

Алтайский Государственный Технический Университет,
Алтайский край, Россия, asm960@mail.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ АНАЛОГ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА ДЛЯ ОДНОГО СЛУЧАЯ МЕРЫ ПОЛЗУЧЕСТИ

Аннотация. Согласно исследованиям, проведенным по ползучести бетона установлено, что нелинейные длительные процессы, проходящие в бетоне наиболее сильно влияют на формирование напряженно-деформированного состояния и несущую способность. Как известно все применяемые при расчете железобетонных конструкций феноменологические теории и наиболее достоверные результаты получаются с применением для бетона нелинейно наследственной теории. Во многих вариантах этой теории нелинейность деформирования бетона соотносят к её длительному деформированию. Согласно проведенным исследованиям, нелинейность упруго-мгновенных деформаций также сильно влияет на формирование напряженно деформированного состояния. Первые исследования в области ползучести бетона с учетом нелинейности упруго мгновенных деформаций были проведены В.М. Бондаренко [1; 2] и он записал интегральное уравнение ползучести бетона в следующем виде

$$\varepsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E_b(t)} \cdot \left[1 + \eta_1 \cdot \left(\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right)^{m_1} \right] - \int_0^t \sigma_b(\tau) \cdot \left[1 + \eta_2 \cdot \left(\frac{\sigma_b(\tau)}{R_b(\tau)} \right)^{m_2} \right] \cdot \frac{\partial C^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (1)$$

Исследования, проведенные в своё время И.И. Улицким и И.Е. Прокоповичем [3] показали, что для стареющего бетона меру ползучести бетона при сжатии можно

аппроксимировать нижеследующим выражением:

$$C(t, \tau) = (C_0 + A_1 \cdot e^{-\gamma \tau}) \cdot (1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) \quad (2)$$

Так как данное выражение выраженного типа, основное интегральное уравнение деформирования (1) может быть представлено в адекватной дифференциальной форме. При решении многих практических задач дифференциальная форма записи оказывается более удобной и позволяет использовать стандартные программы, имеющиеся в математическом обеспечении современных вычислительных средств. В статье приводится дифференциальная форма записи уравнения (1) при ядре ползучести (2).

Ключевые слова: бетон, ползучесть, релаксация, напряжение, деформация.

Вводя обозначения для функций нелинейности мгновенного и длительного

деформирования $\Phi_1 = 1 + \eta_1 \cdot \left(\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right)^{m_1}$ и

$\Phi_2 = 1 + \eta_2 \cdot \left(\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right)^{m_2}$ и с учетом того, что

согласно С.В. Александровскому [4]

$$C^*(t, \tau) = \frac{1}{E_b(\tau)} - \frac{1}{E_b(t)} + C(t, \tau) = \frac{1}{E_b(\tau)} - \frac{1}{E_b(t)} + (C_0 + A_1 \cdot e^{-\gamma \tau}) \cdot (1 - e^{-\gamma(t-\tau)})$$

$$\frac{C^*(t, \tau)}{t} = \frac{\dot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} -$$

$$-\gamma \cdot A_1 \cdot e^{-\gamma \tau} - \gamma \cdot C_0 \cdot e^{-\gamma \tau} \cdot e^{\gamma t}$$

и

перепишем основное интегральное уравнение в следующей компактной форме:

$$\varepsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_1 + Y_1(t) + Y_2(t), \quad (3)$$

где введены обозначения для интегральных слагаемых:

$$Y_1(t) = \int_{t_0}^t \left[\frac{\dot{\varepsilon}_b(\tau)}{E_b^2(\tau)} + \gamma \cdot A_1 \cdot e^{-\gamma\tau} \right] \cdot \sigma_b(\tau) \cdot \Phi_2 d\tau$$

$$Y_2(t) = \gamma \cdot C_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \int_{t_0}^t e^{\gamma\tau} \cdot \sigma_b(\tau) \cdot \Phi_2 d\tau \quad (4)$$

С учетом того, что

$$\dot{Y}_1(t) = \left[\frac{\dot{\varepsilon}_b(t)}{E_b^2(t)} + \gamma \cdot A_1 \cdot e^{-\gamma t} \right] \cdot \sigma_b(t) \cdot \Phi_2$$

$$\dot{Y}_2(t) = -\gamma \cdot Y_2(t) + \gamma \cdot C_0 \cdot \sigma_b(t) \cdot \Phi_2 \quad (5)$$

продифференцируем основное интегральное уравнение ползучести бетона (1), тогда получим

$$\dot{\varepsilon}_b(t) = \frac{\dot{\sigma}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_1 - \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} \cdot \Phi_1 + \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1\sigma} + \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{R}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1R} + \left[\frac{\dot{\varepsilon}_b(t)}{E_b^2(t)} + \gamma \cdot A_1 \cdot e^{-\gamma t} \right] \cdot \sigma_b(t) \cdot \Phi_2 + \gamma \cdot C_0 \cdot \sigma_b(t) \cdot \Phi_2 - \gamma \cdot Y_2(t) \quad (6)$$

Введем обозначение для известных функций

$$\beta(t) = \frac{\dot{\varepsilon}_b(t)}{E_b^2(t)} + \gamma \cdot A_1 \cdot e^{-\gamma t} + \gamma \cdot C_0 \quad (7)$$

С учетом (7) продифференцируем еще раз по времени (6)

$$\ddot{\varepsilon}_b(t) = \frac{\ddot{\sigma}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_1 - \frac{2\dot{\sigma}_b(t) \cdot \dot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} \cdot \Phi_1 + \frac{2\dot{\sigma}_b^2(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1\sigma} + \frac{2\dot{\sigma}_b(t) \cdot \dot{R}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1R} - \frac{\sigma_b(t) \cdot \ddot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} \cdot \Phi_1 + \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{E}_b^2(t)}{E_b^3(t)} \cdot \Phi_1 -$$

$$- \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t) \cdot \dot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} \cdot \Phi_{1\sigma} - \frac{2\sigma_b(t) \cdot \dot{E}_b(t) \cdot \dot{R}_b(t)}{E_b^2(t)} \cdot \Phi_{1R} + \frac{\sigma_b(t) \cdot \ddot{\sigma}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1\sigma} + \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{\sigma}_b^2(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1\sigma\sigma} + \frac{2\sigma_b(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t) \cdot \dot{R}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1\sigma R} + \frac{\sigma_b(t) \cdot \ddot{R}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1R} + \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{R}_b^2(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1RR} + (8)$$

$$+ [\beta'(t) - \gamma \cdot C_0] \cdot \sigma_b(t) \cdot \Phi_2 + \beta(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t) \cdot \Phi_2 + \beta(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t) \cdot \Phi_2 + \beta(t) \cdot \sigma_b(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t) \cdot \Phi_{2\sigma} + \beta(t) \cdot \sigma_b(t) \cdot \dot{R}_b(t) \cdot \Phi_{2R} + \gamma^2 \cdot Y_2(t)$$

Теперь для того, чтобы исключить интегральный член, умножим обе части равенства (6) на γ и сложим почленно с (8), тогда получим

$$\dot{\varepsilon}_b(t) + \gamma \cdot \dot{\varepsilon}_b(t) = \frac{\dot{\sigma}_b(t)}{E_b(t)} \cdot [1 + \sigma_b(t)] + \Phi_{1\sigma} \cdot \gamma \cdot \frac{\dot{\sigma}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_1 - \gamma \cdot \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} \cdot \Phi_1 + \gamma \cdot \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1\sigma} + \gamma \cdot \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{R}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1R} - \frac{2\dot{\sigma}_b(t) \cdot \dot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} \cdot \Phi_1 + \frac{2\dot{\sigma}_b^2(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1\sigma} + \frac{2\dot{\sigma}_b(t) \cdot \dot{R}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1R} - \frac{\sigma_b(t) \cdot \ddot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} \cdot \Phi_1 + \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{E}_b^2(t)}{E_b^3(t)} \cdot \Phi_1 - \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t) \cdot \dot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} \cdot \Phi_{1\sigma} - \frac{2\sigma_b(t) \cdot \dot{E}_b(t) \cdot \dot{R}_b(t)}{E_b^2(t)} \cdot \Phi_{1R} + \frac{\sigma_b(t) \cdot \ddot{\sigma}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1\sigma} + \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{\sigma}_b^2(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1\sigma\sigma} +$$

$$+ \frac{2\sigma_b(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t) \cdot \dot{R}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1\sigma R} + \frac{\sigma_b(t) \cdot \ddot{R}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1R} + \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{R}_b^2(t)}{E_b(t)} \cdot \Phi_{1RR} + [\beta'(t) + \gamma\beta(t) - \gamma \cdot C_0] \cdot \sigma_b(t) \cdot \Phi_2 + \beta(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t) \cdot \Phi_2 + \beta(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t) \cdot \Phi_2 + \beta(t) \cdot \sigma_b(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t) \cdot \Phi_{2\sigma} + \beta(t) \cdot \sigma_b(t) \cdot \dot{R}_b(t) \cdot \Phi_{2R} \quad (9)$$

Это дифференциальное уравнение при $t = t_0$ должно удовлетворять следующим начальным условиям

$$\varepsilon_b(t_0) = \frac{\sigma_b(t_0)}{E_b(t_0)};$$

$$\dot{\varepsilon}_b(t_0) = \frac{\dot{\sigma}_b(t_0)}{E_b(t_0)} \cdot \Phi_1 - \frac{\sigma_b(t_0) \cdot \dot{E}_b(t_0)}{E_b^2(t_0)} \cdot \Phi_1 + \frac{\sigma_b(t_0) \cdot \dot{\sigma}_b(t_0)}{E_b(t_0)} \cdot \Phi_{1\sigma} + \frac{\sigma_b(t_0) \cdot \dot{R}_b(t_0)}{E_b(t_0)} \cdot \Phi_{1R} + \beta(t_0) \cdot \sigma_b(t_0) \cdot \Phi_2 \quad (10)$$

Производные, входящие в выприведенные выражения, раскрываются следующим образом:

$$\Phi_{1\sigma} = \eta_1 \cdot m_1 \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_1-1} \cdot \frac{1}{R_b(t)};$$

$$\Phi_{1R} = -\eta_1 \cdot m_1 \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_1} \cdot \frac{1}{R_b(t)}$$

$$\Phi_{1\sigma\sigma} = \eta_1 \cdot m_1 \cdot (m_1 - 1) \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_1-2} \cdot \frac{1}{R_b^2(t)};$$

$$\Phi_{1\sigma R} = -\eta_1 \cdot m_1^2 \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_1-1} \cdot \frac{1}{R_b^2(t)}$$

$$\Phi_{1RR} = \eta_1 \cdot m_1 \cdot (m_1 + 1) \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_1} \cdot \frac{1}{R_b^2(t)};$$

$$\Phi_{2\sigma} = \eta_2 \cdot m_2 \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_2-1} \cdot \frac{1}{R_b(t)}$$

$$\Phi_{2R} = -\eta_2 \cdot m_2 \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_2} \cdot \frac{1}{R_b(t)} \quad (11)$$

С учетом этого, основное дифференциальное уравнение нелинейно наследственной ползучести можно представить в следующем раскрытом виде

$$\ddot{\varepsilon}_b(t) + \gamma \cdot \dot{\varepsilon}_b(t) = \frac{\dot{\sigma}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \left[1 + \eta_1 \cdot m_1 \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_1} + \bar{\Omega}_1(\sigma_b(t), \dot{\sigma}_b(t), t) \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_1} + \bar{\Omega}_2(\sigma_b(t), \dot{\sigma}_b(t), t) \cdot \left[1 + \eta_1 \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_1} + \bar{\Omega}_2(\sigma_b(t), \dot{\sigma}_b(t), t) \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_1-1} - \bar{\Omega}_2(\sigma_b(t), \dot{\sigma}_b(t), t) \cdot \frac{\eta_1 \cdot m_1}{R_b(t)} \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_1} + \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{\sigma}_b^2(t)}{E_b(t)} \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_1-2} - \frac{\eta_1 \cdot m_1 \cdot (m_1 - 1)}{R_b^2(t)} \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_1-2} - \frac{2\sigma_b(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t) \cdot \dot{R}_b(t)}{E_b(t)} \cdot \frac{\eta_1 \cdot m_1^2}{R_b^2(t)} \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_1-1} + \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{R}_b^2(t)}{E_b(t)} \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_1} + \frac{\eta_1 \cdot m_1 \cdot (m_1 + 1)}{R_b^2(t)} \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_1} + \bar{\Omega}_2(\sigma_b(t), \dot{\sigma}_b(t), t) \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_1} + \beta(t) \cdot \sigma_b(t) \cdot \left[1 + \eta_2 \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_2} \right] + \beta(t) \cdot \sigma_b(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t) \cdot \frac{\eta_2 \cdot m_2}{R_b(t)} \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_2-1} - \beta(t) \cdot \sigma_b(t) \cdot \dot{R}_b(t) \cdot \frac{\eta_2 \cdot m_2}{R_b(t)} \cdot \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right]^{m_2} \right] \quad (12)$$

Здесь введены обозначения:

$$\bar{\Omega}_1(\sigma_b(t), \dot{\sigma}_b(t), t) = \gamma \cdot \frac{\dot{\sigma}_b(t)}{E_b(t)} - \gamma \cdot \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} - \frac{2\dot{\sigma}_b(t) \cdot \dot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} - \frac{\sigma_b(t) \cdot \ddot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} + \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{E}_b^2(t)}{E_b^3(t)}$$

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}_2(\sigma_b(t), \dot{\sigma}_b(t), t) &= \gamma \cdot \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t)}{E_b(t)} + \\ &+ \frac{2\dot{\sigma}_b^2(t)}{E_b(t)} - \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t) \cdot \dot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} \\ \overline{\Omega}_2(\sigma_b(t), \dot{\sigma}_b(t), t) &= \gamma \cdot \frac{\sigma_b(t) \cdot \dot{R}_b(t)}{E_b(t)} + \\ &+ \frac{2\dot{\sigma}_b(t) \cdot \dot{R}_b(t)}{E_b(t)} - \frac{2\sigma_b(t) \cdot \dot{E}_b(t) \cdot \dot{R}_b(t)}{E_b^2(t)} + \\ &+ \frac{\sigma_b(t) \cdot \ddot{R}_b(t)}{E_b(t)} \\ \overline{\Omega}_2(\sigma_b(t), \dot{\sigma}_b(t), E_b(t), \dot{E}_b(t), t) &= \\ &= [\beta'(t) + \gamma \cdot \beta(t) - \gamma \cdot C_0] \cdot \\ &\cdot \sigma_b(t) + \beta(t) \cdot \dot{\sigma}_b(t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

При этом начальные условия в раскрытом виде записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b(t_0) &= \frac{\sigma_b(t_0)}{E_b(t_0)}; \\ \dot{\varepsilon}_b(t_0) &= \frac{\dot{\sigma}_b(t_0)}{E_b(t_0)} \cdot \left[1 + \eta_1 \cdot \left[\frac{\sigma_b(t_0)}{R_b(t_0)} \right]^{m_1} \right] - \\ &- \frac{\sigma_b(t_0) \cdot \dot{E}_b(t_0)}{E_b^2(t_0)} \cdot \left[1 + \eta_1 \cdot \left[\frac{\sigma_b(t_0)}{R_b(t_0)} \right]^{m_1} \right] + \\ &+ \frac{\sigma_b(t_0) \cdot \dot{\sigma}_b(t_0)}{E_b(t_0)} \cdot \eta_1 \cdot m_1 \cdot \left[\frac{\sigma_b(t_0)}{R_b(t_0)} \right]^{m_1-1} \cdot (13) \\ &\cdot \frac{1}{R_b(t_0)} - \frac{\sigma_b(t_0) \cdot \dot{R}_b(t_0)}{E_b(t_0)} \cdot \eta_1 \cdot m_1 \cdot \left[\frac{\sigma_b(t_0)}{R_b(t_0)} \right]^{m_1} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{R_b(t_0)} + \beta(t_0) \cdot \sigma_b(t_0) \cdot \left[1 + \eta_2 \cdot \left[\frac{\sigma_b(t_0)}{R_b(t_0)} \right]^{m_2} \right] \end{aligned}$$

Покажем применение полученной дифференциальной формы записи интегрального уравнения при решении задач релаксации. Введя обозначения $x_1(t) = \sigma_b(t)$ и $x_2(t) = \dot{\sigma}_b(t)$ дифференциальное уравнение релаксации представим в следующей нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = f(x_1(t), x_2(t), t) \end{cases} \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(x_1(t), x_2(t), t) &= \frac{x_2^2(t)}{E_b(t)} \cdot \left[1 + \eta_1 \cdot \left(\frac{x_1(t)}{R_b(t)} \right)^{m_1} \right] + \\ &+ \left(\frac{\gamma}{E_b(t)} - \frac{2\dot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} \right) \cdot x_2(t) \cdot \left[1 + \eta_1 \cdot (m_1 + 1) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left(\frac{x_1(t)}{R_b(t)} \right)^{m_1} \right] + \left(\frac{2\dot{E}_b(t) \cdot R_b(t)}{E_b(t) \cdot R_b(t)} - \gamma \cdot \frac{\dot{R}_b(t)}{E_b(t)} \right) \cdot \\ &\cdot \eta_1 \cdot m_1 \cdot \left(\frac{x_1(t)}{R_b(t)} \right)^{m_1-1} - \frac{2\dot{R}_b(t)}{E_b(t) \cdot R_b(t)} \cdot \\ &\cdot x_2(t) \cdot \eta_1 \cdot m_1 \cdot (m_1 + 1) \cdot \left(\frac{x_1(t)}{R_b(t)} \right)^{m_1} + \\ &+ \left(\frac{2\dot{E}_b^2(t)}{E_b^3(t)} - \frac{\dot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} - \gamma \cdot \frac{\dot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} \right) \cdot x_1(t) \cdot \\ &\cdot \left[1 + \eta_1 \cdot \left(\frac{x_1(t)}{R_b(t)} \right)^{m_1} \right] + \frac{\dot{R}_b^2(t)}{E_b(t) \cdot R_b(t)} \cdot \\ &\cdot \eta_1 \cdot m_1 \cdot (m_1 + 1) \cdot \left(\frac{x_1(t)}{R_b(t)} \right)^{m_1-1} + \\ &+ \left(\frac{\dot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} + A \cdot \gamma \cdot e^{-\gamma t} + C_0 \cdot \gamma \right) \cdot x_2(t) \cdot \\ &\cdot \left[1 + \eta_2 \cdot (m_2 + 1) \cdot \left(\frac{x_1(t)}{R_b(t)} \right)^{m_2} \right] + \\ &+ \left(\gamma \cdot \frac{\dot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} + \frac{\ddot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} - \frac{2\dot{E}_b^2(t)}{E_b^3(t)} \right) \cdot \\ &\cdot x_1(t) \cdot \left[1 + \eta_2 \cdot \left(\frac{x_1(t)}{R_b(t)} \right)^{m_2} \right] - \\ &- \left(\frac{\dot{E}_b(t)}{E_b^2(t)} + A \cdot \gamma \cdot e^{-\gamma t} + C_0 \cdot \gamma \right) \cdot \\ &\cdot \dot{R}_b(t) \cdot \eta_2 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{x_1(t)}{R_b(t)} \right)^{m_2-1} \\ f(x_1(t), x_2(t), t) &= - \frac{E_b(t) \cdot f(x_1(t), x_2(t), t)}{1 + \eta_1 \cdot (m_1 + 1) \cdot \left(\frac{x_1(t)}{R_b(t)} \right)^{m_1}} \end{aligned}$$

При этом начальные условия при $t = t_0$ записываются в виде

$$\varepsilon_b(t_0) = \frac{x_1(t_0)}{E_b(t_0)} \cdot \left[1 + \eta_1 \cdot \left(\frac{x_1(t_0)}{R_b(t_0)} \right)^{m_1} \right];$$

$$\begin{aligned} x_2(t_0) &= \frac{E_b(t_0)}{1 + \eta_1 \cdot (m_1 + 1) \cdot \left(\frac{x_1(t_0)}{R_b(t_0)} \right)^{m_1}} \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{\dot{E}_b(t_0)}{E_b^2(t_0)} \cdot x_1(t_0) \cdot \left[1 + \eta_1 \cdot \left(\frac{x_1(t_0)}{R_b(t_0)} \right)^{m_1} \right] + \right. \\ &+ \dot{\varepsilon}_b(t_0) + \frac{\dot{R}_b(t_0)}{E_b(t_0)} \cdot \eta_1 \cdot m_1 \cdot \left(\frac{x_1(t_0)}{R_b(t_0)} \right)^{m_1-1} - \\ &- \left(\frac{\dot{E}_b(t_0)}{E_b^2(t_0)} + A \cdot \gamma \cdot e^{-\gamma t_0} + C_0 \cdot \gamma \right) \cdot \\ &\cdot x_1(t_0) \cdot \left[1 + \eta_2 \cdot \left(\frac{x_1(t_0)}{R_b(t_0)} \right)^{m_2} \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

Применив к полученной нормальной системе одношаговый численный метод Рунге-Кутты четвертого порядка [5], можем записать

$$\begin{aligned} k_{11} &= x_2(t_0) \cdot \Delta t; \\ k_{21} &= f(x_1(t_0), x_2(t_0), t_0) \cdot \Delta t; \\ k_{12} &= (x_2(t_0) + 0.5 \cdot k_{21}) \cdot \Delta t; \\ k_{22} &= f(x_1(t_0) + 0.5 \cdot k_{11}, x_2(t_0) + \\ &+ 0.5 \cdot k_{21}, t_0 + 0.5 \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Релаксирующие напряжения, коэффициент релаксации, скорость релаксирующих напряжений.

Общий случай релаксации $R_b(t) = R_b = 17 \text{ МПа} = \text{const};$ $E_b(t) = E_b \cdot (1 - \beta \cdot \exp(-\alpha \cdot t));$ $E_b = 32.5 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \gamma = 0.014 \text{ с}^{-1};$ $\beta = 0.85; \eta_1 = 1.30; \eta_2 = 1.60;$ $A = 4.3443 \cdot 10^{-5} (\text{МПа})^{-1};$ $C_0 = 2.9274 \cdot 10^{-5} (\text{МПа})^{-1}; m_1' = 4.3;$ $m_2 = 4.0; \Delta t = 5 \text{ с} \text{ ум}$				Случай, когда модуль деформации $E_b = 32.5 \cdot 10^3 \text{ МПа} = \text{const};$ $R_b(t) = R_b = 17 \text{ МПа} = \text{const};$ $E_b = 32.5 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \gamma = 0.014 \text{ с}^{-1};$ $\beta = 0.85; \eta_1 = 1.30;$ $A = 4.3443 \cdot 10^{-5} (\text{МПа})^{-1}; \eta_2 = 1.60;$ $C_0 = 2.9274 \cdot 10^{-5} (\text{МПа})^{-1};$ $m_1 = 4.3; m_2 = 4.0; \Delta t = 5 \text{ с} \text{ ум}$			
$t, \text{ с} \text{ ум}$	$\sigma_b(t), \text{ МПа}$	$\dot{\sigma}_b(t), \frac{\text{МПа}}{\text{с} \text{ ум}}$	$\rho_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{\sigma_b(t_0)}$	$t, \text{ с} \text{ ум}$	$\sigma_b(t), \text{ МПа}$	$\dot{\sigma}_b(t), \frac{\text{МПа}}{\text{с} \text{ ум}}$	$\rho_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{\sigma_b(t_0)}$
14	13.6	-0.12	1.0	14	13.6	-0.09	1.0
19	13.001	-0.1235	0.9559	19	13.1464	-0.0875	0.9666
24	12.365	-0.1305	0.9092	24	12.7237	-0.0817	0.9356
29	11.697	-0.1367	0.8601	29	12.3284	-0.0766	0.9065
34	11.000	-0.1416	0.8088	34	11.9567	-0.0722	0.8792

По методике Рунге-Кутта в следующей точке сетки интегрирования значение функции вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} x_1(t_0 + \Delta t) &= x_1(t_0) + \\ &+ \frac{1}{6} \cdot (k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14}); \\ x_2(t_0 + \Delta t) &= x_2(t_0) + \\ &+ \frac{1}{6} \cdot (k_{21} + 2k_{22} + 2k_{23} + k_{24}). \end{aligned}$$

Затем, принимая $t_0 = t_0 + \Delta t$, $x_1(t_0) = x_1(t_0 + \Delta t)$ и $x_2(t_0) = x_2(t_0 + \Delta t)$ повторяется расчет. При применении данного метода шаг интегрирования можно изменить при переходе от одной точки к другой.

По данному алгоритму на алгоритмическом языке Turbo Pascal ABC составлена программа и рассмотрен численный пример, результаты которого представлены в следующей таблице.

Таблица.

39	10.283	-0.1449	0.7561	39	11.6056	-0.0684	0.8534
44	9.555	-0.1459	0.7026	44	11.2721	-0.0651	0.8288
49	8.828	-0.1443	0.6492	49	10.9537	-0.0623	0.8054
54	8.116	-0.1401	0.5968	54	10.6480	-0.0600	0.7829
59	7.432	-0.1333	0.5465	59	10.3530	-0.0580	0.7613
64	6.786	-0.1248	0.4990	64	10.0671	-0.0564	0.7402
69	6.185	-0.1153	0.4548	69	9.7888	-0.0550	0.7198
74	5.634	-0.1054	0.4142	74	9.5169	-0.0538	0.6998
79	5.131	-0.0957	0.3773	79	9.2505	-0.0528	0.6802
84	4.675	-0.0866	0.3438	84	8.9886	-0.0520	0.6609
89	4.264	-0.0782	0.3135	89	8.7307	-0.0512	0.6420
94	3.892	-0.0705	0.2862	94	8.4764	-0.0505	0.6233
99	3.557	-0.0636	0.2616	99	8.2253	-0.0499	0.6048
104	3.255	-0.0574	0.2394	104	7.9773	-0.0493	0.5866
109	2.983	-0.0518	0.2193	109	7.7322	-0.0487	0.5685
114	2.736	-0.0469	0.2012	114	7.4900	-0.0481	0.5507
119	2.513	-0.0425	0.1847	119	7.2509	-0.0475	0.5332
124	2.310	-0.0386	0.1699	124	7.0149	-0.0469	0.5158
129	2.126	-0.0350	0.1563	129	6.7823	-0.0462	0.4987
134	1.959	-0.0319	0.1441	134	6.5530	-0.0455	0.4818

Случай, когда модуль деформации меняется во времени, мгновенное деформирование линейно, а длительное нелинейно

$$R_b(t) = R_b = 17 \text{ MPa} = \text{const};$$

$$E_b = 32,5 \cdot 10^3 \text{ MPa} = \text{const};$$

$$\gamma = 0,014 \text{ cym}^{-1}; \eta_1 = 0;$$

$$A = 4,3443 \cdot 10^{-5} (\text{MPa})^{-1}; \eta_2 = 0;$$

$$C_0 = 2,9274 \cdot 10^{-5} (\text{MPa})^{-1}; m_1 = 4,3;$$

$$m_2 = 4,0; \Delta t = 5 \text{ cym}$$

Случай, когда модуль деформации меняется во времени, мгновенное и длительное деформирование линейны

$$E_b = 32,5 \cdot 10^3 \text{ MPa} = \text{const};$$

$$E_b = 32,5 \cdot 10^3 \text{ MPa}; \gamma = 0,014 \text{ cym}^{-1};$$

$$\beta = 0,85; \alpha = 0,04; \eta_1 = 0;$$

$$A = 4,3443 \cdot 10^{-5} (\text{MPa})^{-1}; \eta_2 = 0;$$

$$C_0 = 2,9274 \cdot 10^{-5} (\text{MPa})^{-1}; m_1 = 4,3;$$

$$m_2 = 4,0; \Delta t = 5 \text{ cym}$$

$t, \text{ cym}$	$\sigma_b(t), \text{ MPa}$	$\dot{\sigma}_b(t), \frac{\text{MPa}}{\text{cym}}$	$\rho_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{\sigma_b(t_0)}$	$t, \text{ cym}$	$\sigma_b(t), \text{ MPa}$	$\dot{\sigma}_b(t), \frac{\text{MPa}}{\text{cym}}$	$\rho_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{\sigma_b(t_0)}$
14	13.6	-0.06	1.0	14	13.6	-0.09	1.0
19	13.313	-0.0578	0.9789	19	12.5395	-0.2151	0.9220
24	13.022	-0.0588	0.9575	24	11.4674	-0.2123	0.8432
29	12.725	-0.0599	0.9357	29	10.4279	-0.2026	0.7668
34	12.422	-0.0611	0.9134	34	9.4475	-0.1891	0.6947
39	12.114	-0.0624	0.8907	39	8.5399	-0.1738	0.6279
44	11.799	-0.0636	0.8675	44	7.7107	-0.1580	0.5670
49	11.477	-0.0649	0.8439	49	6.9596	-0.1426	0.5117
54	11.149	-0.0662	0.8198	54	6.2833	-0.1281	0.4620
59	10.816	-0.0673	0.7953	59	5.6768	-0.1147	0.4174
64	10.476	-0.0684	0.7703	64	5.1340	-0.1026	0.3775
69	10.132	-0.0692	0.7450	69	4.6488	-0.0917	0.3418
74	9.784	-0.0699	0.7194	74	4.2152	-0.0819	0.3099
79	9.434	-0.0703	0.6937	79	3.8276	-0.0733	0.2814
84	9.082	-0.0704	0.6678	84	3.4808	-0.0656	0.2559

89	8.731	-0.0701	0.6420	89	3.1702	-0.0588	0.2331
94	8.382	-0.0695	0.6163	94	2.8915	-0.0528	0.2126
99	8.037	-0.0685	0.5909	99	2.6412	-0.0475	0.1942
104	7.697	-0.0673	0.5659	104	2.4160	-0.0427	0.1776
109	7.364	-0.0657	0.5415	109	2.2129	-0.0386	0.1627
114	7.040	-0.0639	0.5177	114	2.0296	-0.0349	0.1492
119	6.726	-0.0619	0.4945	119	1.8637	-0.0316	0.1370
124	6.421	-0.0598	0.4722	124	1.7134	-0.0286	0.1260
129	6.128	-0.0576	0.4506	129	1.5770	-0.0260	0.1160
134	5.846	-0.0553	0.4298	134	1.4529	-0.0237	0.1068
139	5.575	-0.0530	0.4099	139	1.3400	-0.0216	0.0985

Литература

- Бондаренко В.М., Бондаренко С.В. Инженерные методы нелинейной теории железобетона. М., Стройиздат, 1982. -287 с.
- Бондаренко С.В. Теория сопротивления конструкций режимным нагружениям. М., Стройиздат, 1984. - 392с.
- Прокопович И.Е., Зедгенидзе В.А. Прикладная теория ползучести. М., Стройиздат, 1980. - 240 с.
- Александровский С.В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры и влажности с учетом ползучести бетона [Текст] /С.В. Александровский. -М.; Научно-исследов., проект.- конструктор. и технол. ин-т бетона и железобетона (НИИЖБ), 2004. - 712 с.
- Гаджиев М.А., Алаева С.М. Напряжённо деформированное состояние и несущая способность сжатых железобетонных элементов с учётом нелинейно наследственной ползучести бетона [Текст] // Строительство и архитектура в Азербайджане. - 2017. №4. - С. 23-34.

UDC 624.072

S.M. Alayeva

Altai State Technical University
After I.I. Polzunov

Abstract: According to research conducted on the creep of concrete, it has been established that nonlinear long-term processes taking place in concrete mostly influence the formation of the stress-strain state and the load bearing capacity of the concrete. As is well known, all phenomenological theories used in the calculation of reinforced concrete structures and the most reliable results are obtained using nonlinear hereditary theory for concrete. In many variants of this theory, the non-linearity of concrete deformation is correlated to its long-term deformation. According to the research, the nonlinearity of elastic-instantaneous deformations also strongly influences the formation of the stress-strain state. The first studies in the field of concrete creep taking into account the nonlinearity of elastic instantaneous deformations were carried out by V.M. Bondarenko [1, 2] and he's recorded the integral equation of concrete creep in the following form

$$\sigma_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E_b(t)} \cdot \left[1 + \eta_1 \cdot \left(\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right)^{m_1} \right] - \int_{t_0}^t \sigma_b(t) \cdot \left[1 + \eta_2 \cdot \left(\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)} \right)^{m_2} \right] \cdot \frac{\partial C^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (1)$$

Studies conducted by I.I. Ulitsky and I.E. Prokopovich [3] Indicated that for aging concrete, the measure of concrete creep under compression can be approximated by the following expression:

$$C(t, \tau) = (C_0 + A_1 \cdot e^{-\tau/\tau_1}) \cdot (1 - e^{-t/\tau_2}) \quad (2)$$

Since this expression is of the degenerate type, the basic integral deformation equation (1) can be represented in an adequate differential form. When solving many practical problems, the differential form of record turns out to be more convenient and allows using standard programs that are available in the software of modern computing facilities.

The article presents the differential form of writing equation (1) with creep core (2)

Keywords: concrete, creep, relaxation, strain, deformation.

*Məqaləyə AzMİU-nun
"İnşaat konstruksiyaları" kafedrasının
professoru M.Hacıyev rəy vermişdir.*