Cild 19 № 2 2019

UOT 517.1

VURUQLARA AYIRMA ÜSULU İLƏ BƏZİ KUB TƏNLİKLƏRİN HƏLLİ

AĞAYAROV MƏTLƏB HÜSEYNQULU oğlu
Sumqayıt Dövlət Universiteti, dosent
abdullayev_ayxan@list.ru

Açar sözlər: *kub tənlik, vuruqlara ayırma, qeyri-müəyyən əmsallar üsulu, sərbəst həddin bölənləri*

Kvadrat tənliyin xüsusi növlərini hələ babillilər 4000 il əvvəl həll etməyi bacarırdılar. Qədim yunan riyaziyyatçıları kvadrat tənliklərin ayrı-ayrı növlərini həndəsi qurmalara gətirməklə həll edirdilər.

IX-XV əsrlər ərəb riyaziyyatçılarının əsərlərində birdərəcəli və ikidərəcəli tənliklərin və tənliklər sisteminin həllindən başqa, kub tənliklərin xüsusi şəkillərinin həllərini nəzərdən keçiriblər. Amma həmin tənliklərin həll üsulları köklərin təqribi qiymətlərinin tapılmasına gətirirdi. Kub tənliklərin təsnifatı, həndəsi həllinin ümumi nəzəriyyəsi və köklərinin araşdırılması sahəsində Ö.Xəyyamın (1048-1131) böyük rolu olmuşdur. Üçdərəcəli və dörddərəcəli tənliklərin həlli sahəsində sonrakı inkişafda əsas rolu XVI əsr italyan riyaziyyatçıları oynamışlar.

$ax^3+bx^2+cx+d=0 (a\neq 0)$ tənliyinin yeni dəyişən daxil etməklə $x^3+px+q=0$ şəklinə gətirilə bilməsi hələ çox əvvəllərdən məlum idi.

$x^3+px=q\ (p>0, q>0)$ tənliyinin müsbət kökünün tapılması üçün düsturu ilk dəfə S.Del-Ferro (1465-1526) çıxarmışdı və bunu gizli saxlayırdı. Bununla eyni vaxtda üçdərəcəli tənliklərin həlli ilə N.Tartalya (1499-1597) da məşğul idi.

Tartalya $x^3+px=q, x^3+qx=p,\ x^3+p=qx$ şəklində tənliklərin və $x^3+px^2=-p$ $(p>0, q>0$ tənliyinin xüsusi hallarının həlli üsullarını tapmışdı. 1539-cu ildən kub tənliklərinin həlli ilə C.Kardano (1501-1576) məşğul olmağa başlayır. Onun 1545-ci ildə çap olunmuş kitabında kub tənliklərin ümumi həll üsulları nəzərdən keçirilmişdir. Bu kitaba o, həm də şagirdi L.Ferrarinin (1522-1565) dörddərəcəli tənliklərin həlli metodu haqqında kəşfini də daxil etmişdi.

Lakin nə Tartalya, nə də Kardano kub tənliklərin həllini tam tədqiq etməmişlər.

Üçdərəcəli və dörddərəcəli tənliklərin həlli ilə bağlı məsələnin tam şərhini F.Viyet (1540-1603) vermişdir. Kvadrat tənliyin kökləri düsturunda kök işarəsindən (radikal) istifadə olunur. Üç və dörddərəcəli tənliklərin kökləri də radikallarla (iki, üç və dörddərəcəli köklər) ifadə edilir. Sonrakı 300 ilə yaxın vaxt ərzində istənilən dərəcəli tənliklərin həll düsturlarının tapılmasına cəhdlər edildi. XIX əsrin 20-ci illərində Norveç riyaziyyatçısı N.Abel (1802-1829) isbat etdi ki, beş və daha yüksək dərəcəli tənliklərin kökləri ümumi halda radikallarla ifadə edilə bilməz. Fransız riyaziyyatçısı E.Qalua (1811-1832) radikallarla həll edilə bilən cəbri tənliklər sinfini müəyyənləşdirdi. Cəbri tənliklərin həlli sahəsində əldə olunmuş nailiyyətlər həqiqi ədədlərin daha incə təsnifatını verməyə imkan yaratdı. Tam əmsallı cəbri tənliklərin kökləri olan ədədləri cəbri ədədlər adlandırmağa başladılar. Cəbri ədəd olmayan ədədləri transendent ədədlər adlandırdılar. Məlum oldu ki, irrasional ədədlər çoxluğunda transendent ədədlər cəbri ədədlərdən xeyli çoxdur (transendent ədədlərdən biri π ədədidir). Eləcə də həqiqi olmayan ədədlər (kompleks ədədlər) ideyası yaranmağa başladı.

İstənilən üçdərəcəli tənliyin heç olmasa bir həqiqi kökü var, digər iki kökü isə ya həqiqi, ya da qoşma kompleks ədədlərdir.

Ona görə də istənilən kub tənliyin sol tərəfini vuruqlarından biri xətti, digəri isə kvadratik ifadə olan iki vuruğun hasili şəklində göstərmək olar:

$$p(x) = (x - x_0)(a_3x^2 + bx + c).$$

Öz növbəsində $a_3x^2 + bx + c$ ikidərəcəli çoxhədlisinin iki müxtəlif həqiqi kökü, bir həqiqi kökü və iki qoşma kompleks kökü ola bilər.

Ona görə də $p(x)$ çoxhədlisi üçün aşağıdakı ayrılışlar mümkündür:

1. $p(x) = a_3(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$,
2. $p(x) = a_3(x - x_0) \cdot (x - x_1)^2$,
3. $p(x) = a_3(x - x_0)^3$,
4. $p(x) = (x - x_0) \cdot (a_3x^2 + bx + c)$, əgər $b^2 - 4a_3c < 0$ olarsa.

Beləliklə, hər bir hal üçün ayrılışın hər bir vuruğunu sıfra bərabər etməklə kub tənliyin bütün köklərini tapmaq olur.

Vuruqlara ayırma üsulu ilə bəzi kub tənliklərin həllinə baxaq.

Misal 1. $x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$ tənliyini həll edək.

Həlli. Tənliyin sərbəst həddinin (6-nın) bölənləri $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ ədədləridir. Deməli, kökləri bu ədədlər arasında axtarmaq lazımdır. Asanlıqla əmin ola bilərik ki, 1 ədədi verilən tənliyin həllidir. Deməli, verilən tənlik $(x - 1) \cdot (a_3x^2 + bx + c) = 0$ tənliyi ilə eynigüclüdür. $a_3x^2 + bx + c$ çoxhədlisini tapmaq üçün verilən tənliyin sol tərəfini $(x - 1)$-ə bölmək lazımdır. Çoxhədlini ikihədliyə bölmək üçün Hörner sxemini tətbiq edək.

1	-3	-4	$6 \ \vdots\ 1$
$+0$	$1 \cdot 1 = 1$	$-2 \cdot 1 = -2$	$-6 \cdot 1 = -6$
1	-2	-6	0

Beləliklə, alırıq ki, $x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = (x - 1)(x^2 - 2x - 6)$. Deməli, verilən tənlik $(x - 1)(x^2 - 2x - 6) = 0$ tənliyinə eynigüclüdür. Bircə o qalır ki, $x^2 - 2x - 6 = 0$ tənliyini həll edək. Bu tənliyi həll etsək, $x_1 = -1 + \sqrt{7}, x_2 = -1 - \sqrt{7}$ köklərini taparıq.

Kub tənlikləri vuruqlara ayırma üsulu ilə həll etmək üçün bir üsul da qeyri-müəyyən əmsallar üsuludur. Bu üsul kifayət qədər mürəkkəb olsa da bəzən müxtəlif növ kub tənliklərin həllində çox faydalı olur.

Yuxarıda qeyd etdik ki, ixtiyari üçdərəcəli çoxhədlini $p(x) = (x - x_0)(a_3x^2 + bx + c)$ şəklində vuruqlara ayırmaq olar. Mötərizələri açıb onu standart şəkilli çoxhədliyə gətirək:

$$p(x) = a_3x^3 + x^2(b - a_3x_0) + x(c - bx_0) - cx_0.$$

x -in uyğun dərəcələrinin əmsallarını bərabərləşdirməklə, dörd a_3, b, c və x_0 məchullarından ibarət ibarət dörd tənlik alarıq. Bu üsulun tətbiqinə aid misala baxaq.

Misal 2. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ tənliyini həll edək.

Həlli. İstənilən üçdərəcəli çoxhədlini $a_3x^3 + x^2(b - a_3x_0) + x(c - bx_0) - cx_0$ şəklində göstərmək mümkün olduğundan x -in uyğun dərəcələrinin əmsallarını bərabərləşdirməklə aşağıdakı tənliklər sisremini alarıq:

$$\begin{cases} a_3 = 1, \\ b - a_3x_0 = 2, \\ c - bx_0 = -5, \\ -cx_0 = -6 \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} b - x_0 = 2, \\ c - bx_0 = -5, \\ -cx_0 = -6. \end{cases}$$

Sistemin birinci tənliyindən $x_0 = b - 2$ tapıb, onu digər iki tənlikdə nəzərə alsaq:

$$\begin{cases} c - b(b - 2) = -5, \\ -c(b - 2) = -6 \end{cases}$$

tənliklər sistemini alarıq. Burada birinci tənlikdən c-ni tapıb, ikinci tənlikdə yerinə yazaq və alınan tənliyi həll edək:

$$(b(b - 2) - 5)(b - 2) = 6 \Leftrightarrow b^3 - 4b^2 - b + 4 = 0 \Leftrightarrow (b^3 - 4b^2) - (b - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b - 4)(b^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (b - 4)(b - 1)(b + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 4, \\ b = 1, \\ b = -1. \end{array}\right.$$

Əgər $b = 4$ olarsa, onda $c = 3, x_0 = 2$ olar.

Deməli, $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x-2)(x^2-4x+3) = (x-2)(x-1)(x-3)$.

Əgər $b = 1$ olarsa, onda $c = -6, x_0 = -1$ olar.

Deməli, $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+2)(x^2+x-6) = (x+2)(x+3)(x-2)$.

Əgər $b = -1$ olarsa, onda $c = -2, x_0 = -3$ olar.

Deməli, $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+3)(x^2-x-2) = (x+3)(x-2)(x+1)$.

Beləliklə, alırıq ki, verilən tənlik $(x+3)(x-2)(x+1) = 0$ tənliyi ilə eynigüclüdür. Onda verilən tənliyin həlli $x = -3, x = 2, x = -1$ kimi olur.

Kub tənliklərdən biri olan qayıtma tənliyin həlli üçün məlum üsulllardan biri də aşağıdakı kimidir.

Məlumdur ki, $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ tənliyi üçdərəcəli qayıtma tənlik adlanır. Burada a, b əmsallardır. Bu tənlyi sol tərəfini vuruqlara ayırmaqla həll edək.

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow (ax^3 + a) + (bx^2 + bx) = 0 \Leftrightarrow a(x^3+1) + b(x^2+x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(x+1)(x^2-x+1) + bx(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(ax^2+(b-a)x+a) = 0.$$

Aydındır k, bu tənliyin həmişə $x = -1$ kimi həlli var, digər köklər isə $ax^2 + (b-a)x + a = 0$ kvadrat tənliyindən tapılır.

Misal 3. $5x^3 - 8x^2 - 8x + 5 = 0$ tənliyini həll edək.

Həlli. $5x^3 - 8x^2 - 8x + 5 = 0 \Leftrightarrow 5(x^3+1) - 8(x^2+x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5(x+1)(x^2-x+1) - 8x(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(5x^2-13x+5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ 5x^2-13x+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = \dfrac{13+\sqrt{69}}{10}, \\ x_2 = \dfrac{13-\sqrt{69}}{10}. \end{array}\right.$$

Elə tip kub tənliklər var ki, onların sol tərəfini müxtəsər vurma düsturunun köməyi ilə vuruqlara ayırmaq olur. Məsələn, tutaq ki, $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = 0$ tənliyin həll etmək lazımdır. Tənliyin sol tərəfini vuruqlara ayırmaqla onu həll edək:

$$8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = 0 \Leftrightarrow (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 3 + 3\cdot(2x)\cdot 3^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \tfrac{3}{2}.$$

Başqa bir misala baxaq.

$$5x^3 - x^2 - 20x + 4 = 0 \Leftrightarrow (5x^3 - 20x) - (x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow 5x(x^2-4) - (x^2-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4)(5x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(5x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2, \\ x = 0{,}2. \end{array}\right.$$

$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ kub tənliyinin sol tərəfini vuruqlara ayırmaq mümkün deyilsə, bu tənliyi başqa üsulla həll etmək olar: tənliyin rasional kökünü seçməklə (əgər varsa). Bunun üçün aşağıdakı təkliflərdən istifadə etmək olar:

1. Əgər $a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0$ olarsa, verilən tənliyin $x = 1$ kökü var.

2. Əgər $a_3 + a_1 = a_2 + a_0$ olarsa, verilən tənliyin $x = -1$ kökü var.

3.Tutaq ki, a_3, a_2, a_1, a_0 tam ədədlərdir. Onda əgər tənliyin $\frac{p}{q}$ şəklində rasional kökü varsa, onda a_0 p-yə, a_3 isə q-yə bölünür.

Misal 4. 1) $7x^3 + 3x^2 - x - 9 = 0$ tənliyinin əmsalları cəmi $7 + 3 - 1 - 9 = 0$ olduğundan, $x = 1$ verilən tənliyin köküdür (yeganə olmaya da bilər);

2) $4{,}5x^3 - 3x^2 - 0{,}5x + 7 = 0$ tənliyi üçün $4{,}5 - 0{,}5 = -3 + 7$ olduğundan, $x = -1$ verilən tənliyin köküdür;

3) $2x^3 + 5x^2 + 3x - 3 = 0$ tənliyinin əmsalları tam ədədlərdir. Ona görə kökü sərbəst həddin (-3) $\pm1; \pm3$ bölənləri içərisindən seçmək olar. Baş əmsalın, yəni 2-nin bölənləri isə $\pm1: \pm2$ -dir. Deməli, rasional köklərin bütün mümkün kombinasiyaları $\pm1; \pm\frac{1}{2}; \pm3; \pm\frac{3}{2}$

ədədləridir. Növbə ilə bu ədədləri tənlikdə yerinə yazsaq, alarıq ki, $x=\frac{1}{2}$ verilən tənliyin həllidir. Doğrudan da, $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\frac{1}{2}-3=0\Leftrightarrow 0=0.$ Qeyd edək ki, əgər tənliyin əmsalları rasional ədədlərdirsə, onda onun hər tərəfini əmsalların ortaq məxrəcinə vurmaqla, onu tam əmsallı tənliyə gətirmək lazımdır. Məsələn, $\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x+2=0$ tənliyinin hər tərəfini 6-ya vurmaqla, onu $3x^3+x+12=0$ tənlyinə gətirmək olar.

Vuruqlara ayırma üsullarına əsaslanaraq bəzi kub tənliklərin müxtəlif üsullarla həlli verilmişdir. Mövcud dərsliklərdə bu mövzu kifayət qədər verilmədiyindən baxılan problemin tədqiqinin nəticələri kub tənliklərin təliminin intensivləşdirilməsində aktuallıq kəsb edir. Tədqiqatın nəticələrindən riyaziyyatı dərindən öyrənən siniflərdə və olimpiadalara hazırlıq üçün istifadə edilə bilər.

ƏDƏBİYYAT

1. Əkbərov M.S. Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi. Bakı: Nurlar, 2005, 896 s.
2. Виленкин Н.Я. и др. Алгебра и математический анализ для 10 класса. Уч. пособие. М.: Просвещение, 1995, 335 с.
3. htths;//shkolkovo. net/catalog/reshenie uravnenij 2/kubicheskie.

РЕЗЮМЕ

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КУБИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ

Агаяров М.Г.

Ключевые слова: *кубическое уравнение, разложение на множители, метод неопределенного коэффициента, делители свободного члена.*

В статье рассматривается решение некоторых кубических уравнений. С этой целью использовался метод разложения на множители, метод неопределенного коэффициента и поиск рационального корня уравнения.

SUMMARY

SOLUTION OF SOME CUBIC EQUATIONS WITH FACTORİZATION METHODS

Aghayarov M.H.

Key words: *cubic equation, factorization, method of undetermined coefficient, the divisors of the free term.*

The article deals with the solution of some cubic equations. For this purpose, the factoring method, the indeterminate coefficient method and the search for a rational root of the equation were used.

Daxilolma tarixi: İlkin variant 13.02.2019

Son variant 24.06.2019