

А.В. Тагиев*, А. М. Алиев, М.Г. Гасанов**

Азербайджанский Университет Архитектуры и Строительства*,
Бакинский Государственный Университет, Институт Прикладной
Математики, Институт Проблем Физики при БГУ**
e-mail: aahmad07@rambler.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛА И ПРОЦЕССА ДИФФУЗИИ

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию решения задачи распределения тепла и процесса диффузии. На основе аналитической теории явлений переноса тепла и вещества, и термодинамики необратимых процессов, выведена система дифференциальных уравнений тепла и массопереноса. Методами конечных интегральных преобразований получены решения для простейших тел (пластина, цилиндр и шар) при граничных условиях второго и третьего рода. Полученные решения могут быть использованы для расчета процессов термодиффузии в газовых смесях и молекулярных растворах, сушки, газификации, горения и т. д.

Ключевые слова: температурная волна, диффузионная волна, теплоперенос, массоперенос, коэффициент тепло и массопереноса

Физическая интерпретация этой задачи заключается в том, что каждая температурная волна сопровождается диффузионной волной, идущей с той же скоростью, величина которой пропорциональна температурной волне. Зависимость между этими волнами определяется только свойствами среды. Подобным же образом происходит обратное, т.е. диффузионная волна сопровождается дополнительной температурной волной.

Мы остановимся на исследовании задачи, когда температура среды или поверхность тела изменяется по закону простого гармонического колебания.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k \frac{\partial v}{\partial t}, \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = R_u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - R_v TF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1), \quad t > 0 \quad (2)$$

Здесь $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$, k – есть коэффициент массопереноса, - критерия взаимосвязи между тепло и массопереносами, а TF - критерия температурной разности. Эту систему уравнений, можно привести к системе двух несвязанных уравнений типа теплопроводности, где роль потенциалов будет играть некоторые комбинированные переменные z_i , являющиеся линейной комбинацией u и v .

$$z_i = p_i u + q_i v,$$

p_i и q_i - некие постоянные числа.

Определим из уравнения (1) u_{xx} и подставим ее в (2), тогда получим:

$$u_{xx} = u_t + kv_t, \quad v_{xx} = TFu_t + \left(\frac{1}{R_u} + kTF \right) v_t$$

Умножая первое уравнение на некоторую постоянную p , а второе на q и после почленного сложения будем иметь:

$$p u_{xx} + q v_{xx} = p u_t + q TF u_t + \left[pk + q \left(\frac{1}{R_u} + kTF \right) \right] v_t \quad (3)$$

Уравнение (3) примет форму уравнения теплопроводности относительно $z = pu + qv$ при условии, что

$$\frac{p + qTF}{p} = \frac{pk + q\left(\frac{1}{R_u} + kTF\right)}{q} = a^2 \quad (4)$$

Из (4) следует, что, предварительно исключив p и q , то для a^2 получится следующее уравнение:

$$a^4 - \left(1 + kTF + \frac{1}{R_u}\right)a^2 + \frac{1}{R_u} = 0$$

т.е.

$$a_i = \left[\left(1 + kTF + \frac{1}{R_u}\right) + (-1)^i \sqrt{\left(1 + kTF + \frac{1}{R_u}\right)^2 - \frac{4}{R_u}} \right] \quad (5)$$

$i = 1, 2$

Поэтому, каждому значению a_i будут отвечать свои значения p_i и q_i .

Следовательно, систему уравнений (1)-(2) с учетом (3)-(5) можно переписать так:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial t} = \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}, & x \in (0,1), t > 0 \\ \frac{\partial z_2}{\partial t} = \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}, & x \in (0,1), t > 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$z_i = p_i u(x,t) + q_i v(x,t), \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

где $\frac{1}{a_i^2}$ ($i = 1, 2$) приобретает физический

смысл коэффициента температуропроводности или диффузии. Граничные условия рассматриваемой нами задачи имеют вид:

$$-u_x(1,t) + KQ(t) - KM(t) = 0 \quad (8)$$

$$-v_x(1,t) + TFu_x(1,t) + KM(t) = 0 \quad (9)$$

$$u(x,0) = F_1(x), v(x,0) = F_2(x) \quad (10)$$

$$u_x(0,t) = v_x(0,t) = 0 \quad (11)$$

$KQ(t)$ и $KM(t)$ есть критерии тепло и массопереноса соответственно.

В результате преобразования взаимосвязанной системы уравнений (1)-(2) и граничных условий (8)-(11), с учетом новой переменной

$$z_i(x,t) = p_i u(x,t) + q_i v(x,t),$$

мы получили два несвязанных уравнения типа теплопроводности. Первое ($i = 1$) и второе ($i = 2$) уравнения вместе с соответствующими им граничными условиями будут выглядеть окончательно так:

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = \frac{1}{a_i^2} \frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2} \quad (12)$$

$$z_i(x,0) = \Phi_i(x) \quad (13)$$

$$\frac{\partial z_i(0,t)}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial Z_i(1,t)}{\partial x} = (p_i + q_i TF)KQ(t) - [p_i - q_i(1 - TF)]KM(t) \quad (15)$$

где p_i и q_i ($i = 1, 2$) определяются соотношениями (7).

Эта система уравнений с учетом (7) дает нам ответ на поставленный вопрос т.е.

$$\begin{cases} u(x,t) = -\frac{a_1^2 - 1}{a_1^2 - a_2^2} \times \\ \times \left[\phi_1(x,t) - \frac{a_1^2 - 1}{TF} \phi_2(x,t) \right] \\ v(x,t) = \frac{a_2^2 - 1}{a_1^2 - a_2^2} \times \\ \times \left[\frac{TF}{a_1^2 - 1} \phi_1(x,t) - \phi_2(x,t) \right] \end{cases} \quad (16)$$

Исходные дифференциальные уравнения (1)-(2) в процессе преобразования приобретают в некотором роде сходство с уравнениями выражающими два связанных колебания, поэтому физическая интерпретация их решений (16) заключается в том, что каждая температурная волна сопровождается диффузионной волной, идущей с той же скоростью, величина которой пропорциональна температурной волне. Зависимость между этими волнами определяется только свойствами среды. Подобным же образом происходит обратное, т.е. диффузионная волна сопровождается дополнительной температурной волной.

Литература

1. А.В. Лыков, Ю.А. Михайлов. Теория тепло и массопереноса. Москва-Ленинград, Госэнергоиздат, 1963, 535 стр.
2. Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова Численные методы анализа, Москва, Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963, 400 стр.

UOT 517.95

A.V. Tağıyev, Ə.M. Əliyev,
M. H. Həsənov

İstilik paylanması və diffuziya
prosesi probleminin tədqiq edilməsi

ANNOTASIYA

Bu məqalə istilik paylanması və diffuziya prosesinin tədqiqi zamanı yaranan problemin həllinə həsr edilmişdir. İstilik paylanması və kütlə ötürülməsi hadisələrinin analitik nəzəriyyəsinə və dönməz termodinamika

proseslərinə əsaslanaraq istilik və maddənin ötürülməsi hadisələrini təsvir edən xüsusi törəməli diferensial tənliklər sistemi çıxarılmışdır. Sonlu integral çevirmələri üsulunun köməyi ilə ən sadə cisimlər (nazik təbəqə, silindir və kürə) üçün ikinci və üçüncü növ sərhəd şərtləri daxilində həllər alınmışdır. Alınan həllər qaz və molekulyar qarışıqları, qurutma, qazlaşdırma, yanma və s. termal diffuziya proseslərini hesablamaq üçün istifadə edilə bilər.

UDK 517.95

A.V. Tağıyev, A.M. Aliyev,
M.H. Hasanov

The study of the problem of heat
distribution and diffusion process

ABSTRACT

This paper is devoted to the study of the solution of the problem of heat distribution and the diffusion process. The system of differential equations of heat and mass transfer is derived on the basis of the analytical theory of the phenomena of heat and substance transfer and the thermodynamics of irreversible processes.

The methods of finite integral transformations are obtained solutions for the simplest bodies. The solutions obtained can be used to calculate the processes of thermal diffusion in gas mixtures and molecular solutions, drying, gasification, combustion, etc.

Məqaləyə BDU-nun Tətbiqi Riyaziyyat
ET İnstitutunun şöbə müdürü, texnika üzrə
elmlər doktoru M.M. Mütəllibov rəy
vermişdir.