Sumqayıt Dövlət Universiteti – **"ELMİ XƏBƏRLƏR"**– Təbiət və texniki elmlər bölməsi
Cild 21 № 1 2021
UOT 517.956.6

İKİÖLÇÜLÜ, XƏTTİ $\frac{2}{3}$-TƏRTİBLİ ELLİPTİK TİP DİFERENSİAL TƏNLİYİN FUNDAMENTAL HƏLLİNİN KOŞİ-RİMAN TƏNLİYİNİN FUNDAMENTAL HƏLLİNDƏN ALINMASI

[1]ƏLİYEV NİHAN ƏLİPƏNAH oğlu
[2]İBRAHİMOV NATİQ SƏHRAB oğlu
[3]QULİYEV ALLAHŞÜKÜR ƏZİZAĞA oğlu
Bakı Dövlət Universiteti, 1-professor,
Lənkəran Dövlət Universiteti, 2-professor, 3-dissertant,
quliyev_allahsukur@mail.ru

Açar sözlər: *Koşi-Riman tənliyi, $\frac{2}{3}$-tərtib elliptik tip tənlik, fundamental həll, faktorizasiya, Laplas tənliyi.*

İşdə iki ölçülü, xətti $\frac{2}{3}$-tərtibli diferensial tənlik ilə Koşi-Riman tənliyininin fundamental həlləri arasında əlaqə faktorizasiya üsulundan istifadə etməklə tapılmışdır. Belə ki, birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən, iki ölçülü, xətti $\frac{2}{3}$-tərtibli elliptik tip tənliyin fundamental həlli alınmışdır.

Giriş: Bilirik ki, adi diferensial tənliyin fundamental həlli dedikdə "asılı olmayan" həllər başa düşülür [1, 2, 5] . Riyazi fizika tənliklərində və xüsusi törəməli tənliklər nəzəriyyəsində sərhəd məsələlərinə əsasən elliptik tip tənliklər üçün fundamental həllər [3, 6, 9, 10] işlərində baxılmışdır. Bu işlərdə elliptik tip tənliyin model (kanonik) şəkli Laplas tənliyidir. Sonralar birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyi üçün əsasən qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində məsələlərə [7, 8, 11, 12, 13] işlərində baxılmışdır.

Burada isə faktorizasiyadan istifadə etməklə, Koşi-Riman tənliyindən $\frac{2}{3}$ tərtibli xətti elliptik tip tənlik alınaraq bu tənliyin kəsr tərtib törəmənin tərifindən istifadə etməklə [4] işində fundamental həlli üçün analitik ifadə alınmışdır.

Qeyd edək ki, [3]-də bir çox klassik tənliklər üçün fundamental həllərin alınmasına bir fəsil həsr olunmuşdur.

Bir daha qeyd edək ki, verilmiş sərhəd məsələsinin Qrin fünksiyasının qurulması fundamental həll ilə müqayisədə çox çətin prosesdir. Ancaq fundamental həlldən istifadə etməklə məsələnin fredholmluğu [13]-də bir çox məsələlər üçün aparılmışdır.

Məsələnin qoyuluşu.

Məlumdur ki [3],

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = 0, \tag{1}$$

Koşi-Riman tənliyinin fundamental həlli [3]

$$U(x-\xi) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)} \tag{2}$$

şəklindədir, yəni

$$(D_2 + iD_1)U(x) = \delta(x)\,. \tag{3}$$

Birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyini aşağıdakı şəkildə faktorizasiya edək.

$$(D_2^{\frac{1}{3}} + \alpha D_1^{\frac{1}{3}})(D_2^{\frac{2}{3}} + \beta D_1^{\frac{1}{3}} D_2^{\frac{1}{3}} + \gamma D_1^{\frac{2}{3}})U(x) = \delta(x) \tag{4}$$

Burada sol tərəfi hesablayıb alınan ifadəni (3) ilə tutuşdursaq alarıq:

$$\begin{cases} \beta + \alpha = 0, \\ \gamma + \alpha\beta = 0, \\ \alpha\gamma = i, \end{cases} \tag{5}$$

Buradan da,

$$\alpha = -i,\ \ \beta = i,\ \ \ \gamma = -1 \tag{6}$$

olduğunu almış oluruq. Onda (4) aşağıdakı şəklə düşər.

$$D_2^{\frac{1}{3}} W(x) - iD_1^{\frac{1}{3}} W(x) = \delta(x), \tag{7}$$

Burada,

$$W(x) = (D_2^{\frac{2}{3}} + iD_1^{\frac{1}{3}} D_2^{\frac{1}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}})U(x), \tag{8}$$

Eyni qayda ilə (4) əvəzinə aşağıdakı kimi faktorizasiyaya da baxa bilərik.

$$(D_2 + iD_1)U(x) = (D_2^{\frac{2}{3}} + iD_1^{\frac{1}{3}} D_2^{\frac{1}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}})(D_2^{\frac{1}{3}} - iD_1^{\frac{1}{3}})U(x) = \delta(x), \tag{9}$$

yəni,

$$D_2^{\frac{2}{3}} V(x) + iD_1^{\frac{1}{3}} D_2^{\frac{1}{3}} V(x) - D_1^{\frac{2}{3}} V(x) = \delta(x). \tag{10}$$

Burada

$$V(x) = D_2^{\frac{1}{3}} U(x) - iD_1^{\frac{1}{3}} U(x) \tag{11}$$

Bu ifadəni kəsr tərtib törəmənin tərifindən istifadə etməklə hesablayaq [4].

$$V(x) = D_2^{\frac{1}{3}} U(x) - iD_1^{\frac{1}{3}} U(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{dt}{t + ix_1} - i\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{d\tau}{x_2 + i\tau}\,, \tag{12}$$

Alınan (12) ifadəsinin birinci toplananında $x_2 - t = \xi^3$, ikinci toplananında isə $x_1 - \tau = \eta^3$ əvəzləmələrini aparaq. Onda (12)-dən alarıq.

$$V(x) = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{\sqrt[3]{x_2}}^{0} \frac{-3\xi^2 d\xi}{\xi(x_2 - \xi^3 + ix_1)} - i\frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\sqrt[3]{x_1}}^{0} \frac{-3\eta^2 d\eta}{\eta(x_2 + i(x_1 - \eta^3))} =$$

$$= -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\xi d\xi}{\xi^3 - (x_2 + ix_1)} + \frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\eta d\eta}{\eta^3 - (x_1 - ix_2)} =$$

$$= -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\xi d\xi}{(\xi - \sqrt[3]{x_2 + ix_1})(\xi^2 + \xi\sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2})} +$$

$$+ \frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\eta d\eta}{(\eta - \sqrt[3]{x_1 - ix_2})(\eta^2 + \eta\sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2})} \equiv I_1 + I_2. \tag{13}$$

Burada

$$I_1=-\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\frac{\xi d\xi}{(\xi-\sqrt[3]{x_2+ix_1})(\xi^2+\xi\sqrt[3]{x_2+ix_1}+\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2})},$$

$$I_2=\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\frac{\eta d\eta}{(\eta-\sqrt[3]{x_1-ix_2})(\eta^2+\eta\sqrt[3]{x_1-ix_2}+\sqrt[3]{(x_1-ix_2)^2})}.$$

Alınan ifadələrdə inteqralaltı fünksiyaları çevirək. Bunun üçün əvvəlcə I_1-i hesabayaq:

$$\frac{\xi}{(\xi-\sqrt[3]{x_2+ix_1})(\xi^2+\xi\sqrt[3]{x_2+ix_1}+\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2})}=\frac{A}{\xi-\sqrt[3]{x_2+ix_1})}+\frac{B\xi+C}{(\xi^2+\xi\sqrt[3]{x_2+ix_1}+\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2})}=$$

$$=\frac{A\left[\xi^2+\xi\sqrt[3]{x_2+ix_1}+\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2}\right]+(B\xi+C)\left[\xi-\sqrt[3]{x_2+ix_1}\right]}{(\xi-\sqrt[3]{x_2+ix_1})(\xi^2+\xi\sqrt[3]{x_2+ix_1}+\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2})} \tag{14}$$

Asanlıqla görərik ki,

$$\begin{cases}A+B=0, & \Rightarrow \quad B=-A;\\ A\cdot\sqrt[3]{x_2+ix_1}-B\cdot\sqrt[3]{x_2+ix_1}+C=1, & \\ A\cdot\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2}-C\cdot\sqrt[3]{x_2+ix_1}=0, & \Rightarrow \quad C=A\sqrt[3]{x_2+ix_1};\end{cases}$$

Beləliklə, $A=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x_2+ix_1}}$, $\quad B=-\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x_2+ix_1}}$, $\quad C=\frac{1}{3}$,

Alınan ifadələri (14)-də nəzərə almaqla onları (13)-də yerinə yazıb hesablayaq. Beləliklə,

$$I_1=\frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!}\left\{\frac{1}{(x_2+ix_1)\sqrt[3]{x_2+ix_1}}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_2+ix_1}-\sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_2+ix_1}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_2+ix_1}}-\frac{\pi}{6}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(x_2+ix_1)\cdot\sqrt[3]{x_2}}\right\}$$ alarıq. Analoji qayda ilə I_2-ni hesablayaq.

$$I_2=\frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!}\left\{-\frac{1}{3(x_1-ix_2)\sqrt[3]{x_1-ix_2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt[3]{x_1-ix_2}-\sqrt[3]{x_1}\right)^3}{-ix_2}+\sqrt{3}(arctg\frac{2\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_1-ix_2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x_1-ix_2}}-\frac{\pi}{6})\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt[3]{x_1}\cdot(x_1-ix_2)}\right\}$$ şəklindədir. $I\equiv I_1+I_2$ olduğundan aşağıdakı teoremi almış oluruq.

Teorem: İki ölçülü, xətti $\frac{2}{3}$-tərtib ellitik tip olan tənliyin fundamental həlli,

$$V(x)=(D_2^{\frac{1}{3}}-iD_1^{\frac{1}{3}})U(x)=\frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!}\left\{\frac{1}{(x_2+ix_1)\sqrt[3]{x_2+ix_1}}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_2+ix_1}-\sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_2+ix_1}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_2+ix_1}}-\frac{\pi}{6}\right)\right]+\frac{1}{(x_2+ix_1)\cdot\sqrt[3]{x_2}}\right\}+\frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!}\left\{-\frac{1}{3(x_1-ix_2)\sqrt[3]{x_1-ix_2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt[3]{x_1-ix_2}-\sqrt[3]{x_1}\right)^3}{-ix_2}+\sqrt{3}(arctg\frac{2\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_1-ix_2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x_1-ix_2}}-\frac{\pi}{6})\right]-\frac{1}{\sqrt[3]{x_1}\cdot(x_1-ix_2)}\right\}$$ şəklindədir.

.ƏDƏBİYYAT

1. Гурса Э. Курс математического анализа, том 2, часть 2. Дифференциальные уравнения. М.: ГТТИ,1933, 287 с.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965, 332 с.
3. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981, 512 с.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987, 688 с.
5. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ,1962, 352 с.
6. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М.: ГИТТЛ, 1954, 444 стр.
7. Aliyev N.A., Pashavand A.A. A boundary value problem for a fractional order ordinary linear differential equation with a constant coefficient // Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.4, No.1, Baku, Azerbaijan, 2015, pp.3-7
8. Pashavand A.A., Aliyev N.A. A Boundary Value Problem for an Irrational Order Partial Equation // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, Vol.3, No.1. Baku, Azerbaijan, 2015, pp. 69-72.
9. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными призводными. М.: ГИФМЛ, 1961, 400 с.
10. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977, 432 с.
11. Begehr H. Integral representations in complex, hypercomplex and Clifford analysis // Integral Transforms and Special Functions, vol. 13, 2002, pp.223-241
12. Begehr H. (Monica-Ramona Costache). Basic Boundary Value Problems for the Cauchy-Riemann and the Poisson Equation in a Quarter Pisc, Scoala Normala Superioara Bucharest Department of Mathematics, 2009, pp.1-46
13. http://nihan.jsoft.ws, List of publications of Professor Nihan A.Aliyev.

РЕЗЮМЕ

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНО $\frac{2}{3}$ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА НА ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ КОШИ-РИМАНА

Алиев Н.А, Ибрагимов Н.С, Кулиев А.А.

Ключевые слова*: уравнение Коши-Риман, эллиптическое уравнение типа $\frac{2}{3}$ -порядка, фундаментальное решение, факторизация, уравнение Лапласа*

В статье найдена связь между двухмерным линейно $\frac{2}{3}$ -порядковым дифференциальным уравнением с фундаментальными решениями уравнения Коши-Риман, используя метод факторизации. Так как от фундаментального решения первого порядка уравнения Коши-Риман эллиптического типа получено фундаментальное решение двухмерного линейно $\frac{2}{3}$ - порядкового уравнения эллиптического типа.

SUMMARY

ACQUISITION OF THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL, LINEAR $\frac{2}{3}$-ELLIPTIC TYPE DIFFERENTIAL EQUATION ON THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE CAUCHY-RIMAN EQUATION

Aliyev N.A, Ibrahimov N.S, Guliyev.A.A

Key words*: Cauchy-Riemann equation, $\frac{2}{3}$ -order elliptic type equation, fundamental solution, factorizing, Laplas equation.*

The connection between fundamental solutions of Cauchy-Riemann's equation with two-measure, linear $\frac{2}{3}$-order differential equation has been found by using the factorizing in the paper method. The fundamental solution of two-measure, linear $\frac{2}{3}$-order elliptic type equation had been received from the fundamental solution of the first order elliptic type Cauchy-Riemann's equation.

Daxilolma tarixi:	İlkin variant	05.02.2021
	Son variant	25.02.2021