

MÜHƏNDİS QURĞULARI VƏ İNŞAAT KONSTRUKSIYALARI

УДК 539.218

М.М. ТАГИЕВ

БГУ

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ КОРТЕВЕГА ДЕ ФРИЗА И ЕГО НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА (КФД)

Статья посвящена существованию и единственности решения уравнения эволюции, имеющее нелинейность диффузионного типа и Кортевега де Фриза, созданной распространением нелинейных волн в насыщенных двухфазных средах. Предположением обратного доказано единственность решения эволюционного уравнения, имеющий нелинейность диффузионного типа и Кортевега де Фриза. Уменьшение пористости (доли жидкой фазы) и отсутствие силы инерции привело возрастанию амплитуды начальной фазы вокруг пояса источника и определено затухание при удалении.

Исследовано зависимость начального импульса эволюции от значений пористости и график этой зависимости дано в статье. Определено малое действие времени релаксации коэффициента вязкости твердой фазы на процесс распространения и деформации фронта возмущения. В статье также показано графически резкое изменение формы, зависимости коэффициента вязкости жидкой фазы и зависимости от значения коэффициента проницаемости профиля начального импульса.

Ключевые слова: уравнение, нелинейность, возмущение, жидкость, волна, среда, теорема единственности.

В [1-2] выведено эволюционное уравнение нелинейных возмущений в двух и трехфазных реологических средах. Изучение таких нелинейных процессов необходимо потому, что они несут важную и более точную информацию о структурах фаз, явлениях межфазных переносов и т.д. Математическое исследование эволюционного уравнения в частных производных высшего порядка с нелинейностью Кортевега де Фриза и его производным, а

также с нелинейностью диффузионного типа (КФД) может служить основной для обнаружения новых физических эффектов. Уравнению КФД имеет вид [1-2]

$$\left(1 + R_2 \frac{\partial}{\partial T}\right) \frac{\partial V}{\partial x} + \left(1 + R_1 \frac{\partial}{\partial T}\right) V \frac{\partial V}{\partial T} + R_3 \left(1 + \frac{R_4}{R_3} |V|\right) V - \sum_{i=1}^n A_{i+1} \frac{\partial^{i+1} V}{\partial T^{i+1}} = 0 \quad (1)$$

здесь $V(x, T)$ – скорость смещения одной из фазы системы, x – координата, $T = c^{-1}x - t$, t – время, c – скорость продольной волны, определяющийся из дисперсионного уравнения [1-3], $R_1, R_2, \dots, A_{i+1}$ – постоянные коэффициенты задачи.

Теорема существования: Уравнение КФД всегда имеет решение, соответствующее начальному условию $V(0, T)$ при условии его достаточной гладкости и стремления к нулю со своими производными любого порядка при $T \rightarrow \infty$.

Теорема о существовании решения уравнения Кортевега де Фриза доказано в [3]. Существование решения уравнения КФД следует из физики явленного процессов, однако, этот факт и проведенные численные эксперименты не являются математическим доказательством.

Теорема единственности. Решения уравнения КФД, принадлежащие классу $C^{\infty}(-\infty, \infty)$ и стремящиеся к нулю своими производными любого порядка при $T \rightarrow \infty$, определяются единственным образом через свои начальные значения.

Доказательство: Пусть (1) имеет два возможных решения v и u при заданном начальном условии $V(0, T)$. Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial x} = LV, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = Lu, \quad (2)$$

где L -нелинейный оператор, соответствующий (1). Вычитая второе уравнение (2) из первого, и обозначая, $w=V-u$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} = & - \left[(1 + R_1 \frac{\partial}{\partial T}) V \frac{\partial w}{\partial T} + \right. \\ & \left. (1 + R_1 \frac{\partial}{\partial T}) w \frac{\partial u}{\partial T} + R_2 \frac{\partial^2 w}{\partial T^2} + \right. \\ & \left. + R_3 \frac{\partial^2 w}{\partial T^2} + R_3 w + R_3 (|V| - \right. \\ & \left. - |u|) w - \sum_{k=1}^n A_{k+1} \frac{\partial^{k+1} w}{\partial T^{k+1}} \right], \\ w(0, T) = & 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение КФД по всей оси T записываем в форме закона сохранения

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} V dT = -R_1 \frac{dV}{dx} - R_3 \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \frac{R_1}{R_3} |V|) V dV. \quad (4)$$

Отсюда следует, что импульс каждой фазы изменяется за счет своего внутреннего трения и взаимодействия фаз. Следовательно, из ограниченности первого и третьего членов в (4) получим, что

$$\max \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| < \infty. \quad (5)$$

Функция W принадлежит классу $C^*(-\infty, \infty)$ и стремится к нулю с производными любого порядка при $T \rightarrow \infty$, $w=0$ является тривиальным решением задачи (3). Если $w \neq 0$, то умножая (3) на w и интегрируя по всей оси T при учете условия (5), имеем

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} = & - \int_{-\infty}^{\infty} \left[2 \frac{\partial u}{\partial T} - \frac{\partial V}{\partial T} + R_1 \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} + \right. \\ & \left. + 2R_4 + 2R_5 \frac{|V|V - |u|u}{w} - 2(R_1 + R_3) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial T} \right)^2 - 2R_2 \left(\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial T} \right) \cdot \left(\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^n (-1)^k A_{2k} \left(\frac{1}{w} \frac{\partial^k w}{\partial T^k} \right)^2 \right] dT, \end{aligned} \quad (6)$$

$$E(0) = 0, E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2}{2} dT, \quad k = \frac{i+1}{2},$$

где i - натуральные нечетные числа.

Здесь $E(x)$ неотрицательная функция и физически характеризует кинетическую энергию единичной массы по всей оси T . Если выполняются условия

$$\max \left| \frac{1}{w} \frac{\partial^k w}{\partial T^k} \right| < \infty, \quad \max \left| \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial x} \right| < \infty, \quad (7)$$

то под интегральная функция (6) будет ограниченной

$$\begin{aligned} A = \max & \left[2 \frac{\partial u}{\partial T} - \frac{\partial V}{\partial T} + R_1 \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} + \right. \\ & + 2R_4 + 2R_5 \frac{|V|V - |u|u}{w} - 2(R_1 + \\ & + R_3) \left(\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial T} \right)^2 - 2R_2 \left(\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial T} \right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \sum_{k=1}^n (-1)^k A_{2k} \left(\frac{1}{w} \frac{\partial^k w}{\partial T^k} \right)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

В результате уравнение (6) принимает вид

$$\frac{dE}{dx} \leq AE(x), \quad E(x) \leq E(0)e^{-Ax} \quad (9)$$

Из (6) $E(0)=0$ и поэтому $E(x)=0 \Rightarrow u=V$. При отсутствии внутренних трений и взаимодействий фаз, уравнение (1) примет вид [5].

$$\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial T} - \sum_{i=1}^n A_{i+1} \frac{\partial^{i+1} V}{\partial T^{i+1}} = 0. \quad (10)$$

В [4] предложен общий вид преобразования Бэклунда для решения уравнения (10). Это уравнение при $i=3$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial T} + A_3 \frac{\partial^3 V}{\partial T^3} = \\ = A_2 \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} + A_4 \frac{\partial^4 V}{\partial T^4} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение (11) при $A_3 = 4\sqrt{A_2 A_4}$ даст точное решение:

$$\begin{aligned} V(x, T) = & 15 \left(\frac{A_2}{A_4} \right)^{\frac{1}{2}} ch^{-2} x \\ & \times \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{A_2}{A_4} \right)^{\frac{1}{2}} \left[T - 6A_2 \left(\frac{A_2}{A_4} \right)^{\frac{1}{2}} x \right] \times \right. \\ & \left. \times \left\{ 1 + th \left[\frac{1}{2} \left(T - 6A_2 \left(\frac{A_2}{A_4} \right)^{\frac{1}{2}} x \right) \right] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Можно найти и другие одно, многосолитонные решения уравнения (11). Уравнение при $A_2 \neq 0$, $A_3 = A_4 = 0$ известно как уравнение Бюргерса, а при $A_2 = A_4 = 0$, $A_3 \neq 0$ - как уравнение Кортевега де Фриза, описывающий интересный тип волны, называемых солитонами.

В [1-3], в связи с попыткой численного моделирования в монокисперсных суспензиях уравнение (1) использовалось при $n=5$ и следующие граничные условия

$$\begin{aligned} V(0, T) = & R_1 e^{-2T^2}, \quad V(x, T)|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \\ \frac{\partial^{-2} V}{\partial T^{i-2}} \Big|_{|T| \rightarrow \infty} = & 0, \quad \frac{\partial^{-1} V}{\partial T^{i-1}} \Big|_{|T| \rightarrow \infty} = 0, \quad i = 3, 4, 5. \end{aligned}$$

Численные эксперименты показывают, что начальный импульс, за счет внутренних структур фаз, расплывается по пространству и затухает (рис.1).

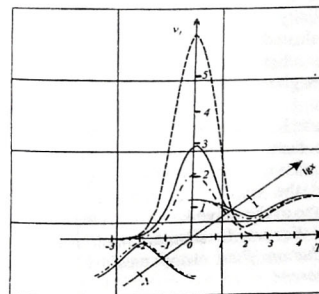


Рис.1.

На рис. 1 показаны эволюции начального импульса в зависимости от пористости $\alpha_2^{(0)} = 0,2$ (штрихпунктирные кривые), $\alpha_1^{(0)} = 0,1$ (сплошные кривые), $\alpha_2^{(0)} = 0,5$ (штриховые кривые) при $K_v = 10^3 \frac{K^2 c}{M^4}$, $\theta_* = 10^{-3} c$, $\theta = 10^{-4} c$.

Крупные зерна в начальном участке несущественно увеличивают интенсивность импульсов, которые в пространстве быстро стабилизируются. Таким образом, увеличение коэффициента пористости $\alpha_2^{(0)}$ ослабляет силу возмущения и энергия его поглощается в пористой среде благодаря росту доли жидкой фазы. При $K_v = 0$ волна, слабо затухая и изменяя свою форму распространяется, а при $R_3 A_3 < \frac{1}{\sqrt{12}}$ решение (1) может содержать солитоны [1].

Проведенные расчеты показывают, что влияние времени релаксации θ и θ_* , а также коэффициентов вязкости твердой фазы на процесс распространения и деформации фронта возмущения очень мало. Однако, в зависимости от значений коэффициента проницаемости k пористой среды и коэффициента вязкости ν жидкой фазы, (они входят комбинировано в выражение $K_v = \nu/k$, $k \sim k(\alpha_2^{(0)})$) профиль начального импульса резко изменяет свою форму с расстоянием (рис. 2).

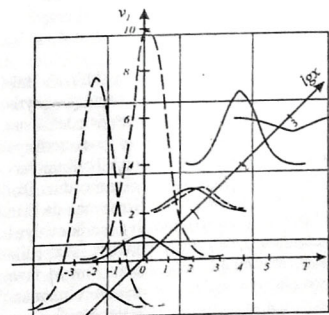


Рис.2

На рис. 2 сплошные кривые соответствуют $K_v = 10^6 \frac{\text{кгс}}{\text{м}^4}$, штриховые $K_v = 10^7 \frac{\text{кгс}}{\text{м}^4}$, штрихпунктирные $K_v = 10^8 \frac{\text{кгс}}{\text{м}^4}$ при $\alpha_2^{(0)} = 0,1$, $\theta_* = 10^{-3} \text{ с.}$, $\theta = 10^{-4} \text{ с.}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Рамазанов Т.К. Нелинейные волны в двух фазных системах. Прикладная механика, Киев, 1995, №9, том 31, с.38-45.
2. Рамазанов Т.К., Курбанов А.И., Тагиев М.М. Нелинейные волновые процессы в двух взаимопроникающих сжимаемых средах. Сборник трудов I Респуб. Конферен. по механике и математика АН Азерб. Часть I, Мех., Баку, 1995, с. 148-152.
3. Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Commun. Pure and Appl. Math. 1968, V.21, p.467-490.
4. Кудряшов Н.А. Преобразование Беклунда для уравнения в частных производных четвертого порядка с нелинейностью Бюргерса-КдФ. Док.АН СССР, 1988, т.300, №2, с.342-345.

M.M. Tagiyev

Korteveqa de friz və diffuzion tip (KFD) qeyri-xəttiliyə malik eyalusiya tənliliyinin həllinin birqiymətliyi haqqında

ANNOTASIYA

Məqalə maye ilə doymuş ikifazlı mühitlərdə həyəcanlanmanın yaratdığı qeyri-xətti dalğaların yayılmasını təsvir edən Korteveqa de Friz və diffuzion tip qeyri-xəttiliyə malik olan eyalusiya tənliliyinin həllinin varlığına və yeganəliyinə həsr olunmuşdur. Əksini fərz etmək metodu ilə Korteveqa de Friz və diffuzion tip qeyri-xəttiliyə malik eyalusiya tənliliyinin həllinin yeganəliyi isbat edilmişdir. Məsələliyin azalması (maye faza hissəsinin) və ətalət qüvvəsinin olmaması mənbə qurşağı ətrafında başlanğıc fazanın amplitudunun artmasına və uzaqlaşmadan sönməsinə gətirdiyi müəyyən edilmişdir. Başlanğıc impulsun eyalusiyaşının məsələliyin müxtəlif qiymətlərindən asılılığı tədqiq edilmiş və bu asılılığın qrafiki məqalədə verilmişdir. Relaksasiya müddətinin və bərk fazanın özlülük əmsalının həyəcanlanma cəbhəsinin deformasiyasına və yayılma prosesinə çox az təsir etdiyi müəyyən edilmişdir. Başlanğıc impulsun profili məsələli mühitin keçiricilik əmsalının qiymətindən və maye fazanın özlülük əmsalından asılı olaraq öz formasının kəskin dəyişməsi də məqalədə qrafik şəkildə göstərilmişdir.

Açar sözlər: tənlilik, qeyri-xəttilik, həyəcanlanma, maye, dalga, mühit, yeganəlik teoremi.

M.M. Tagiyev

On single solvability of nonlinear equations of evolution of cortevega de friz and its nonlinearity of diffusion type (QFD)

ABSTRACT

The article describes the diffusion of nonlinear waves caused by excitement in liquid saturated bi-environment environments, and is based on the presence and uniqueness of the hall of the diagnostic diagnosis of diffuse type Cortevega-de Frisian. The method of assimilation by Cortevega de Friz and diffusion type disorder the validity of the hall of valued evaluating tonality was proved. The lack of fluidity was determined by the absence of fluid phase impurities and the strength of the welding so that the amplitude of the initial phase at the base of the weld was increased and without departing. The validity of the initial impulse evaluation was evaluated in terms of the validity of the masculinity and this graphic of dependence was given in the graph. It has been found that the viscosity coefficient of the bark phase has little effect on the deformation of the facing front. The profile of the initial impulse depending on the valve conductivity and the viscosity of the fluid phase, the shape of the glove is shown in the chart.

Key words: equation, nonlinearity, perturbation, fluid, wave, medium, uniqueness theorem.

Отзыв дал на статью д.м.н., профессор Л.Ф. Фатуллаева.