

Riyaziyyat və mexanika

UOT 2010: 47b33, 47B37, 47B38, 47B48, 47C05

Z.A.Pənahova

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
zumrudpanahova@gmail.com

FRAKTAL ÇOXLUQLAR VƏ ONLARIN AFİN ÇEVİRMƏLƏR VASİTƏSİLƏ GÖSTƏRİLMƏSİ

<https://doi.org/10.30546/2520-2049.73.3.2025.001>

Açar sözlər: *Fraktal çoxluq, ölçü, Hausdorf ölçüsü, afın çevirmə, özü-özünü təkrarlayan çoxluq*

Məqalədə fraktal çoxluq dedikdə Evklid fəzasında elə nöqtələr çoxluğu nəzərdə tutulur ki, onun metrik ölçüsü kəsir vasitəsilə göstərilir, və yaxud metrik ölçüsü topoloji ölçüsündən fərqlidir. Cəbri şəkildə fraktal çoxluqlar cəbri tənliklər və yaxud cəbri tənliklər sistemi vasitəsilə qurulur.

З.А.Панахова

ФРАКТАЛНЫЕ МНОЖЕСТВА И ПЕРЕСТАВЛЕНИЕ ИХ НА АФИННОМ ПЕРЕОБРАЗОВАНИИ

Ключевые слова: *фрактальные множества, размер, метрика Хаусдорфа, аффинное преобразование, самоподобные множества*

В математике под фракталами понимают множества точек в евклидовом пространстве, имеющие дробную метрическую размерность, либо метрическую размерность, отличную от топологической. Алгебраические фрактальные множества строятся с использованием алгебраических уравнений или систем уравнений.

FRACTAL SETS AND THEIR REPRESENTATION BY AFFINE TRANSFORMATIONS

Keywords: *Fractal set, measure, Hausdorff measure, affine transformation, self-repeating set*

In the article, a fractal set is a set of points in Euclidean space whose metric measure is expressed by a fraction or whose metric measure is different from the topological measure. Algebraically fractal sets are constructed using algebraic equations or systems of algebraic equations.

Fraktal sözü latın sözü olub ilk dəfə (fraktus) 1975-ci ildə Benua Mandelbort tərəfindən riyaziyyata gətirilib. Mandelborta qədər fraktaltala sırf riyazi tərif verilməmişdi. Fkraktal elə çoxluqdur ki, onun Hausdorf ölçüsü, topoloji ölçüdən ciddi böyükdür. Bundan başqa, fraktala belə də tərif verirlər. Fraktal elə strukturdur ki, kiçik hissələrə ayrılıb və bu hissələr tam olaraq strukturun özünə bənzəyir. Bu deyilənlər əsasında söyləyə bilərik ki, bizim ona baxdığımız miqyasdan asılı olaraq fraktal bir tam olaraq görünür. Fraktallar iki böyük sinfə ayrılır konstruktiv və dinamik fraktallar. Məsələnin qoyuluşundan asılı olaraq fraktalları aşağıdakı kimi qruplara ayırmaq olar: həndəsi, cəbri, stoxastik, kütləvi. Fraktallar xətlər, müstəvilər, fəza fiqurları ola bilər. Fraktal çoxluqlarla əlaqəli ideyalar XIX əsrdə Georq Kantor, Karl Veyrştras, Cüzeppe Peano, Hausdorfun işlərində rast gəlinib. Fraktal (kəsirli ölçü) anlayışı Feliks Hausdorfun əsərlərində 1919-cu ildə rast gəlinib. Yalnız Mandelbort bu ideyaları birləşdirərək və sistematik quraraq fraktal çoxluq və onun tətbiqlərini öyrənib. Evklid həndəsəsində nöqtə - uzunluğu və eni olmayan obyekt; xətt uzunluğu olub, eni və hündürlüyü olmayan obyekt. Bu anlayışlar insanlığın material əşyalarla işləyərkən əldə etdiyi anlayışlardır. Evklid həndəsəsində verilmiş elementlərin analitik ifadəsini yazmaq üçün “uzunluq”, “hündürlük”, “en” anlayışlarını əvəz edən xarakteristik baxış lazım idi. d parametri –Həndəsi obyektin ölçüsü anlayışıdır, hansı ki, topoloji ölçü ilə üst-üst düşməyə də bilər. D_T - topoloji ölçü dedikdə verilmiş fəzanın nöqtələrini təsvir etmək üçün minimum həqiqi para metrərin sayı başa düşülür. Evklid həndəsəsində obyektlər üçün təyin olunan ölçü $d \leq D_T$ (Evklid fəzasında topoloji ölçü $D_T = 3$, nöqtənin ölçüsü $d = 0$, ixtiyari düz xəttin ölçüsü $d = 1$, müstəvinin ölçüsü $d=2$, fəzanın ölçüsü $d = 3$ olur.

R^n – Evklid fəzasının topoloji ölçüsü - D_T ; Hausdorf Beznikoviç ölçüsü D_H olsun. Hər iki ölçü sıfır ilə n arasında dəyişir. Belə ki, topoloji ölçü həmişə

tam ədəd olur, amma Hausdorf Beznikoviç ölçüsü tam olmaya da bilər. $D_H = D_T$, ümumi halda $D_H \leq D_T$. Lakin elə çoxluqlar var ki, $D_H > D_T$. Ölçüləri bu şəkildə olan çoxluqları təyin etmək üçün yeni bir çoxluqlar nəzəriyyəsi lazım idi. İstənilən çoxluğun D_H qiyməti tam deyilsə belə çoxluqlar fraktal çoxluqlar adlanır. Fraktallar həmçinin tam ölçülü də ola bilər $D_T < D_H \leq n$. Bənuə Mandelbort belə ölçünü fraktal ölçü adlandırmışdı. Mandelborta görə fraktal ölçü topoloji ölçü deyil. Lakin metrik məndə fractal çoxluqlar metrik fəza təşkil edir, belə ki iki nöqtə arasında məsafə təyin olunur. Bu əsasda ölçü çoxluqda d-ölçülü kürələrin örtüklərinin çoxluğu kimi təyin olunur. Kantora görə məhdud çoxluğun qapanmasında hər bir nöqtə kürənin mərkəzi kimi təyin olunur [2; 3].

Fraktal çoxluqlara özü-özünü təkrarlayan çoxluqlar kimi baxmaq olar. Məsələn düz xətt parçasını N bərabər hissəyə bölək. Onda hər bir hissəni parçanın $\frac{1}{r}$ dəfə kiçilmiş sürəti kimi qəbul etmək olar. Burada N və r , $N \cdot r = 1$ münasibətində olar. Əgər kvadratı N bərabər kvadrata bölsək s hər bir kvadratin sahəsi əvvəlkinə nisbətən $\frac{1}{r^2}$ dəfə azalar $N \cdot r^2 = 1$. Əgər kubu N bərabər kuba bölsək (onda həcmi $\frac{1}{r^3}$ dəfə əvvəlkinə nisbətən azalar) $Nr^3 = 1$ cismin ölçüsü olan d istər bir ölçülü olan parça, iki ölçülü kvadrat, üç ölçülü kub olsun, N ilə r -in qüvvətinin hasilə olaraq altçoxluqların yaratdığı təkrarlanma əmsalı kimi təyin olunur [1; 6].

$$N \cdot r^d = 1 \quad (1)$$

Ölçüsü tam ədəd olan çoxluqda elə bir qurma aparmaq olarmı ki, (1) bərabərliyindəki çoxluğun ölçüsü d ədədi tam ədəd olmasın, Bəli verilmiş çoxluğu N , sayda kəşiməyən altçoxluğa ayırsaq orijinalı ilə r əmsalı ilə fərqlənən d ədədi tam ədəd olmayacaq. (1) bərabərliyini hər iki tərəfdən loqarifimləyək, qeyd edək ki, istənilən əsasdan loqarifimləmək olar.

$$d = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$$

Bu çoxluqlar özü-özünü təkrarlayan çoxluqlardır. Burada d ədədi fraktal (kəsirli) ölçü adlanır. Fraktal çoxluqlara belə də tərif vermək olar. Paralel köçürmə nəticəsində miqyası dəyişilən və özü-özünü təkrarlayan çoxluqlara fraktal çoxluqlar deyilir. Miqyasın n dəfə dəyişməsinə $n(N)$ ilə işarə edək. Onda miqyası dəyişən obyekt əvvəlkinə nəzərən $n(n) = \frac{1}{N^d}$ əmsalı ilə təyin

olunacaq, burada N özü-özünü təkrarlayan eyni hissələrin miqdar sayıdır, d -özü özünü təkrarlama əmsalı olub obyektin topoloji ölçüsünə bərabərdir. Özü-

özünü təkrarlayan həndəsi fraktallarda $n(N) = \frac{1}{N^{\overline{D}_s}}$ Burada D_H Hausdorf-Beznikoviç ölçüsü ilə üst-üstə düşür.

$$D_s = \frac{\ln N}{\ln n}$$

Məsələn, belə bir fraktal çoxluğa baxaq; kvadratı $N = 4$, yəni tərəfləri $n = 2$ dəfə kiçik olan dörd bərabər kvadrata bölək. Onda kvadrat üçün özü- özünü təkrarlama əmsalı topoloji ölçüyə bərabər olub 2 bərabər olar. kubu $N = 8$ bərabər hissəyə bölsək $D_s = 3$ olar.

$$D_s = \frac{\ln 8}{\ln 2} = 3$$

Bu dediklərimizə əsasən fraktal çoxluqlar özü-özünü təkrarlayan çoxluqlar olduğu üçün bu çoxluqları Affin çevirmələrdən istifadə edərək göstərmək daha əlverişlidir.

İterativ funksiyaların köməyi ilə təyin edilmiş matris formalardan istifadə etmək olar. R^n fəzasında xətti çevirmələr hərəkət çevirməsi ilə birlikdə Affin çevirmə təşkil edir. Affin çevirmələri $R^2 \rightarrow R^2$ -yə təyin etsək, digər nəticələri n -ölçülü fəzalarda da olduğu kimi təyin olunur.

L çevirməsi o vaxt R^n fəzasından R^m fəzasına xətti çevirməsi olar ki,

$$L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y)$$

şərti ödənilsin, burada $x, y \in R^n$.

Teorem: $L: R^n \rightarrow R^m$ hər hansı xətti çevirmədir, onda elə (mxn) ölçülü A matrisi var ki,

$$L(x) = A \cdot x, x \in R^n$$

İsbatı: R^n fəzasında standart bazis götürək.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ n \end{pmatrix}, x \in R^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Onda $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ xətti asılılığın tərifinə əsasən

$$L(x) = x_1 L(e_1) + x_2 L(e_2) + \dots + x_n L(e_n) \\ L(e_1), L(e_2), \dots, L(e_n)$$

Vektorları R^m -dən götürülmüş $(m \times 1)$ ölçülü sütun vektorlardı. Bu sütunlardan $(m \times n)$ ölçülü matris düzəltmək.

$$Ax = [L(e_1), L(e_2), \dots, L(e_n)] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$T(x) = x + a, x \in R^n$$

Çevirməsi R^n fəzasında hərəkəti təyin edir, burada a sabit vektordur, T isə R^n də a vektorunun bütün konfigurasiyalarıdır. Bu halda R^n fəzasında istənilən T afin çevirməsi $[x, y]$ parçasını $T[x, y]$ parçasına keçirir. Belə ki, T çevirməsi təpə nöqtələri X, Y, Z olan üçbucağın sahəsini təpə nöqtələri $L[X], L[Y], L[Z]$ olan üçbucağın sahəsinə keçirir.

$$T(x) = Ax + a, x \in R^n$$

şəklində təyin olunur. Əgər fəza R^2 olarsa

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

İndi isə Serpinski fraktal çoxluğunu Afin çevirmələrdən istifadə edərək quraq. Serpinski fraktal çoxluğu dedikdə üçbucağın özünə oxşar olan üçbucaqlara bölünməklə alınan çoxluq nəzərdə tutulur. Verilmiş üçbucaq T olsun. İlk mərhələdə bu üçbucaqların orta xətlərini çəkməklə onu özünə oxşar olan üç dənə T_1, T_2, T_3 üçbucağına ayırmaq olar. Prosesi bu şəkildə davam etdirməklə Serpinski fraktal çoxluğu alınır. Bu çoxluğu matris formada yazmaq [4; 5].

$$T_1 \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T_2 \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

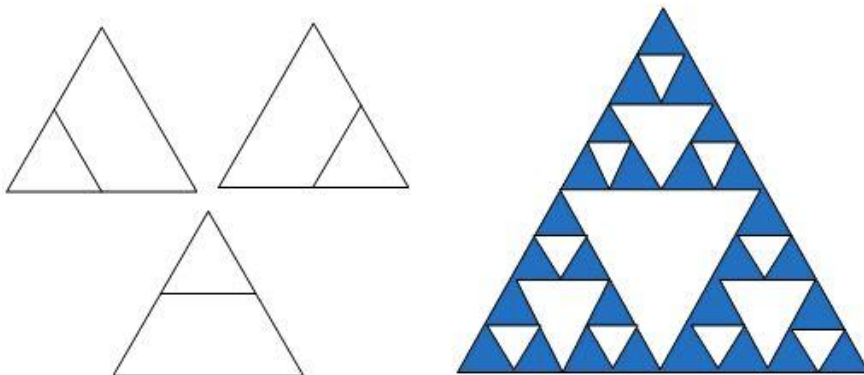
$$T_3 \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}$$

T_1 üçbucağından T_2 yə keçərkən verilmiş üçbucağın onunla 3 eyni üçbucağa ayrıldığını və bu üçbucaqların tərəflərinin 2 dəfə kiçildiyini görürük. Buna görə də oxşarlıq əmsalı $r = \frac{1}{2}$ olar. Burada Serpinski üçbucağının fraktal ölçüsü $D_s = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,58496$ olar. Bu fraktal çoxluğun sahəsini hesablayaq.

Fərz edək ki, T_1 -in sahəsi S -dir, ilk addımda atılan üçbucağın sahəsi $\frac{S}{4}$ olar, ikinci addımdakı üç üçbucağın sahəsi $\frac{S}{4^2}$ olar. Bütün atılan üçbucaqların sahəsi

$$\frac{S}{4} + \frac{3S}{4^2} + \frac{3S}{4^3} + \dots = \frac{S}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{S}{4\left(1-\frac{3}{4}\right)} = S$$

Beləliklə, Serepinski üçbucağının sahəsi sıfıra bərabər olur.



ƏDƏBİYYAT

1. *A.N.Герега.* Конструктивные фракталы в теории множеств Одесса.2017.84с
2. *Кроновер Р.М.* Фракталы и Хаос в динамических системах: Основы теории. - М.: Постмаркет, 2000.-352 с
3. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. - М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с
4. *Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М.* Е-энтропия и ε-ёмкость множеств в функциональных пространствах. // УМН. – 1959. – Т. 14, вып. 2 (86). – С. 3-86.
5. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. – М.:Мир, 1967. – 251 с.
6. *Kahane J.P., Salem R.* Ensembles parfaits et series trigonometriques. – Paris: Hermann, 1963. – 192 p.
7. *Божокин С.В., Паришин Д.А.* Фракталы и мультифракталы. – Ижевск: НИЦ РХД, 2001. – 128 с.

Redaksiyaya daxil olub 02.05.2025