Pedaqoji Universitetin Xəbərləri. Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası – 2021, C. 69, №4, s. 9-17
Transactions of Pedagogical University. Series of mathematics and natural sciences – 2021, V. 69, №4, pp. 9-17

Riyaziyyat və mexanika

UOT 517.958

A.Ş.Həbibova
Lənkəran Dövlət Universiteti
arasta.h@mail.ru

DƏYİŞƏN SƏRHƏDLİ OBLASTDA PARABOLİK TƏNLİYİN NAMƏLUM ƏMSALININ TAPILMASI HAQQINDA TƏRS MƏSƏLƏ

Açar sözlər: *parabolik tənlik, dəyişən sərhədli oblast, tərs məsələ, yeganəlik, dayanaqlıq*

Məqalə parabolik tənlikdə zaman dəyişənindən asılı olan naməlum əmsalın tapılması haqqında tərs məsələnin korrektliyinin araşdırılmasına həsr olunmuşdur. Sərhədi zaman dəyişənindən asılı olan oblastda Neyman sərhəd şərtli qarışıq məsələyə baxılır, naməlum funksiyanın tapılması üçün təklif olunan əlavə şərt inteqral şəklində verilir. Baxılan tərs məsələnin həllinin yeganəliyi və dayanıqlığı haqqında teorem isbat olunmuşdur.

А.Ш.Габибова

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕИЗВЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Ключевые слова: *параболическое уравнение, область с подвижной границей, обратная задача, единственность, устойчивость*

В работе рассматривается обратная задача об определении неизвестного коэффициента параболического уравнения в области с подвижной границей, дополнительное условие для нахождения неизвестного коэффициента, который зависит от временной переменной, заданое в интегральном виде. Доказана теорема о единственности и «условной» устойчивости решения.

A.Sh.Gabibova

THE INVERSE PROBLEM FOR FINDING THE UNKNOWN COEFFICIENT OF PARABOLIC EQUATION IN DOMAIN WITH MOVING BOUNDARY

Keywords: *Parabolic equation, domain with moving boundaries, inverse problem, uniqueness, stability*

The paper considers to investigate corrects of the inverse problem for finding the unknown coefficient, which depends on the time variable. It is considered the Neumann mixed boundary value problem on domain which the boundary depends on the time variable, an additional condition for finding the unknown function is given in the integral form. A theorem on uniqueness and stability of the solution of the given inverse problem is proved.

Aşağıdakı işarələri qəbul edək: $(x,t) - D = (0,\gamma(t)) \times (0,T]$ oblastının ixtiyari nöqtəsidir, $x = \gamma(t) -$ verilmiş hamar funksiyadır, $0 < a = \gamma(0) \le \gamma(t) \le \gamma(T) = b < +\infty$, $T = const > 0$, $C^{l+\alpha}(\cdot), C^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}(\cdot)$, $l = 0,1,2$, $0 < \alpha < 1$ fəzaları və bu fəzalarda normalar [3, səh.12-30]-də olduğu kimi başa düşülür

$$\|\rho(x,t)\|_D^{(l)} = \sum_{k=0}^{l} \sup_D \left| \frac{\partial^{(k)} p(x,t)}{\partial x^k} \right|, \ \|q\|_T^{(l)} = \sum_{k=0}^{l} \sup_{[0,T]} \left| \frac{\partial^k q(t)}{\partial t^k} \right|.$$

Naməlum $\{c(t), u(x,t)\}$ funksiyalar cütünün tapılması haqqında aşağıdakı məsələyə baxılır:

$$u_t - u_{xx} + c(t)u = f(x,t) \quad (x,t) \in D, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,a], \tag{2}$$

$$u_x(0,t) = \psi_0(t), \ u_x(\gamma(t),t) = \psi_1(t), \ t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\int_0^a u(x,t)dx = h(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Burada $f(x,t), \varphi(x,t), \psi_0(t), \psi_1(t), h(t), \gamma(t) -$ verilmiş və müəyyən hamarlıq şərtlərinə malik funksiyalardır.

Bir çox süzülmə, diffuziya proseslərin modelləşdirilməsi dəyişən sərhədli oblastlarda baxılan məsələlərə gətirilir [2; 4; 6]. Parabolik tip tənliklər üçün dəyişən sərhədli oblastlarda tərs məsələlər əvvəllər [1; 5]-də baxılmışdır.

Məsələ (1)-(4)-ün ilkin verilənləri üçün aşağıdakı şərtləri qəbul edək:

1^0. $f(x,t) \in C^{\alpha,\alpha/2}(D)$,

2^0. $\varphi(x) \in C^{2+\alpha}[0,a]$;

3^0. $\psi_0(t), \psi_1(t) \in C^{1+\alpha}[0,T]$; $\varphi_x(0) = \psi_0(0)$; $\varphi_x(a) = \psi_1(a)$

4^0. $h(t) \in C^{1+\alpha}[0,T]$; $|h(t)| \ge const > 0$, $t \in [0,T]$.

5^0. $\gamma(t) \in C[0,T]$, $\gamma_t(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $0 < a = \gamma(0) \le \gamma(t) \le \gamma(T) = b < +\infty$.

Tərif 1. $\{c(t), u(x,t)\}$ funksiyalar cütünə o zaman (1)-(4) məsələsinin həlli deyəcəyik ki, aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

1) $c(t) \in C^{\alpha}[0,T]$;

2) $u(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D) \cap C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{D})$;

3) (1)-(4) münasibətləri adi qaydada ödənilir.

Tərif 2. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədinə qarşı elə $\delta > 0$ varsa ki, $\|f - \bar{f}\| < \delta$, $\|\varphi - \overline{\varphi}\| < \delta$, $\|\psi_0 - \overline{\psi}_0\| < \delta$, $\|\psi_1 - \overline{\psi}_1\| < \delta$, $\|h - \bar{h}\| < \delta$ olduqda $\|u - \bar{u}\| < \varepsilon$, $\|c - \bar{c}\| < \varepsilon$ olsun, onda deyəcəyik ki, (1)-(4) məsələsinin həlli dayanıqlıdır.

(1)-(4) məsələsi Adamar mənada korrekt olmayan (qeyri-korrekt) məsələlər sinfinə daxildir. Nümunələr göstərmək olar ki, əgər qoyulmuş məsələnin həlli vardırsa belə, həllin yeganəliyi və ya ilkin verilənlərdən kəsilməz asılılığı pozula bilər. Məsələn, asanlıqla yoxlamaq olar ki, $\{c(t) = 2n-1, u(x,t) = e^{-nt}\cos x\}$ funksiyalar cütü $u_t - u_{xx} + c(t)u = ne^{-nt}\cos x$, $(x,t) \in (0,\gamma(t)) \times (0,T]$, $\gamma(t) = \frac{\pi}{3} + t$, $u(x,0) = \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $u_x(0,t) = 0$,

$u_x(\gamma(t),t) = -ne^{-nt}\sin\left(\frac{\pi}{3} + t\right), t \in [0,T]$, $\int_0^{\frac{\pi}{3}} u(x,t)dx = e^{-nt}\sin\frac{\pi}{3}$, $t \in [0,T]$ tərs məsələsinin həllidir. n parametrinin $n = s+1$ və $n = s$ qiymətlərində məsələnin ilkin verilənləri üçün yaza bilərik:

$$|f_{s+1} - f_s| \le e^{-st},\ |\varphi_{s+1} - \varphi_s| = 0,\ |\psi_{0s+1} - \psi_{0s}| = 0,$$

$$|\psi_{1s+1} - \psi_{1s}| \le 2e^{-st},\ |h_{s+1} - h_s| \le 2e^{-st}.$$

Aydındır ki, s parametrinin kifayət qədər böyük qiymətlərində ilkin verilənlər üçün qeyd olunan fərqləri əvvəlcədən verilmiş ixtiyari $\delta > 0$ ədədindən kiçik etmək olar. Lakin bu halda $|u_{s+1} - u_s| \le 2e^{-st}$, $|c_{s+1} - c_s| = 2$ olur, yəni məsələnin həlli dayanıqlı deyildir.

Dayanaqsız məsələlərin, o cümlədən baxılan (1)-(4) məsələsinin həll olunma zərurəti öyrənilən məsələnin həlli anlayışının dəqiqləşdirilməsini tələb edir.

Korrektlik çoxluğu adlandırılan

$$K = \{(c,u) | c(t) \in C^{\alpha}[0,T], |c(t)| \le m_1,\ t \in [0,T],$$

$$u(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}),\ |u|, |u_x| \le m_2,\ (x,t) \in \overline{D}\} - \text{nı quraq.}$$

(1)-(4) məsələsi özünə ekvivalent məsələyə gətirilərək araşdırılır.

Lemma 1. Fərz edək ki, $\int_0^a \varphi(x)dx = h(0)$. Əgər (1)-(4) məsələsinin tərif 1 mənada klassik həlli varsa, onda bu həll (1), (2), (3) və

$$c(t) = \left[u_x(a,t) - \psi_0(t) - h_t(t) + \int_0^a f(x,t)dx \right] / h(t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

məsələsinin də həlli olar və tərsinə, (1), (2), (3), (5) məsələsinin tərif 1 mənada həlli həm də (1)-(4) məsələsinin həllidir.

İsbatı. Fərs edək ki, $\{c(t), u(x,t)\}$ cütləri (1)-(4) məsələsinin tərif 1 mənada həllidir. (1) tənliyinin hər iki tərəfini $(0,a)$ intervalında x dəyişəninə nəzərən inteqrallasaq, $1^0 - 4^0$ şərtləri daxilində almış olarıq:

$$h_t(t) - u_x(a,t) + u_x(0,t) + c(t)h(t) = \int_0^a f(x,t)dx, \; t \in [0,T],$$

Buradan isə (5) düsturu alınır. Beləliklə, $\{c(t), u(x,t)\}$ cütləri (1), (2), (3) və (5) münasibətlərini ödəyir.

İndi fərz edək ki, $\{c(t), u(x,t)\}$ cütləri (1), (2), (3), (5) məsələsinin tərif 1 mənada həllidir. Göstərək ki, (4) münasibəti ödənilir. (1) tənliyindən yaza bilərik:

$$\int_0^a u_t(x,t)dx - \int_0^a u_{xx}(x,t)dx + \int_0^a c(t)u(x,t)dx = \int_0^a f(x,t)dx.$$

Axırıncı bərabərlikdə, $\theta(t) = \int_0^\alpha u(x,t)dx - h(t)$ qəbul edib, $c(t)$ funksiyası üçün (5) düsturunu nəzərə alsaq, lemma 1 şərti daxilində yaza bilərik:

$$\theta_t + c(t)\theta = 0, \; \theta(0) = \int_0^a \varphi(x)dx - h(0) = 0\,.$$

Aydındır ki, alınan Koşi məsələsinin yeganə həlli: $\theta(t) \equiv 0$-dır. Başqa sözlə, $\int_0^a u(x,t)dx - h(t) = 0,$ yəni (4) münasibəti ödənilir.

Lemma 1 isbat olundu.

Məlumdur ki, tərs məsələlərin həllinin yeganəliyi haqqında teoremin isbatı və həllin ilkin verilənlərdən kəsilməz asılılığının göstəricisi olan qiymətləndirmənin alınması bu tip məsələlərin korrektliyinin araşdırılmasında mühüm yer tutur.

Fərz edək ki, $\{c_1(t), u_1(x,t)\}$ cütləri (1), (2), (3), (5) münasibətlərini $f_1(x,t), \varphi_1(x), \psi_{01}(t), \psi_{11}(t), h_1(t), \gamma(t)$ verilənlərinə nəzərən (I_1 məsələsi), $\{c_2(t), u_2(x,t)\}$ cütləri (1), (2), (3), (5) münasibətlərini $f_2(x,t), \varphi_2(x), \psi_{02}(t), \psi_{12}(t), h_2(t), \gamma(t)$ verilənlərinə nəzərən (I_2 məsələsi) ödəyirlər.

Teorem 1. Fərz edək ki:

1) $f_1(x,t), \varphi_1(x), \psi_{01}(t), \psi_{11}(t), h_1(t), \gamma(t)$ və $f_2(x,t), \varphi_2(x), \psi_{02}(t), \psi_{12}(t), h_2(t), \gamma(t)$ funksiyaları uyğun olaraq $1^0 - 5^0$ şərtlərini ödəyir:

2) I_1 və I_2 məsələlərinin K çoxluğuna daxil olan $\{c_1(t), u_1(x,t)\}$ və $\{c_2(t), u_2(x,t)\}$ həlli vardır.

Onda elə $T^* \in (0,T]$ vardır ki, $D_* = [0,\gamma(t)] \times [0,T^*]$ oblastında (1), (2), (3), (5) məsələsinin həlli yeganədir və aşağıdakı dayanaqlıq qiymətləndirməsi doğrudur:

$$\|u_1 - u_2\|_{D_*}^{(0)} + \|c_1 - c_2\|_{T^*}^{(0)} \le$$

$$\le m_3 \Big[\|f_1 - f_2\|_{D_*}^{(0)} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{[0,a]}^{(2)} + \|\psi_{01} - \psi_{02}\|_{T^*}^{(1)} + \|\psi_{01} - \psi_{12}\|_{T^*}^{(1)} + \|h_1 - h_2\|_{T^*}^{(1)} \Big], \quad (6)$$

burada $m_3 > 0 -$ I_1 və I_2 məsələlərinin verilənlərindən və K çoxluğundan asılı sabitdir.

Teorem 1-in isbatı. Əvvəlcə (6) bərabərsizliyinin doğruluğunu isbat edək. Həllin yeganəliyi (6) düsturundan $f_1 = f_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$, $\psi_{01} = \psi_{02}$, $\psi_{11} = \psi_{12}$, $h_1 = h_2$ şərtləri daxilində alınacaqdır.

Elə $\tilde{\varphi}(x) \in C^{2+\alpha}[0,b]$, funksiyasını quraq ki, $\tilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x),\ x \in [0,a]$.

Qəbul edilmiş şərtlər daxilində

$$F(x,t) = \tilde{\varphi}(x) + \frac{2\gamma(t)x - x^2}{2\gamma(t)}[\psi_0(t) - \psi_0(0)] + \frac{x^2}{2\gamma(t)}[\psi_1(t) - \psi_1(0)]$$

funksiya üçün yaza bilərik:

$$F(x,t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D}),\ F(x,0) = \tilde{\varphi}(x),\ F_x(0,t) = \psi_0(t),\ F_x(\gamma(t),t) = \psi_1(t).$$

Aşağıdakı işarələri qəbul edək:

$$z(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t),\ \lambda(t) = c_1(t) - c_2(t), \delta_1(x,t) = f_1(x,t) - f_2(x,t),$$

$$\delta_2(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x),\ \delta_3(t) = \psi_{01}(t) - \psi_{02}(t),\ \delta_4(t) = \psi_{11}(t) - \psi_{12}(t),$$

$$\delta_5(t) = h_1(t) - h_2(t),\ \delta_6(x,t) = F_1(x,t) - F_2(x,t),\ w(x,t) = z(x,t) - \delta_6(x,t).$$

I_1 məsələsinin münasibətlərindən I_2 məsələsinin uyğun münasibətlərini çıxsaq, $\{\lambda(t), w(x,t)\}$ funksiyalar cütünün tapılması haqqında məsələ alarıq:

$$w_t - w_{xx} = \phi(x,t), \quad (x,t) \in D, \quad (7)$$

$$w(x,0)=0,\quad x\in[0,a],\ w_x(0,t)=w_x(\gamma(t),t)=0,\ \ t\in[0,T], \tag{8}$$

$$\lambda(t)=z_x(a,t)/h_1(t)+H(t),\ t\in[0,T], \tag{9}$$

burada $\phi(x,t)=\ \delta_1(x,t)-\lambda(t)u_2(x,t)-c_1(t)z(x,t)+\delta_{6xx}(x,t)-\delta_{6t}(x,t)$

$$H(t)=\left\{\left[\int_0^a \delta_1(x,t)dx-\delta_3(t)-\delta_{5t}(t)\right]\cdot h_2(t)\right.$$

$$\left.+\left[\psi_{02}(t)+h_{2t}(t)-\int_0^a f_2(x,t)dx\right]\cdot\delta_5(t)\right\}\Big/\left[h_1(t)\cdot h_2(t)\right],$$

$\phi(x,t)$ funksiyasını $(-\infty,+\infty)$ intervalına davam etdirək:

$$\widetilde{\phi}(x,t)=\begin{cases}\phi(0,t), & -\infty<x<0,\quad 0\le t\le T,\\ \phi(x,t), & 0\le x\le\gamma(t),\qquad 0\le t\le T,\\ \phi(\gamma(t),t), & \gamma(t)<x<+\infty,\quad 0\le t\le T,\end{cases} \tag{10}$$

Göstərmək olar ki, [6, 19 fəsil]

$$y(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-\xi,t-\tau)\widetilde{\phi}(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{11}$$

(burada $G(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right),\ t>0-y_t-y_{xx}=0$ tənliyinin fundamental həllidir) potensialı üçün aşağıdakı xassələr doğrudur:

1) $y(x,t)$ funksiyası

$$y_t-y_{xx}=\widetilde{\phi}(x,t),\quad (x,t)\in(-\infty,+\infty)\times(0,T]$$

tənliyini ödəyir ;

2) $y(x,t)$, $y_x(x,t)\in C\{(-\infty,+\infty)\times[0,T]\}$;

3) $|y(x,t)|\le m_4\|\widetilde{\phi}\|_D^{(0)}\cdot t,\ \ (x,t)\in(-\infty,+\infty)\times[0,T]$;

4) $|y_x(x,t)|\le m_5\|\widetilde{\phi}\|_D^{(0)}\cdot t^{1/2},\ \ (x,t)\in(-\infty,+\infty)\times[0,T]$.

(7), (8) münasibətlərindən $w(x,t)$ funksiyasının tapılması haqqında məsələnin həllini

$$w(x,t)=\upsilon(x,t)+y(x,t)$$

şəklində axtaraq. Burada $y(x,t)-$ (11) vasitəsi ilə təyin olunan funksiyadır, $\upsilon(x,t)$ funksiyası isə aşağıdakı məsələnin həllidir:

$$\upsilon_t-\upsilon_{xx}=0,\quad (x,t)\in D,$$

$$\upsilon(x,0)=0,\ \ x\in[0,a], \tag{12}$$

$$\upsilon_x(0,t)=-y_x(0,t),\ \upsilon_x(\gamma((t),t))=-y_x(\gamma((t),t)),\quad t\in[0,T].$$

(12) məsələsinin həllini aşağıdakı şəkildə göstərmək olar [4, 14 fəsil]:

$$\upsilon(x,t)=-2\int_0^t G(x,t-\tau)\rho_1(\tau)d\tau+2\int_0^t G(x-\gamma(t),t-\tau)\rho_2(\tau)d\tau, \tag{13}$$

burada $\rho_1(t)$, $\rho_2(t)$ funksiyaları aşağıdakı inteqral tənliklər sisteminin həllidir [6, 14 fəsil]:

$$\begin{aligned} -y_x(0,t)&=\rho_1(t)+2\int_0^t G_x(-\gamma(t),t-\tau)\rho_2(\tau)d\tau,\\ -y_x(\gamma(t),t)&=\rho_2(t)-2\int_0^t G_x(\gamma(t),t-\tau)\rho_1(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{14}$$

Qeyd edək ki, teorem 1-in şərtləri daxilində $\rho_1(t),\rho_2(t)\in C([0,T])$ [6,14 fəsil] .

$w(x,t)$ funksiyasını qiymətləndirək.

Aydındır ki,

$$|w(x,t)|\le|\upsilon(x,t)|+|y(x,t)|. \tag{15}$$

(15)-də birinci toplanan üçün yaza bilərik:

$$|\upsilon(x,t)|\le 2\int_0^t G(x,t-\tau)|\rho_1(\tau)|d\tau+2\int_0^t G(x-\gamma(t),t-\tau)|\rho_2(\tau)|d\tau.$$

[6, 14 fəsil]-də istifadə olunan metodikanı tətbiq etməklə, fundamental həllin özü və törəmələri üçün yaza bilərik:

$$\begin{gathered} |G(x,t-\tau)|,\ |G(x-\gamma(t),t-\tau)|\le const(t-\tau)^{-1/2},\\ |G_x(\gamma(t),t-\tau)|\le const(t-\tau)^{-1/2}, \end{gathered} \tag{16}$$

(16) qiymətləndirmələrindən istifadə edərək yaza bilərik:

$$|\upsilon(x,t)|\le m\left[\|\rho_1\|_T^{(0)}+\|\rho_2\|_T^{(0)}\right]\cdot T^{1/2}, \tag{17}$$

$\rho_1(t)$ və $\rho_2(t)$ funksiyalarını qiyməytləndirmək üçün (14)-dən yaza bilərik:

$$\begin{aligned} |\rho_1(t)|&\le|y_x(0,t)|+2\int_0^t|G_x(-\gamma(t),t-\tau)|\cdot|\rho_2(\tau)|d\tau,\\ |\rho_2(t)|&\le|y(t),t|+2\int_0^t|G_x(\gamma(t),t-\tau)|\cdot|\rho_1(\tau)|d\tau, \end{aligned} \tag{18}$$

$|y_x(\cdot)|$ və $|G_x(\cdot)|$ üçün qiymətləndirmələri nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$|\rho_1(t)|\le m_7\|\phi\|_D^{(0)}\cdot t+m_8\|\rho_2\|_T^{(0)}\cdot T^{1/2}$$

$$\left|\rho_2(t)\right| \le m_9 \|\phi\|_D^{(0)} \cdot t + m_{10} \|\rho_1\|_T^{(0)} \cdot T^{1/2}.$$

Axırıncı bərabrsizliklər hər bir $t \in [0,T]$ üçün ödənilir. Onda bu bərabərsizliklər sol tərəflərin maksimal qiymətlərində də doğru olar, yəni

$$\|\rho_1(t)\|_T^{(0)} \le m_7 \|\widetilde{\phi}\|_T^{(0)} \cdot T^{1/2} + m_8 \|\rho_2\|_T^{(0)} \cdot T^{1/2}$$

$$\|\rho_2(t)\|_T^{(0)} \le m_9 \|\widetilde{\phi}\|_T^{(0)} \cdot T^{1/2} + m_{10} \|\rho_2\|_T^{(0)} \cdot T^{1/2}$$

Bərabərsizlikləri birləşdircək alarıq

$$\|\rho_1(t)\|_T^{(0)} + \|\rho_2(t)\|_T^{(0)} \le m_{11} \|\widetilde{\phi}\|_T^{(0)} \cdot T^{1/2} + m_{12} \left[\|\rho_1\|_T^{(0)} + \|\rho_2\|_T^{(0)}\right] \cdot T^{1/2}$$

burada $m_{11}, m_{12} > 0 -$ ilkin verilənlərdən asılı sabitlərdir.

Fərz edək ki, $T_1 \in (0,T]$ ədədi üçün $m_{12} T_1^{1/2} < 1$ ödənilir. Onda axırıncı bərabərsizlikdən alarıq:

$$\|\rho_1\|_T^{(0)} + \|\rho_2\|_T^{(0)} \le m_{13} \|\phi\|_D^{(0)} \cdot T^{1/2} \tag{19}$$

(19)-u (17)-də nəzərə alsaq, yazarıq:

$$\left|\upsilon(x,t)\right| \le m_{14} \cdot \|\phi\|_D^{(0)} \cdot T^{1/2}, \tag{20}$$

$\left|y(x,t)\right| \le m_4 \|\widetilde{\phi}\|_T^{(0)} \cdot T$ bərabərsizliyini nəzərə alıb, $\left|w(x,t)\right|$ üçün yaza bilərik:

$$\left|w(x,t)\right| \le m_{15} \|\widetilde{\phi}\|_D^{(0)} \cdot T^{1/2}, \quad x(t) \in D.$$

Buradan isə

$$\left|z(x,t)\right| = \left|w(x,t)\right| + \left|\delta_6(x,t)\right| \le m_{15} \|\widetilde{\phi}\|_D^{(0)} \cdot T^{1/2} + \|\delta_6(x,t)\|_D^{(0)},$$

və ya

$$\left|z(x,t)\right| \le m_{16} \left[\|\delta_1\|_D^{(0)} + \|\delta_6\|_D^{(2,1)}\right] + m_{17}\, \theta\, T^{1/2}, \tag{21}$$

burada $\theta = \|\lambda\|_T^{(0)} + \|z\|_D^{(0)}$.

İndi $\lambda(t)$ funksiyasını qiymətləndirək. (9)-dan alınır:

$$\left|\lambda(t)\right| \le \left|z_x(a,t)\right| / \left|h(t)\right| + \left\{\left[\int_0^a \left|\delta_1(x,t)\right| dx + \left|\delta_3(t)\right| + \left|\delta_{5t}(t)\right|\right] \cdot\right.$$

$$\left. \cdot \left|h_2(t)\right| + \left[\left|u_{2x}(a,t)\right| + \left|\psi_{02}(t)\right| + \left|h_{2t}(t)\right| + \int_0^a \left|f_2(x,t)\right| dx\right] \cdot \delta_5(t) \right/ \left|h_1(t) \cdot h_2(t)\right|$$

Teorem 1-in şərtlərini və (16) bərabərsizliklərini nəzərə alaraq, $\left|z_x(a,t)\right|$ üçün yaza bilərik:

$$\left|z_x(a,t)\right| \le \left|\upsilon_x(a,t)\right| + \left|y_x(a,t)\right| + \left|\delta_{6x}(a,t)\right|\Big] \le$$

$$\leq m_{18}\|\delta_6\|_D^{(1,0)} + m_{19}\|\widetilde{\phi}\|_D^{(0)} \cdot T^{1/2} + m_{20}\,\theta T^{1/2}.$$

Beləliklə, $|\lambda(t)|$ üçün yaza bilərik:

$$|\lambda(t)| \leq m_{21}\left[\|\delta_1\|_D^{(0)} + \|\delta_3\|_T^{(0)} + \|\delta_4\|_T^{(0)} + \|\delta_5\|_T^{(1)} + \|\delta_6\|_D^{(2,1)}\right] + m_{22}\theta T^{1/2} \qquad (22)$$

(21) və (22) bərabərsizlikləri ixtiyari $(x,t) \in D_1 = (0,\gamma(t)) \times (0,T_1]$ üçün doğru olduğundan, sol tərəflərin maksimal qiymətlərində də ödənilir:

$$\|z\|_D^{(0)} \leq m_{16}\left[\|\delta_1\|_{D_1}^{(0)} + \|\delta_6\|_{D_1}^{(2,1)}\right] + m_{17}\theta\ T_1^{1/2}$$

$$\|\lambda\|_{T_1}^{(0)} \leq m_{21}\left[\|\delta_1\|_{D_1}^{(0)} + \|\delta_5\|_{T_1}^{(0)} + \|\delta_6\|_{D_1}^{(2,1)}\right] + m_{22}\theta T_1^{1/2}$$

Axırıncı iki bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə toplasaq, alarıq:

$$\theta \leq m_{23}\left[\|\delta_1\|_{D_1}^{(0)} + \|\delta_5\|_{T_1}^{(1)} + \|\delta_6\|_{D_1}^{(2,1)}\right] + m_{24}\theta T_1^{1/2}.$$

Fərz edək ki, T^* elə ədəddir ki, $0 < T^* \leq T_1 \leq T$ və $m_{24}T^{*1/2} < 1$. Onda axırıncı bərabərsizlikdən həllin "şərti dayanıqlığını" ifadə edən qiymətləndirməni almış olarıq:

$$\|\lambda\|_{T^*}^{(0)} + \|z\|_{D^*}^{(2,1)} \leq m_{25}\left[\|\delta_1\|_{D^*}^{(0)} + \|\delta_2\|_{D^*}^{(2)} + \|\delta_3\|_{T^*}^{(1)} + \|\delta_4\|_{T^*}^{(1)} + \|\delta_5\|_{T^*}^{(1)}\right] \qquad (23)$$

(1), (2), (3), (5) məsələsinin (deməli həm də (1)-(4) məsələsinin) həllinin yeganəliyi

$$f_1(x,t) = f_2(x,t),\ \varphi_1(x) = \varphi_2(x), \psi_{01}(t) = \psi_{02}(t), \psi_{11}(t) = \psi_{12}(t),\ h_1(t) = h_2(t).$$

olduqda (23)-dən alınır.

Teorem isbat olundu.

ƏDƏBİYYAT

1. *Ахундов А.Я.* Обратные задачи для квазилинейных параболических уравнений в областях с подвижной границей // Препринт, Баку 2000, 18 с.
2. *Карташов Э.М.* Новые интегральные соотношения для аналитических решений уравнений параболического типа в нецилиндрических областях //Доклады Академии Наук, 2000, т.374, №2, с.168-172.
3. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа // М. Наука, 1967, 736 стр.
4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики //Москва, Наука, 1966, 724 стр.
5. *A.Ya.Akhundov, A.Sh.Habibova.* On an inverse problem for a parabolic equation in a domain with moving boundaries // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics NASA, 2021, v.47, issue 2.
6. *Connon G.R.* The one-dimensional heat equation // London, 1984, 483 p.

Redaksiyaya daxil olub 17.08.2021