = h\left\{ \frac{E}{R_\infty^2 g^2(x)}(1-\alpha) - \rho_* \omega^2 \right\}. \quad (2.9)$$

При рассмотрении системы (2.4)-(2.7) представляется целесообразным определить функцию $u_1(x)$ и получить уравнение для ее определения. Для этого в начале продифференцируем уравнения (2.6) и (2.7) по x. Отсюда используя полученный результат в (2.5), запишем:

$$2\eta\frac{b}{a} u_1'' - k' w_1 - k w_1' - i\omega\rho u_1 = 0. \quad (2.10)$$

Легко усмотреть, что из (2.4) имеем:

$$w_1 = -\frac{1}{Q_2(x)} u_1' - \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} u_1. \quad (2.11)$$

Здесь

$$Q_1(x) = 2\frac{g'(x)}{g(x)}, \quad Q_2(x) = 2i\frac{\omega}{R_\infty g(x)}.$$

Теперь из (2.11) можно определить w_1' и подставив его значение в (2.10) функции u_1. Итак в качестве исходного дифференциального уравнения задачи имеем

$$G_1(x)u_1''+G_2(x)u_1'+G_3(x)u_1=0\,, \tag{2.12}$$

где

$$G_1(x)=2\eta\frac{b}{a}-i\frac{R_\infty}{2\omega}k(x)g(x)\,, \tag{2.13}$$

$$G_2(x)=-\frac{iR_\infty}{2\omega}\left\{(g\,k)'+k\,g'\right\}, \tag{2.14}$$

$$G_3(x)=-i\left\{\frac{R_\infty}{2\omega}(k\,g')'+\omega\rho\right\}. \tag{2.15}$$

Построение аналитического решения. Для получения конструктивного решения, следуя методу последовательных приближении, решение уравнения $f(x,-\delta)=e^{-i\delta x}+\delta\int_x^\infty \sin\delta(\eta-x)q(\eta)y(\eta,-\delta)d\eta$ запишем в виде

$$f(x,-\delta)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta^n f_n(x,-\delta) \tag{3.1}$$

в котором имеем совокупность следующих рекуррентных соотношений:

$$f_0(x,-\delta)=e^{-i\delta x} \tag{3.2}$$

$$f_n(x,-\delta)=\int_x^\infty \sin\delta(\eta-x)q(\eta)f_{n-1}(\eta,-\delta)d\eta\quad (n=1,2,3...)$$

Теперь по формулам (2.4)-(2.7) не представляет принципиального труда определить функции координаты положения и с ними функции u, w, p и σ. Для этого, введя сокращенное обозначение

$$F(x)=\frac{1}{\chi(x)}\frac{f(x,-\delta)}{f(0,-\delta)}$$

запишем их в виде

$$u=y_0F(x)\exp(i\omega t)\,, \tag{3.3}$$

$$w=y_0\frac{iR_\infty}{\omega}\left\{\frac{1}{2}g(x)F'(x)+g'(x)F(x)\right\}\exp(i\omega t)\,, \tag{3.4}$$

$$p=y_0k(x)\frac{iR_\infty}{\omega}\left\{\frac{1}{2}g(x)F'(x)+g'(x)F(x)\right\}\exp(i\omega t)\,, \tag{3.5}$$

$$w=2y_0\eta\frac{b}{a}F'(x)\exp(i\omega t)\,. \tag{3.6}$$

Для последующего описания скорости жидкости, перемещения, давления и «вязко-упругого» напряжения в качестве граничного условия на торце трубки зададим пульсирующее давление

$$p(0,t)=p_0\exp(i\omega t)\,, \tag{3.7}$$

где p_0 - задаваемая эмпирическая величина. Из сравнения формул (3.7) и (3.5) сразу следует равенство

$$y_0=p_0\frac{\omega}{iR_\infty k(0)\left\{\frac{1}{2}g(0)F'(0)+g'(0)F(0)\right\}}\,,$$

На основании которого формулы (3.3)-(3.6) запишем в окончательной форме

$$u(x,t)=-p_0\frac{i\omega F(x)}{R_\infty k(0)\left\{\frac{1}{2}g(0)F'(0)+g'(0)F(0)\right\}}\exp(i\omega t)\,,$$

$$w(x,t)=\frac{p_0\left\{\frac{1}{2}g(x)F'(x)+g'(x)F(x)\right\}}{k(0)\left\{\frac{1}{2}g(0)F'(0)+g'(0)F(0)\right\}}\exp(i\omega t), \tag{3.8}$$

$$p(x,t)=p_0\frac{k(x)\left\{\frac{1}{2}g(x)F'(x)+g'(x)F(x)\right\}}{k(0)\left\{\frac{1}{2}g(0)F'(0)+g'(0)F(0)\right\}}\exp(i\omega t),$$

$$\sigma(x,t)=-2i\,p_0\,\eta\frac{b}{a}\frac{\omega}{R_\infty k(0)}\frac{F'(x)}{\frac{1}{2}g(0)F'(0)+g'(0)F(0)}\exp(i\omega t).$$

Поступая аналогичным образом для случая, когда в качестве граничного условия на торце трубки задан пульсирующий расход жидкости

$$Q=Q_0\exp(i\omega t),$$

где $Q(x,t)=S(x)u(x,t)$, находим:

$$y_0=p_0\frac{Q_0}{\pi R_\infty^2 g(0)}\frac{1}{F(0)}.$$

Отсюда приходим к следующим соотношениям

$$u(x,t)=\frac{Q_0}{\pi R_\infty^2 g^2(0)}\frac{F(x)}{F(0)}\exp(i\omega t),$$

$$w(x,t)=\frac{i\,Q_0}{\pi R_\infty\,\omega\,g^2(0)F(0)}\left\{\frac{1}{2}g(x)F'(x)+g'(x)F(x)\right\}\exp(i\omega t), \tag{3.9}$$

$$p(x,t)=\frac{i\,Q_0\,k(x)}{\pi R_\infty\,\omega\,g^2(0)F(0)}\left\{\frac{1}{2}g(x)F'(x)+g'(x)F(x)\right\}\exp(i\omega t),$$

$$\sigma(x,t)=2Q_0\frac{\eta}{\pi R_\infty^2 g^2(0)}\frac{b}{a}\frac{F'(x)}{F(0)}\exp(i\omega t).$$

Таким образом, формулами (3.8) и (3.9) наша задача может считаться решенной. Отметим, что физическую величину представляют реальные части (3.8) и (3.9).

Оставляя в стороне учет таких факторов, как сужение вязкие свойства материала трубке (этому аспекту посвящено довольно много исследований), ограничимся, в основном, рассмотрением вопросов, которые интересуют гидродинамику. Это обстоятельство приводит к анализу влияния вязко-упругих свойств жидкости на волновые характеристики. В этом специальном случае поскольку $\alpha=0$, $R=R_\infty=R$, $g(x)=1$, согласно формулам (2.13)-(2.15) имеем:

$$G_1=2\eta\frac{b}{a}-i\frac{R}{2\omega}k,\ \ G_2=0,\ \ G_3=-i\,\omega\,\rho,$$

где в свою очередь

$$k=h\left\{\frac{E}{R^2}-\rho_*\,\omega^2\right\}.$$

Кроме того

$$\chi(x)=1,\ \ q(x)=0.$$

Теперь функции $f(x,-\delta)$, $f'(x,-\delta)$ и $F(x)$ могут быть записаны в виде

$f\left(x,-\delta\right)=e^{-i\delta x}$, $f'\left(x,-\delta\right)=-i\,e^{-i\delta x}$, $F\left(x\right)=f\left(x,-\delta\right)=e^{-i\delta x}$,

поскольку $f\left(0,-\delta\right)=1$. Таким образом решение задачи существенно упрощается и соотношения (3.8) и (3.9). Отсюда, в соответствии с формулой Эйлера для амплитуд искомых функций, можно записать

$$|u|=\frac{2\rho_0\,\omega}{R\,h\left\{\dfrac{E}{R^2}-\rho_*\,\omega^2\right\}}\frac{1}{\sqrt{\delta_0^2+\delta_1^2}},$$

$$|w|=\frac{p_0}{h\left\{\dfrac{E}{R^2}-\rho_*\,\omega^2\right\}}, \tag{3.10}$$

$$|p|=p_0,$$

$$|\sigma|=4\,p_0\,\eta\frac{\omega}{R\,h\left\{\dfrac{E}{R^2}-\rho_*\,\omega^2\right\}}\sqrt{m_1^2+m_2^2}.$$

и

$$|u|=\frac{Q_0}{\pi R^2},$$

$$|w|=\frac{Q_0\,\omega}{2\pi\,R\,h}\sqrt{\delta_0^1+\delta_1^2},$$

$$|p|=\frac{Q_0\,h}{2\pi\,R\,\omega}\left\{\frac{E}{R^2}-\rho_*\,\omega^2\right\}\sqrt{\delta_0^2+\delta_1^2}, \tag{3.11}$$

$$|\sigma|=2Q_0\frac{\eta}{\pi R^2}\sqrt{\left(\delta_1 m_1-\delta_0 m_2\right)^2+\left(\delta_0 m_1+\delta_1 m_2\right)^2}.$$

Полученные здесь формулы (3.10) и (3.11) можно положить в основу подробного расчета искомых функций, скорости волны $c=\omega/\delta_0$ и затухания δ_1 в зависимости от времен релаксаций и ретардаций.

Первый случай $\psi=s+1$. Для моделей среды ($\psi=1$, $s=0$) $a=1+i\,\lambda\,\omega$, $b=1$, где λ - единственное время релаксации напряжений. Здесь формулы для m_1 и m_2 принимают следующий вид

$$m_1=\frac{1}{1+\lambda^2\omega^2},\quad m_2=-\frac{\lambda\,\omega}{1+\lambda^2\omega^2}.$$

Второй случай $\psi=s=1$. В этом случае $a=1+i\,\lambda\,\omega$ и $b^*=1+i\,\theta\,\omega$ предыдущие выражения должны быть заменены на следующие

$$m_1=\frac{1+\lambda^2\omega^2\xi}{1+\lambda^2\omega^2},\quad m_2=-\frac{\lambda\,\omega}{1+\lambda^2\omega^2}\left(\xi-1\right),$$

где $\xi=\theta/\lambda$, а θ - единственное время ретардации. При $\psi=s=0$ придем к модели вязкой ньютоновой жидкости.

Выводы. На основании сопоставления полученных численных данных можно сделать следующие выводы: для первого класса модели коэффициент затухания на два порядка меньше, чем для второго класса; амплитуда «вязкого напряжения» при втором режиме возрастает, в зависимости от ξ; амплитуда «вязкого напряжение» при первом режиме уменьшается в зависимости от λ; неньютоновые свойства жидкости наиболее существенно проявляются при использовании второго класса моделей. В заключении отметим, что достоверность и точность полученных результатов обеспечиваются корректностью постановки задачи, применением строгих и обоснованных математических методов и физически обоснованными выводами.

Список литературы

1. Алиев, А.Б. Движение жидкости в оболочке с учетом жесткости внешней среды / А.Б. Алиев // Международный научный журнал «Наука и мир». 2016. № 5(33). Т. 1. с. 14-18.
2. Амензаде, Р.Ю. Распространение волн в жидкости, протекающей в упругой трубке с учетом вязко-упругого трения окружающей среды. / Р.Ю. Амензаде, А.Б. Алиев, С.А., Руфуллаева // Вестник Бакинского Университета, Серия физико-математических наук. 2013. 3. С. 88-94.
3. Педли, Т. Гидродинамика крупных сосудов / Т. Педли. Москва: Мир, 1983.400 с.
4. Salmanova, G.M. The mathematical analysis of the hydrodynamic characteristics of a shell-liquid system with spherical air bubbles / G.M. Salmanova, R.S. Akbarli // Science and World, International scientific journal.2017. № 7(47). Vol. 1. p. 8-14.
5. Амензаде Р.Ю. Аналитическое решение задачи о волновом течении вязко-упругой жидкости в упругой трубке с учетом эффекта сужения. ДАН Россия, 2008, т.418, №3, с.327-330.
6. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977, 382с.

References

1. Aliev, A.B. Dvizhenie zhidkosti v obolochke s uchetom zhestkosti vneshnej sredy / A.B. Aliev // Mezhdunarodnyj nauchnyj zhurnal «Nauka i mir». 2016. № 5(33). T. 1. s. 14-18.
2. Amenzade, R.Ju. Rasprostranenie voln v zhidkosti, protekajushhej v uprugoj trubke s uchetom vjazko-uprugogo trenija okruzhajushhej sredy. / R.Ju. Amenzade, A.B. Aliev, S.A., Rufullaeva // Vestnik Bakinskogo Universiteta, Serija fiziko-matematicheskih nauk. 2013. 3. S. 88-94.
3. Pedli, T. Gidrodinamika krupnyh sosudov / T. Pedli. Moskva: Mir, 1983. 400 s.
4. Salmanova, G.M. The mathematical analysis of the hydrodynamic characteristics of a shell-liquid system with spherical air bubbles / G.M. Salmanova, R.S. Akbarli // Science and World, International scientific journal.2017. № 7(47). Vol. 1. p. 8-14.
5. Amenzade R.Ju. Analiticheskoe reshenie zadachi o volnovom techenii vjazko-uprugoj zhidkosti v uprugoj trubke s uchetom jeffekta suzhenija. DAN Rossija, 2008, t.418, №3, s.327-330.
6. Rabotnov Ju.N. Jelementy nasledstvennoj mehaniki tverdyh tel. M.: Nauka, 1977, 382s.

Redaksiyaya daxil olma/Received 17.02.2019
Çapa qəbul olunma/Accepted for publication 17.03.2019