Pedaqoji Universitetin Xəbərləri. **Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası – 2021, C. 69, №4, s. 18-30**
Transactions of Pedagogical University. **Series of mathematics and natural sciences – 2021, V. 69, №4, pp. 18-30**

UOT 512

N.Ş.Aslanova
Gəncə Dövlət Universiteti
natiga.cabbarova@mail.ru

CƏBRİ TƏNLİKLƏR MÖVZUSUNDA ŞTURM SİSTEMİNİN E-TƏLİM ÜÇÜN UYĞUN OLAN MƏSƏLƏLƏRİ

Açar sözlər: *e-təlim, Şturm sistemi, işarə dəyişmələri sayı, tənliyin kökü, təqribi həllər*

Cəbri tənliklərin həlli mövzusu cəbr kursunun mərkəzi məsələlərindən biridir. Buna görə də bu mövzu e-təlim zamanı xüsusi diqqət tələb edir. Mövzunun e-təlim metodları ilə tədrisi onun tələbələr tərəfindən müvəffəqiyyətlə qavranması bir sıra prinsiplərin gözlənilməsini tələb edir. Məsələnin həll alqoritminin qurulması nəzəri məsələlrin dərindən qavranılmasını tələb edir. Buna görə də tədris prosesinin bütün mərhələlərinin nöqsansız yerinə yetirilməsi tələbələrin həm nəzəri biliklərinin və həm də praktik iş bacarıqlarının möhkəmlənməsinə səbəb olur. Məqalədə müəllifin bu istiqamətdə məqsədə çatmaq üçün yanaşması şərh olunmuşdur. Daha mürəkkəb və böyük hesablamalar tələb edən məsələlərin həllində Sage onlayn mühitindən istifadə yollarının tələbələrə öyrədilməsinə geniş yer verilir. Şturm sisteminin köməyi ilə cəbri tənliklərin həqiqi köklərinin tapılmasına aid misallara baxılır.

Н.Ш.Асланова

ПОДХОДЯЩИЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ТЕМАМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРИ ЭЛЕКТРОННОМ ОБУЧЕНИИ

Ключевые слова: *электронное обучение, система Штурма, число перемен знака, корень уравнения, приближенные решения*

Тема решения алгебраических уравнений является одной из центральных задач курса алгебры. Поэтому эта тема требует особого внимания при электронном обучении. Успешное усвоение этой темы при электронном обучении требует соблюдения ряда принципов. Построение алгоритма решения задачи требует глубокого усвоения теоретичнеского материала. По-этому, безупречное выполнение всех этапов обучения приводит к упрочению теоретических знаний и практических навыков учащихся. В статье изложен подход автора для достижения цели в этом направлении. При решении более сложных задач, требующих больших вычислений учащиеся обучаются путям решений задач в онлайн средах типа Sage. Рассматриваются задачи о нахождении приближенных решений алгебраических уравнений.

N.Sh.Aslanova

APPROPRIATE QUESTIONS OF E-TEACHING CONCERNING THE THEMES OF ALGEBRAIC EQUATIONS AND GRAPHIC SOLUTIONS OF EQUATIONS

Keywords: *electronic teaching, Sturm system, number of sign changes, root of the equation, approximate solutions*
A theme of solution of algebraic equations is one of cencentral problems for the course of Algebra. By this reason this theme aquires the special attention in the teaching. For successful understanding of the theme by students it required satisfactory observance of some principles. In the article the approch of the author for reaching of the goals is arguing. Construction of the algorithm of solution demands deep knowledge of theoretic results. By this reason faultless execution of all stages of teaching leads to completeness of the oretic knowledges and practice performance of students. For the solution of more complicated problems demanding great calculations, the students are trained for the ways of solution in the enviornments of Sage type. It is considered the question on approximate solution of algebraic equations.

1. Giriş

İnformatikanın tədrisi metodikasının riyazi xarakterli məsələlərinnin tədrisi zamanı geniş yayılmış prinsip məlum olan tədris mexanizminin qorunması və müəyyən mərhələlərlə həyata keçirilməsindən ibarətdir. Bunlar içərisində əsas olanlar aşağıdakılardır:

1- məsələnin riyazi modelinin qurulması;
2- məsələnin həll alqoritminin qurulması;
3- proqram təminatının hazırlanması;
4- məsələnin kompüter vasitəsi ilə həlli;
5- alınmış həllin analizi.

Bu sadalanan mərhələlərin hamısının yerinə yetirilməsi gərgin əmək və vaxt tələb edir. 1-ci məsələnin həlli problemin riyazi mahiyyətinin düzgün başa düşülməsi ilə sıx bağlıdır. 2-ci və 5-ci mərhələnin müvəffəqiyyətlə həlli məsələnin hansı şərtlər daxilində və hansı məqsədlərlə yerinə yetirilməsindən çox asılıdır. Əgər məsələnin tam həlli son məqsəddirsə, onda alqotitm bir cür, nəticələr aralıq hesablama xarakterində olarsa başqa şəkildə qurulmalıdır. Analiz məqsədə uyğun şəkildə aparılmalıdır. 3 və 4-cü mərhələnin həyata keçirilməsi üçün uyğun proqramlaşdırma dili elə seçilməlidir ki, daha əlverişli həll imkanları yarada bilsin.

2. Cəbr məsələlərinin tədrisinin pedaqoji xüsusiyyətləri

Azərbaycanda ali təhsilin qarşısında duran əsas məsələlərdən biri günün tələblərinə cavab verən təlim texnologiyalarına yiyələnmiş yüksək ixtisaslı pedagoji kadrların hazırlanmasından ibarətdir. Təlim prosesinin müvəffəqiyyətli təşkili üçün ən vacib şərt təlimin yüksək keyfiyyətini təmin etməkdən ibarətdir. Müasir dövrdə bu tələblərə cavab verən təlim texnologiyası kimi elektron təlimin (qısaca e-təlim) psixoloji və pedaqoji xüsusiyyətlərinin öyrənilməsi zəruridir. Ali təhsil müəssisələrində e-təlimin tətbiqnin zəruri qanunvericilik aktları Azərbaycan Respublikasının Təhsil qanununda təsbit olunmuşdur (maddə 12.1.3, 13.1.3, 13.2, 13.3).

Qanuna müvafiq olaraq, bu vəzifənin icrası üçün əsas tələblər bunlardır: informasiya resurslarının əlçatan olması, elmi informasiyanın bitkinliyinin və effektivliyinin təmin olunması; müasir informasiya texnologiyalarının tətbiqi; yerli şəbəkənin olması; oxu zalında istifadəyə verilən ədəbiyyatın kifayət qədər sayı, iş terminallarının kifayət qədər olması, İnternetə giriş ilə (virtual) kompüter laboratoriyalarından istifadənin təşkili; pedaqoji personalın komplektləşdirilməsi, elmi kitabxanaların istinad informasiyası elektron fondları ilə təmin olunması və s.

Tədqiqatın hərtərəfliliyinə və dərinliyinə baxmayaraq, e-təlimin psixoloji və pedaqoji xüsusiyyətləri ali təhsil müəssisələrində kifayət qədər inkişaf etdirilə bilməmişdir. Buna görə də müasir dövrdə informatikanın ali məktəbdə tədrisi metodikasının qarşısında duran əsas məqsədlərdən biri ali təhsil müəssisələrində və universitetlərdə e-təlimin psixoloji və pedaqoji xüsusiyyətlərini və müxtəlif fənlər üçün e-təlimin xüsusiyyətlərini öyrənməkdən ibarətdir.

Bu məqalədə tədris müəssisələrində e-təlimi ali məktəblərdə təşkil edən və icra edən yüksək ixtisaslı əməkdaşlarının işinin cəbrin tədrisi sahəsində daha da optimallaşdırılmasının nəzəri və praktik əsaslarının öyrənilməsi yolları tədqiq olunur. Tədqiqatın metodoloji əsası aşağıdakı prinsiplərə söykənir: informasiya texnologiyası sistemli, fəaliyyət yönümlü olmalı, fərdi fəaliyyətin dəstəklənməsinə xidmət etməlidir.

Tədqiqatın elmi yeniliyi ali təhsil müəssisələrində e-təlimin psixoloji və pedaqoji xüsusiyyətlərini müəyyən olunmasından ibarətdir. Müasir dövrdə e-təlimin müvəffəqiyyətlə həyata keçirilməsi üçün bu təlimin müxtəlif alt sistemlərinin (bu məqalədə cəbrin tədrisinin) həyata keçirilməsini təmin edən təlim texnologiyalarından istifadə konsepsiyasının hazırlanmısı vacibdir.

Bu konsepsiyanın bəzi əsas ideyaları ilə tanış olaq:

e-təlim:

- müəllim (təlimatçı) və ya köməkçinin rəhbərliyi altında virtual sinif otağında yerinə yetirilən öyrənmə prosesidir;

- electron iş sistemidir ki, bunun əsas məqsədi müraciətlərə, yerinə yetirilən tapşırıqlara nəzarət və onların icrası üçün lazım olan məsləhətlərin verilməsindən ibarətdir;

- kompüter vasitəsi ilə CD-ROM-dan, local şəəkələrdən, internet resuslarından istifadə etməklə aparılan təlimdir;

- müəllimin (təlimatçının) iştirakı və rəhbərliyi ilə aparılan təlimdir. Müəllim öz məsləhət və göstərişlərini virtual deyil, virtual sinif vasitəsi ilə, hazırladığı materiala müvafiq olaraq çatdırır. O, tələbələrə bələdçilik edir və bunun üçün ağıllı lövhə kimi vasitələrdən istifadə edir.

3. Şturm sistemi və onunla bağlı məsələlərin tədrisi

E-təlim üsullarının son zamanlar meydana çıxan yeni istiqamətləri bu məsələnin yuxarıda göstərilən modelində həm zaman və həm də effektivlik baxımından müəyyən dəyişikliklər etməyə və mövzunun tədris mexanizmində tələbələrin aktivliyinin artırılması, vahid həll sxemlərindən istifadə etməklə vaxt və əmək itkisinin qarşısının alınmasının təmin olunmasına imkan verir.

Bu məsələnin həllində internet resurslarından istifadə olunması 1 və 2-ci pillə məsələlərinin professional həllinin öyrənilməsi və tətbiqinə, 3 və 4-cü pillə məsələlərinin həllində isə daha təkmil resurslardan istifadə olunmasına səbəb olur. Belə resurslar içərisində istifadəçilərin töhvəsindən yararlanmağa yönəlmiş Sage (System for Arithmetic Geometry Experimentation) mühitindən istifadə olunması əlverişlidir. Bu mühit passiv şəkildə məsələnin həll mexanizmini köçürmək deyil öz yaradıcılığının məhsulundan istifadə edərək məsələnin daha rasional həllinə nail olmağa imkan verir. Deyilənlərin cəbrdə Şturm sisteminin qurulması və onunla bağlı məsələlərin həllində necə tətbiq olunmasına baxaq.

Çoxhədlinin həqiqi köklərinin ayrılması onun bütün həqiqi köklərinin elə intervallara paylanması deməkdir ki, hər bir intervalda çoxhədlinin ancaq bir həqiqi kökü olsun. Bunun üçün nəzəri və praktik cəhətdən ən sadə və mükəmməl üsul Şturm üsuludur. Əvvəlcə biz sıfırdan fərqli ədədlərin sonlu ardıcıllığında işarə dəyişmələrin sayı anlayışını daxil edək. Aşağıdakı ədədlər ardıcıllığına baxaq:

$$6, -3, 2, -2, 1, 3, -3, -5, 5 \qquad (1)$$

Göründüyü kimi, bu ardıcıllıqda işarələr aşağıdakı kimi düzülmüşdür:

$$+, -, +, -, +, +, -, -, + . \qquad (2)$$

(2) sistemi üzrə soldan sağa doğru hərəkət etdikdə əks işarələrin yanaşı dayanması belə müşahidə olunur:

$$(+, -), (-,+),(+, -), (-,+),(+,-), (-, +) .$$

Bu halda deyirlər ki, (1) ədədlər ardıcıllığında 6 işarə dəyişməsi vardır. Aydındır ki, ardıcıl cütlərdən $(+, +)$ cütündə heç bir işarə dəyişməsi yoxdur.

Tutaq ki, həqiqi əmsallı, *təkrar kökü olmayan* $f(x)$ çoxhədlisi verilmişdir. Hər bir belə çoxhədli ilə Şturm sistemi adlandırılan müəyyən çoxhədlilər sistemi uyğunlaşdırılır.

Tərif 1. İlk həddi verilən $f(x)$ çoxhədlisi olan

$$f_0(x) = f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),...,f_s(x) \qquad (3)$$

coxhədlilər sistemi aşağıdakı şərtləri ödəyərsə, onda ona $f(x)$ çoxhədlisinin Şturm sistemi deyilir:

1) (3) sisteminin iki qonşu çoxhədlisinin ortaq həqiqi kökü yoxdur;

2) əgər c ədədi aralıq çoxhədlilərdən $f_k(x)$-in ($1 \le k \le s-1$) kökündürsə, onda $f_{k-1}(c)$ və $f_{k+1}(c)$ ədədləri müxtəlif işarəlidir, yəni $f_{k-1}(c)f_{(k+1)}(c) < 0$;

3) əgər c həqiqi ədədi $f(x)$ çoxhədlisinin kökündürsə, onda x dəyişəni c nöqtəsindən artaraq keçdikdə $f_0(x)\cdot f_1(x)$ hasili öz işarəsini mənfidən müsbətə dəyişir (yəni $x < c$ olduqda $f_0(x)\cdot f_1(x) < 0$, $x > c$ olduqda isə $f_0(x)\cdot f_1(x) > 0$).

4) sonuncu $f_s(x)$ çoxhədlisinin həqiqi kökü yoxdur.

Şturm sistemi funksiyalarının hər hansı a nöqtəsində qiymətlərindən düzələn

$$f_0(a),\ f_1(a),\ f_2(a)...f_s(a) \qquad (4)$$

ardıcıllığına baxaq. Yuxarıda baxılan halı ümumiləşdirərək, biz (4) ədədlər ardıcıllığında sıfra bərabər hədlərin olmasını istisna etmirik. Əgər a ədədi $f(x)$ çoxhədlisinin kökü deyilsə, onda yuxarıdakı ardıcıllıqda ən azı iki (ilk və sonuncu) sıfırdan fərqli hədd vardır. Sıfra bərabər hədləri atdıqdan sonra (4) sistemindən alınan yeni sistemdə işarə dəyişmələrin sayını $W(a)$ ilə işarə edək.

Teorem 1. (Şturm). Əgər a və b həqiqi ədədləri ($a < b$) təkrarlanan kökləri olmayan həqiqi əmsallı $f(x)$ çoxhədlisinin kökləri deyilsə, onda:

1) $W(a) \ge W(b)$;

2) $f(x)$ çoxhədlisinin (a,b) aralığında yerləşən həqiqi köklərinin sayı $W(a) - W(b)$ fərqinə bərabərdir.

Bu teoremin köməyi ilə istənilən (sonlu və ya sonsuz) aralıqda verilmiş və təkrar kökü olmayan çoxhədlinin köklərinin sayını tapmaq olar. Bu yolla Sage proqramında xüsusi prosedur müəyyən olunmuşdur. Sage səhifəsində aşağıdakı kodları daxil edək:

```
sage: def count_sign_changes(p):
sage:     l = [c for c in p if not c.is_zero()]
sage:     changes = [l[i]*l[i + 1] < 0 for i in range(len(l) - 1)]
sage:     return changes.count(True)
sage: def sturm(p, a, b):
sage:     assert p.degree() > 2
```

```
sage:     assert not (p(a) == 0)
sage:     assert not (p(b) == 0)
sage:     assert a <= b
sage:     remains = [p, p.derivative()]
sage:     for i in range(p.degree() - 1):
sage:         remains.append(-(remains[i] % remains[i + 1]))
sage:     evals = [[], []]
sage:     for q in remains:
sage:         evals[0].append(q(a))
sage:         evals[1].append(q(b))
sage:     return count_sign_changes(evals[0]) \
sage:             - count_sign_changes(evals[1])
```

Bu kodlar ilə sturm(p, a, b) prosedurunu Sage proqramına tanıtmaq lazımdır. Bu kodlarının ardınca

```
sage: R.<x>  = PolynomialRing(QQ, 'x')
sage: p = (x - 6) * (x - 5) * (x - 3) * (x - 2) * (x - 2/3)
sage: sturm(p, 1, 4)
```

kodlarını daxil etsək onda Sage (1, 4) intervalında olan köklərinin sayını qaytaracaqdır. Nəticə 2-yə bərabərdir. Doğrudan da, göstərilən intervalda verilən çoxhədlinin ancaq iki kökü vardır: 2 və 3.

Misal 1. $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - x/8 - 1$ çoxhədlisinin bütün müsbət köklərinin sayını tapaq.

Məlumdur ki, müsbət köklər (0, 10) aralığında yerləşmişdir. Buna görə Sturm(p, a, b) proseduru daxil edilmiş səhifədə aşağıdakı kodları daxil edək:

```
sage: R.<x>  = PolynomialRing(QQ, 'x')
sage: p = 2*x**4-8*x**3+8*x**2-x/8-1
sage: sturm(p, 0, 10)
```

Sage köklərin sayı üçün 3 qiymətini qaytarır.

İndi isə mənfi köklərin sayını və iki kökün Şturm üsulu ilə təqribi qiymətini tapaq. Aydındır ki, mənfi köklər (-10, 0) intervalında yerləşmişdir. Buna görə də aşağıdakıları daxil edirik:

```
Sage: sturm(p, -10, 0)
```

Sage-in cavabı belə olacaqdır: 1. Deməli mənfi köklər bir dənədir. Bu mənfi kökün və ən kiçik müsbət kökün təqribi qiymətini tapaq. Bunun üçün kökləri ayıran kifayət qədər kiçik intervallar taparaq, bu interbalların orta qiymətini kökün təqribi qiyməti kimi götürək. Bunun üçün ardıcıl olaraq sonuncu kodu yeniləri ilə əvəz edək. Alınan nəticələri aşağıdakı kimi qeyd edək.

```
Sage: sturm(p, -10,-5)
```

0 – bu intervalda kök yoxdur.

Sage: sturm(p, -5, 2.5)

0 – bu intervalda da kök yoxdur.

Sage: sturm(p, -2.5, 1.25)

0 – yenə də kök yoxdur.

Sage: sturm(p, -1.25, -0.625)

0 – kök yoxdur.

Sage: sturm(p, -0.625, -0.3125)

0 – yenə kök yoxdur.

Sage: sturm(p, -0.3125, -0.15625)

1

Beləliklə, kök sonuncu intervaldaır. Əgər bu intervalın orta nöqtəsini (yəni 0.234385 ədədini) kök üçün təqribi qiymət götürsək, mütləq xəta 0.08 -i aşmayacaqdır. Daha dəqiq yaxınlaşma almaq üçün yarı bölmə prosesini davam etdirmək lazımdır. İndi isə ən kiçik müsbət kökün təqribi qiymətini eyni üsulla hesablayaq. (1, 10) intervalını yarı bölək.

Sage: sturm(p, 0, 5)

3

İntervalı yarı bölərək davam edək.

Sage: sturm(p, 0, 2.5)

3.

Sage: sturm(p, 0, 1.25)

1.

Sage: sturm(p, 0, 0.625)

1.

Sage: sturm(p, 0, 0.3125)

0 .

Deməli kök (0.3125,0.625) aralığındadır.

Sage: sturm(p, 0.3125, 0.46875)

0

Kök (0.46875, 0.625) aralığındadır.

Sage: sturm(p, 0.55625, 0.625)

0

sturm(p, 0.46875, 0.5125)

1

Minimal kök bu aralıqdadır. Onun təqribi qiyməti olaraq 0.490625. Mütləq xəta 0.032-ni aşmır.

Məsələ 2. Aşağıdakı çoxhədlinin həqiqi köklərini ayırın:

$$f(x) = x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 11x^3 - 3x^2 - 3x - 1.$$

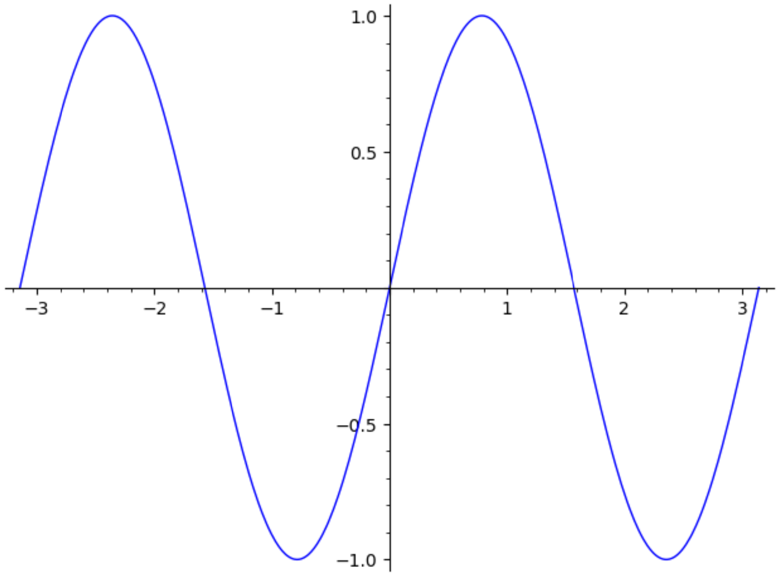
Aşağıdakı kodları daxil edək:
sage: R.<x> = PolynomialRing(QQ, 'x')
sage: p = x**6-3*x^5-3*x^4+11*x^3-3*x^2-3*x-1
sage: sturm(p, -12, 12)
Sage 2 cavabını qaytarır.
Daha sonra aşağıdakı nəticələri alırıq:
sage: sturm(p, -6, 6)
2
sage: sturm(p, -3, 3)
2
sage: sturm(p, -2, 2)
1
Deməli bir kök ya (-3, -2) və ya (2, 3) aralıqlarından birindədir.
sage: sturm(p, 2, 3)
1
Kökün biri ayrıldı və o, (2, 3) aralığındadır. Digər kökü ayıraq.
sage: sturm(p, -2, 0)
1
sage: sturm(p, -2, -1)
1.
Beləliklə ikinci kök (-2, -1) aralığındadır.

4. Funksiyaların Sage onlayn proqramı vasitəsi ilə qrafiklərinin qurulması

Sage proqramının olduqca geniş qrafik təsvir imkanları vardır. 3d ölçüdə qrafiklərin isə yalnız təsvir deyil, habelə animasiya imkanları da vardır. Buna görə də 3d təsvirlər ancaq onlayn rejimdə baxıla bilir. Kursoru hərəkət etdirməklə ixtiyari bucaq altında təsvirə baxmaq, hərəkət etdirmək, fırlatmaq, müxtəlif bucaqlardan təsvirə baxmaq olur. Sage proqramı vasitəsi ilə bəzi elementar funksiyaların təsvirlərinin qurulmasına baxaq.

1. sage: plot(sin(2*x), x, -pi, pi)

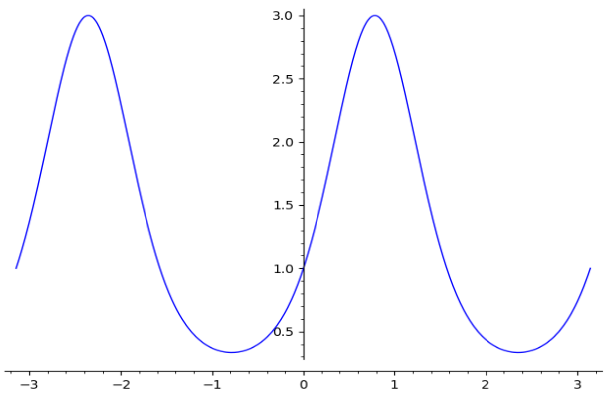
kodu vasitəsi ilə (-pi, pi) intervalında sin(2*x) funksiyasının qrafiki qurulacaqdır. Sage proqramının nəticəsi aşağıdakı kimi olacaqdır.



Bir qədər mürəkkəb funksiya daxil edək.

2. sage: plot(3^(sin(2*x)), x, -pi, pi)

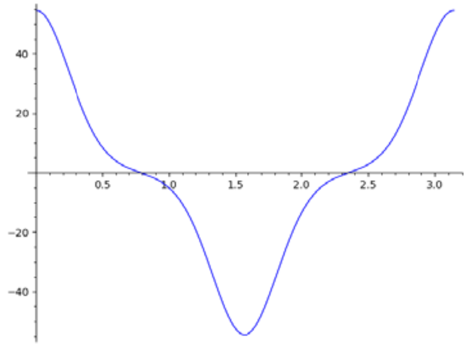
Sage aşağıdakı qrafiki verir:



3. İndi isə digər funksiyaya baxaq:

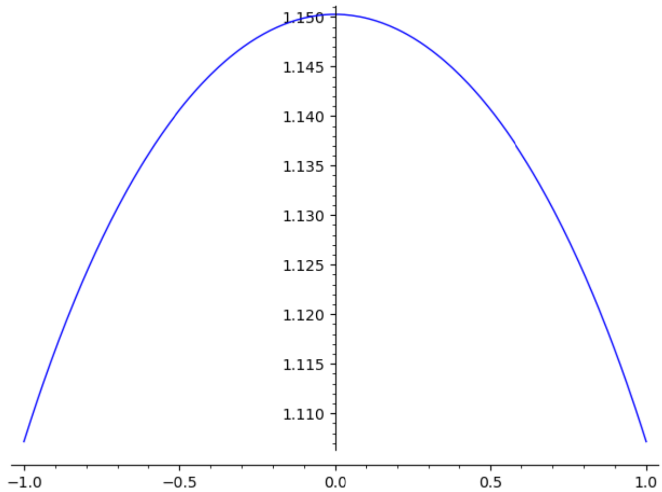
y=e^(4*cos(2*x)- e^(-4*cos(2*x)/

Sage aşağıdakı qrafiki verir.

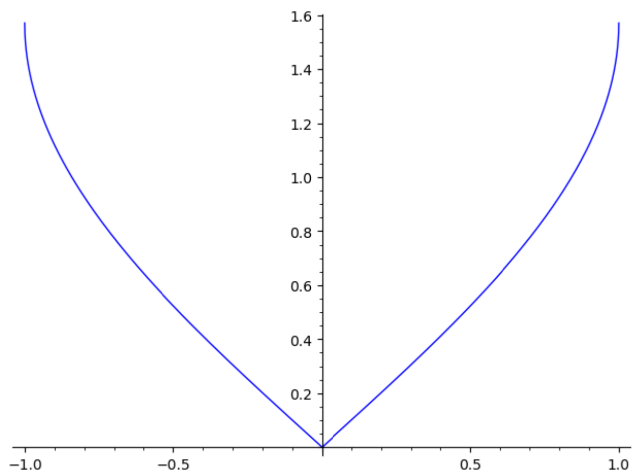


Aşağıda daha bir neçə funksiyanın qrafiklərini nəzərdən keçirək.

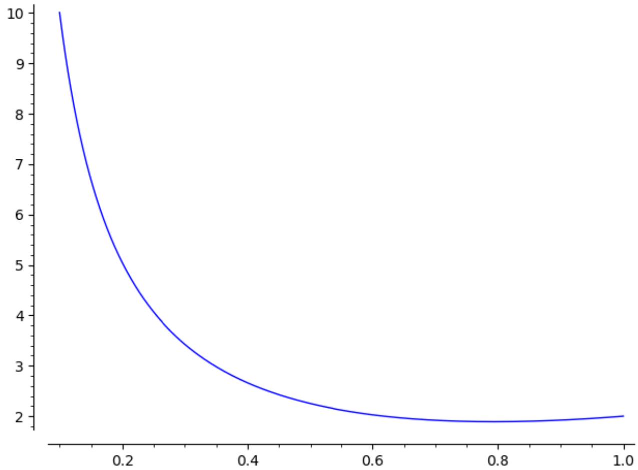
5.f(x)=arctan(sqrt(5-x^2)) funksiyasının (-1,1) aralığında qrafikini quraq.



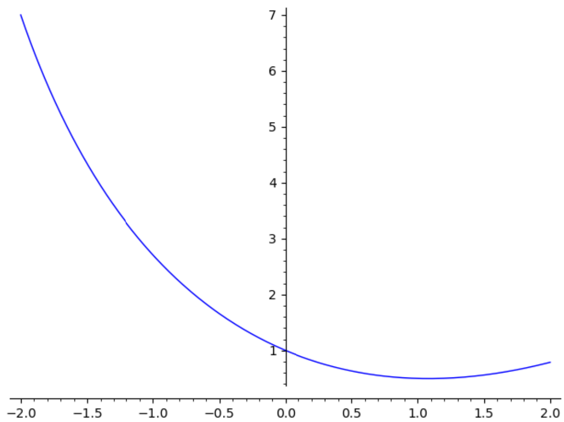
6.f(x)=arccos(sqrt(1-x^2)) , x$\in$(-1,1)



7. f(x)=x^2+x^(-1), x∈(0,5) (Nüton üçdişlisi).



8. f(x)=1-x+sqrt(x^3/(3+x)) funksiyasının (-2,2) aralığında qrafikini quraq.

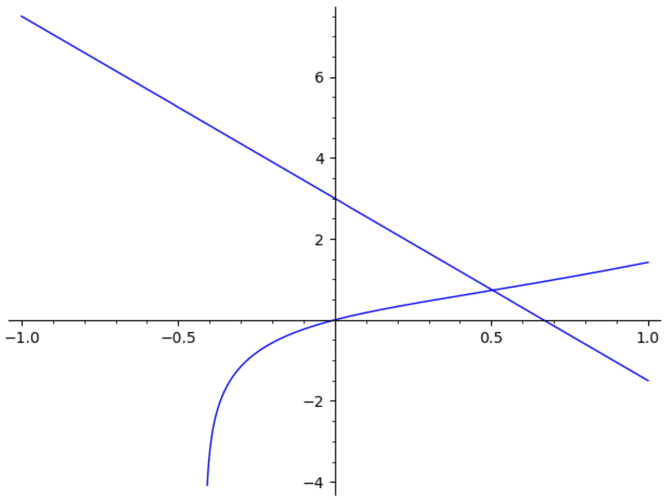


Qrafiklərin qurulmasından qeyri-standart tənliklərin qrafik həlli üçün istifadə etmək olar. Belə sistemlərdən bəzilərinə baxaq. Tutaq ki,

f(x)=(sqrt(1+x^2))*ln(x+sqrt(1+x*2)).

9. Aşağıdakı tənliyi qrafik üsulla həll edək: f(x)=3-4.5x.

f(x) və y=3-4.5x funksiyaların (-5,5) aralığında qrafikini quraq.

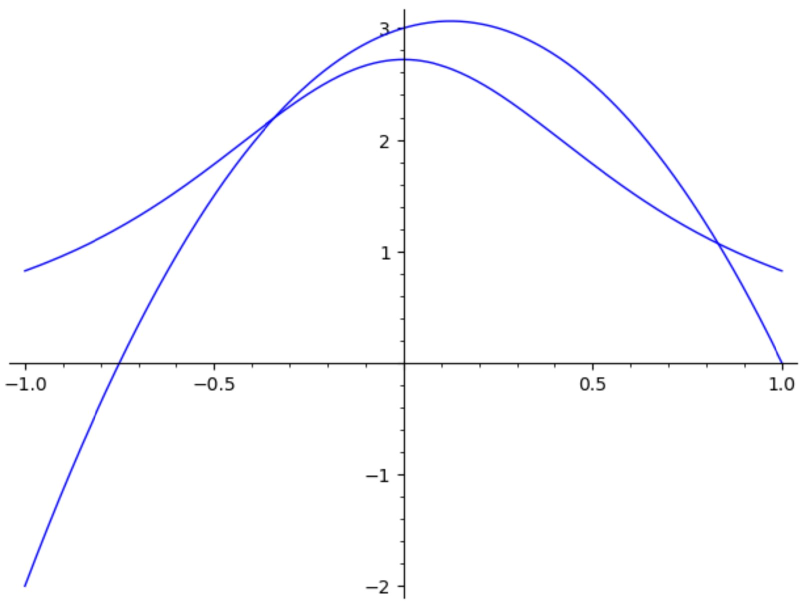


Tənliyin təqribi həlli belədir: x=0.5, y=0.75.

10. f(x)=e^(1/(1+x^2))/(1+x^2) olduqda f(x)=3+x-4x^2 tənliyinin təqribi həllərini tapaq. Bunun üçün bu funksiyaların (-5,5) aralığında qrafiklərini quraq. Sage proqramında belə kodlar daxil edək:

Sage: plot(e^(1/(1+x^2))/(1+x^2))+plot(3+x-4*x**2)

Sage aşağıdakı qrafikləri verir. Göründüyü kimi x=-0.35, y=2.85 və x=0.83 və y=1.76.



ƏDƏBİYYAT

1. *P. Zummerman and others.* Computational Mathematics with SageMath. https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en.
2. *W. Stein.* Algebraic Number Theory, A Computational Approch., November 14, 2012.
3. *О.Н.Перминов.* Язык программирования Паскаль: Справочник. — М.: Радио и связь, 1989.

Redaksiyaya daxil olub 13.07.2021