

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В различных областях механики и физики приходится решать смешанные краевые задачи для эллиптических уравнений общего вида (см. напр. [1]). В качестве эффективных численных методов, метод сеток впервые предложен в работе [2], и для погрешности приближенного решения получена оценка $O(h)$, при этом предполагается ограниченность производных до третьего порядка точного решения. Однако такое предположение не охватывает некоторые практически важные случаи, например, в областях с кусочно-гладкими границами, где поведение решения зависит от раствора углов, которые образуют граничные кривые, что имеют места для задач механики разрушения особенно.

При исследовании метода сеток в случае уравнений Лапласа и Пуассона, граничные особенности учитывались во

многих работах, например в [4] полученная оценка является обобщением известного результата финского математика П.Лаасонена, полученного в случае уравнения Лапласа [5].

В работе [3] этот метод исследуется для смешанной краевой задачи в случае нелинейных эллиптических уравнений с учетом особенностей в точках, где изменяется тип граничных условий, оценки для погрешности получены при предположении, что производные точного решения имеют рост $O(r^{-n+\varepsilon})$, где $0 < \varepsilon \leq 1$, n — порядок производных, r — расстояние до особой точки. Однако, существуют задачи где ограниченность этих производных без особых условий не выполняется.

В настоящей работе рассматривается смешанная краевая задача для линейного эллиптического уравнения, нелокальное

условие которой связано со значениями на линиях проходящих через точку смены типа граничных условий. Учитывая особенность точного решения, начиная с первого порядка, оценивается погрешность метода сеток.

Задача А. Пусть область D — прямоугольник $D = \{(x_1, x_2), 0 < x_1 < \ell_1, 0 < x_2 < \ell_2\}$, с границей $\Gamma = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i$, где

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x_1, 0), 0 \leq x_1 < \ell_1\} \cup \\ &\cup \{(0, x_2), 0 < x_2 < \ell_2\} \\ &\cup \{(x_1, \ell_2), 0 < x_1 < \ell_1\}, \\ \Gamma_2 &= \{(\ell_1, x_2), 0 \leq x_2 \leq \ell_2\} \\ \Gamma_3 &= \{(x_1, 0), 0 < x_1 < \ell_1, 0 < \ell < \ell_1 \end{aligned}$$

Рассматривается следующая нелокальная краевая задача:

$$\begin{cases} Lu = \Delta u + au_{x_1} + bu_{x_2} - cu = f & \text{в } D, \\ u = \varphi_1 & \text{на } \Gamma_1, \\ \ell u \equiv u(z) + \alpha(z)u(\ell, x_2) = \varphi_2 & \text{на } \Gamma_2, \\ \partial u / \partial x_2 = \varphi_3 & \text{на } \Gamma_3, \end{cases} \quad (1)$$

где $\varphi_i, i = \overline{1, 3}, a, b, c, f, \alpha$ — заданные функции;

$$z = (\ell_1, x_2), |a|, |b| \leq M < \infty, c \geq 0, |\alpha(z)| \leq 1.$$

Предполагается существование и единственность решения задачи (1), которую решаем методом сеток.

Для производных точного решения задачи (1) вблизи точки $(\ell, 0)$ справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m u(x_1, x_2)}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}} &= O(r^{-m+1/2} + 1), \quad 0 < r \leq r_1 \leq r_0, \\ \text{где} \\ r &= \sqrt{(x_1 - \ell)^2 + x_2^2}, \quad r_0 = \min\{\ell_1, \ell_1 - \ell, \ell_2\} \end{aligned}$$

Построим разностный аналог задачи (1), вводя квадратную сетку с шагом $h > 0$ и аппроксимируя задачу в классе

гладких решений вторым порядком точности.

Далее в окрестности $r \leq r_1$ точки $(\ell, 0)$ введем полярные координаты. Пусть $\theta(r, \varphi)$ такой угол, что

$$\operatorname{tg} \theta(r, \varphi) = \frac{b(r, \cos \varphi, r \sin \varphi)}{a(r, \cos \varphi, r \sin \varphi)}$$

и в указанной окрестности выполняется неравенство

$$0 < \varphi + 2\pi(\varphi + w) - \theta(r, \varphi) < \pi$$

и вводим мажорантную функцию

$$g(x, y) = r^{-2r} [A \sin 2\pi(\varphi + W) - 1]$$

где $0 < r < 1/2, A$ и w достаточно большое и малое положительные числа, соответственно.

Пусть заданные функции еще удовлетворяют таким условиям, что

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &\in C^4(\bar{D}), \text{ где} \\ \bar{D} &= \bar{D} \setminus \{0 \leq r \leq r_1, 0 \leq \varphi \leq \pi\}. \end{aligned}$$

Следуя работам [1, 2], для погрешности метода сеток получена оценка:

$$|\delta| \leq K_1 h^{3v} r^{-v} + K_2 h^2,$$

где $\delta = y - u$; и y — точные решения непрерывной и дискретной задач соответственно, $0 < v \leq 1/2, K_i, i = \overline{1, 2}$ положительные постоянные, не зависящие от h .

Задача В. Пусть D — ступенчатая область с границей $\Gamma = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i$, где

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x_1, \ell_2), 0 < x_1 \leq \ell_1\} \cup \\ &\cup \{(\ell_1, x_2), -\ell_2 \leq x_2 \leq \ell_2\} \cup \\ &\cup \{(x_1 - \ell_2), 0 \leq x_1 < \ell_1\} \cup \\ &\cup \{(\ell, x_2) - \ell_2 \leq x_2 \leq 0\}, \\ \Gamma_2 &= \{(\ell_1, x_2), 0 < x_2 < \ell_2\}, \\ \Gamma_3 &= \{(x_1, 0), 0 < \ell < \ell_3\}. \end{aligned}$$

Рассматривается следующая краевая задача:

$$\begin{cases} Lu = \Delta u + au_{x_1} + bu_{x_2} - cu = f & \text{в } D, \\ u = \varphi_1 & \text{на } \Gamma_1, \\ \ell u \equiv u(z) + \alpha(z)u(\ell, x_2) = \varphi_2 & \text{на } \Gamma_2, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = \varphi_3 & \text{на } \Gamma_3 \end{cases} \quad (2)$$

где $\varphi_i, i = \overline{1, 3}, a, b, c, f, \alpha$ — заданные функции; $z = (\ell_1, x_2), |a|, |b| \leq M < \infty, c \geq 0, |\alpha(z)| \leq 1$. Для производных точного решения задачи (2) вблизи точки $(\ell, 0)$ справедлива оценка [6]:

$$\frac{\partial^m u(x_1, x_2)}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}} = O\left(r^{-m+\frac{1}{3}} + 1\right), \quad 0 < r \leq r_1 < r_0,$$

где

$$r = \sqrt{(x_1 - \ell)^2 + x_2^2}, \quad r_0 = \min\{\ell, \ell - \ell, \ell_2\}$$

Угловые точки Γ будут особыми точками решения $u(x_1, x_2)$ в $D \cup \Gamma$.

Построим разностный аналог задачи (2). Пусть $h = \frac{\ell_1 - \ell}{N_1} = \frac{\ell_2}{N_2}, N_i$ — целые

$i = \overline{1, 2}$.

Вводим сеточную область с помощью прямых:

$$\begin{aligned} x_{1i} &= \ell_1 - ih, \quad x_{2j} = jh, \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \\ N_1 + 1, \dots, N_1^*, \quad j &= 0, 1, \dots, N_2. \end{aligned}$$

N_1^* такое положительное целое число, что $0 \leq \ell_1 - N_1^* h = \delta < h$.

Определим

$$\begin{aligned} D_h &= \{(x_{1i}, x_{2j}) : (x_{1i} \pm h, x_{2j} \pm h) \in \bar{D}\}, \\ \Gamma_{\partial h} &= \{(x_{1i}, x_{2j}) : (x_{1i}, x_{2j}) \in \bar{D}\}, \\ \Gamma_\delta &= \{x_1 = \delta, 0 \leq x_2 < \ell_2\}, \end{aligned}$$

причем $Mh < 2\sigma$, где $0 < \sigma < 1$ некоторое фиксированное число.

Для аппроксимации уравнения и краевых условий задачи (2) вторым порядком точности воспользуемся следующими разностными операторами:

$$\begin{aligned} L_h y_{ij} &\equiv \frac{1}{h^2} (y_{i-1,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j-1} + y_{i,j+1} - 4y_{ij}) + \\ &+ \frac{a_{ij}}{2h} (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + \frac{b_{ij}}{2h} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - c_{ij} y_{ij}, \\ \ell_h y_{N_1,j} &\equiv y_{ij} + \alpha(\ell_1, x_{2j}) y_{N_1,j}, \\ A_h y_{10} &\equiv \frac{1}{2} \left[(2 + b_{10} h) y_{11} + \left(1 + \frac{a_{10} h}{2}\right) y_{1+1,0} + \right. \\ &\left. + \left(1 - \frac{a_{10} h}{2}\right) y_{1-1,0} - (4 + b_{10} h + c_{10} h^2) y_{10} \right], \\ K_h y_{N_1,j} &\equiv y_{N_1,j} \left(1 + \frac{\delta}{h}\right) - \frac{\delta}{h} y_{N_1-1,j}. \end{aligned}$$

Сформулируем дискретный аналог задачи (1):

$$\begin{cases} L_h y = f & \text{в } D_h, \\ y = \varphi_1 & \text{на } \Gamma_{1h}, \\ \ell_h y = \varphi_2 & \text{на } \Gamma_{2h}, \\ \Lambda_h y = \bar{\varphi}_3 & \text{на } \Gamma_{3h}, \\ K_h y = \bar{\varphi}_1 & \text{на } \Gamma_{\partial h}, \end{cases} \quad (3)$$

где $\bar{\varphi}_3 = \varphi_3 + \frac{h}{2} f, \bar{\varphi}_1 = \varphi(0, jh), j = 0, N_2 - 1$.

Пусть функции $a, b, c, f, \varphi_i, i = \overline{1, 3}$ еще удовлетворяют таким условиям, что $(x_{1i}, x_{2j}) \in C^4(\bar{D}^*)$, где $\bar{D}^* = \bar{D} \setminus \{0 \leq r \leq r_1, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

Следуя работе [7], поскольку раствор угла в $(\ell, 0)$ равен $1,5\pi$, для погрешности метода сеток получена оценка

$$|\delta| \leq R_1 h^{4v} r^{-v} + R_2 h^2$$

где $\delta = y - u$; u и y точные решения задач (2) и (3) соответственно; $0 < v \leq 1/3$; $R_i, i = \overline{1, 2}$ положительные постоянные которые не зависят от h .

Задача С. Пусть D — ступенчатая область с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$,

где

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x_1, \ell_2), 0 \leq x_1 \leq \ell_1\} \cup \\ &\cup \{(0, x_2), -\ell_2 \leq x_2 \leq \ell_2\} \cup \\ &\cup \{(x_2, -\ell_2), 0 \leq x_1 \leq \ell_1\}, \\ \Gamma_2 &= \{(\ell_1, x_2), -\ell_2 < x_2 < \ell_2\}, \\ \Gamma_3^+ &= \Gamma_3^- = \{(x_1, 0), 0 < \ell < \ell_2\}, \end{aligned}$$

где Γ_3^+ и Γ_3^- верхняя и нижняя стороны отрезка соединяющего точки $(\ell, 0)$ и $(\ell_1, 0)$, соответственно.

Рассматривается следующая краевая задача:

$$\left. \begin{aligned} Lu &= f \quad \text{в} \quad D, \\ u &= \varphi_1 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \Gamma_3^-, \\ \ell u &= \varphi_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= \varphi_3 \quad \text{на} \quad \Gamma_3^+. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Для производных точного решения задачи (4) вблизи точки $(\ell, 0)$ справедлива оценка [6]:

$$\frac{\partial^m u(x_1, x_2)}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}} = O\left(r^{-\frac{m+1}{4}} + 1\right).$$

Аналогично (3), сформулируем дискретный аналог задачи (4):

$$\left. \begin{aligned} L_h u &= f \quad \text{в} \quad D_h, \\ u &= \varphi_1 \quad \text{на} \quad \Gamma_{1h}, \Gamma_{3h}^-, \\ \ell_h u &= \varphi_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_{2h}, \\ \Lambda_h u &= \bar{\varphi}_3 \quad \text{на} \quad \Gamma_{3p}^+, \\ K_h u &= \bar{\varphi}_1 \quad \text{на} \quad \Gamma_{3h}^+. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Следуя работе [7], поскольку раствор угла в $(\ell, 0)$ равен 2π , для погрешности метода сеток получена оценка

$$|\delta| \leq R_i h^{4\nu} r^{-\nu} + R_4 h^2,$$

где u и u точные решения задачи (4) и (5), соответственно; $0 < \nu \leq 1/4$; R_i , $i = \overline{3, 4}$

положительные постоянные которые не зависят от h .

При построении разностных схем предполагается, что угловая точка $(\ell, 0)$ узел для рассматриваемых сеток, так как наличие разреза области ухудшает дифференциальное свойство решения краевой задачи в окрестности особой точки $(\ell, 0)$.

Отметим, что области D имеют еще несколько прямых углов, но поскольку вблизи этих углов производные точного решения ведут себя гораздо лучше, чем в $(\ell, 0)$, мы можем ими пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Самарский, В.Б. Андреев Разностные методы для эллиптических уравнений. М., Наука, 1976, 352 с.
2. E.Batschelet //ZAMP, 3 (1952), p.p. 165-193.
3. А.А.Досиев, Я.Д.Мамедов //ДАН СССР, 1978, 242, 4, с. 757-760.
4. Б.Б.Балакишиев //Сб. Прибл.мет.реш. опер.урав., Баку, БГУ, 1985, с. 17-24.
5. P.Laasonen //An. Acad. Sci. Fen., ser. A.I., 1957, 246, p.p. 3-19.
6. N.M. Wigley //J. Math. Mech., 13 (1964), p. 549.
7. Б.Б. Балакишиев //Ж. Теор. и прикл. мех., №3-4 (23-24), Баку, 2011, с. 93-95.

B.B. Balakışiyev

**Qarişiq sərhəd məsələlərinin
ədədi həllinə dair**

ANNOTASIYA

Məqalədə künc nöqtələr ətrafında dəqiq həllin asimptotikası nəzərə alınaraq, xüsusi fərq sxemi istifadə edilməklə ümumi şəkilli xətti elliptik tənliklər üçün qeyri-lokal sərhəd məsələlərinin şəbəkə üsulumun xətası qiymətləndirilmişdir. Dağılma mexanikasında çatlara malik oblastlarda bu tip məsələlərə tez-tez rast gəlinir.