

Q.Ə.Rüstəmov, A.T. Məmmədova

# SİSTEMLƏRİN DAYANIQLIĞI

Matlab /Simulinkdə modelləşdirmə



*Mənə dayaq nöqtəsi verin,  
Yer kürrəsini yerindən oynadım*

*Arximed*

**Q.Ə.Rüstəmov, A.T.Məmmədova**

# **SİSTEMLƏRİN DAYANIQLIĞI**

## **MATLAB/Simulinkdə modelləşdirmə**

*Ali texniki məktəblər üçün dərs vəsaiti*

*Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi  
tərəfindən təsdiq edilmişdir*

*AzTU-nun nəşriyyatı*  
**Bakı -2015**

**Rəy verənlər:** Sumqayıt Dövlət Universitetinin “Proseslərin avtomatlaşdırılması” kafedrasının müdiri, t.e.d., professor F.H. Ələkbərli, AzTU-nun “Avtomatika və idarəetmə” kafedrasının dosenti, t.e.n. V.Q.Fərhadov

**Elmi redaktor:** t.e.n., dosent R. Əhmədov

Q.Ə. Rüstəmov, Məmmədova A.T.

Sistemlərin dayanıqlığı: Matlab/Simulinkdə modelləşdirmə.  
Dərs vasaiti. Bakı. AzTu-nun nəşriyyatı, 2015, 162 s.

Dərs vəsaitində avtomatik tənzimləmə nəzəriyyəsinin və praktikasının əsas məsələsi olan dinamik sistemlərin dayanıqlığının tədqiq üsulları şərh edilmişdir.

Kitabın fərqli cəhəti cəbri və tezlik dayanıqlıq kriterilərinin Matlab/Simulinkdə modelləşdirilməsi və tədqiqidir. Nəzəri müdəalər analitik və kompyüterdə həll olunan çoxsaylı misallar ilə zənginləşdirilmişdir. Kitabın sonunda isə “İstifadə olunan Matlab funksiyaları”, “Əsas anlayışlar və təriflər” verilmişdir.

Vəsaitdən ”Avtomatik idarəetmə nəzəriyyəsi”, “Lokal tənzimləmə sistemləri”, “Kompyüter modelləşdirməsi”, “Sistemli analiz” və “Əməliyyatların tədqiqi” fənlərinin tədrisində istifadə oluna bilər.

Dərs vəsaiti “Proseslərin avtomatlaşdırılması mühəndisliyi” “Kompyuter mühəndisliyi”, “Mexatronika və robototexnika mühəndisliyi”, “İnformasiya texnologiyaları və sistemləri mühəndisliyi”, ixtisasları üzrə təhsil alan tələbələr və bu sahədə çalışan müxtəlif peşə sahibləri üçün nəzərdə tutulmuşdur.

©Azərbaycan Texniki Universiteti-2015

# MÜNDƏRİCAT

Giriş.....	5
------------	---

<b>BÖLMƏ 1.....</b>	<b>11</b>
---------------------	-----------

## **Hərəkətin dayanıqlığı.....11**

§ 1. Dayanıqlıq anlayışı.....	11
§ 2. Lyapunova görə dayanıqlıq.....	13
§ 3. Dayanıqlığın obyektin differensial tənliyinin həlli əsasında təyini.....	21
§ 4. Qeyri-xətti sistemlərin dayanıqlığının birinci taxınlaşma tənliyi əsasında təyini. Lyapunovun 1-ci üsulu (1892).....	27
§ 5. Lyapunovun 2-ci üsulu. Ümumi hal.....	32
§ 6. Xətti sistemlərin dayanıqlığının Lyapunovun 2-ci üsulunun köməyi ilə təyini.....	34
§ 7. Lyapunov tənliyinin Matlabda həlli.....	39
§ 8. Xətti sistemlər üçün Lyapunov funksiyasının tərtib olunması.....	42
§ 9. Qeyri-xətti sistemlər üçün Lyapunov funksiyasının tərtib olunması.....	45
§ 10. V.M. Popovun mütləq dayanıqlıq kriterisi (1960 –cı ).....	55
§ 11. Xətti sistemlərin dayanıqlığının xarakteristik tənliyin kökləri əsasında təyini. Köklər üsulu.....	62
11.1. MATLABda realizasiya.....	67

<b>BÖLMƏ 2.....</b>	<b>74</b>
---------------------	-----------

## **Dayanıqlıq kriteriləri.....74**

<b>2.1. Cəbri dayanıqlıq kriteriləri.....</b>	<b>74</b>
---	-----------

§ 1. Hurvis dayanıqlıq kriterisi.....	74
1.1. MATLABda realizasiya.....	78
§ 2. Raus dayanıqlıq kriterisi.....	80
2.1. MATLABda realizasiya.....	82

<b>2.2. Tezlik dayanıqlıq kriteriləri.....</b>	<b>85</b>
§ 1. Arqument prinsipi.....	85
§ 2. Mixaylov dayanıqlıq kriterisi.....	88
2.1. MATLABda realizasiya.....	92
§ 3. Naykvist dayanıqlıq kriterisi.....	95
§ 4. Ümumiləşdirilmiş Naykvist dayanıqlıq kriterisi.....	103
4.1. Naykvist kriterisinin Matlabda realizasiyası.....	105
§ 5. Dayanıqlıq ehtiyatları.....	116
5.1. MATLABda realizasiya.....	118
§ 6. Gecikməyə malik olan sistemlərin dayanıqlığı.....	122
6.1. MATLABda realizasiya.....	123

## **BÖLMƏ 3.....128**

### **Sistemin parametrlərinin dayanıqlığa**

#### **rəsiri.....128**

§ 1. Köklər qodoqrafi üsulu.....	128
§ 2. D-bölmə üsulu.....	131
§ 3. Dayanıqlıq oblastının bərabərsizliklər sisteminin həlli əsasında təyini.....	137
3.1. Bir parametərə görə dayanıqlıq oblastının təyini.....	138
3.2. İki parametərə görə dayanıqlıq oblastının təyini.....	140
§ 4. Biləvasitə bərabərsizliklər sisteminin həllinə əsaslanan üsul.....	142
§ 5. Parametrik məhdudiyətlər olduğu halda dayanıqlığın təyini. Xaritonov teoremi.....	146
§ 6. Struktur dayanıqsızlıq.....	147
<b>Çalışmalar.....</b>	<b>151</b>
<b>İstifadə olunan Matlab funksiyaları.....</b>	<b>154</b>
<b>Əsas anlayışlar və təriflər.....</b>	<b>155</b>
<b>Ədəbiyyat.....</b>	<b>158</b>

## Giriş

Müasir dövüdə avtomatik idarəetmə nəzəriyyəsinin metod və üsullarının praktiki məsələlərin həlli üçün inkişaf etdirilməsi çox vacibdir.

İdarəetmə sistemlərinin dayanıqlığının nəzəri və praktiki əsasları “Avtomatik tənzimləmə nəzəriyyəsi” fənnindən coxsaylı dərsliklərdə və monoqrafiyalarda kifayət qədər açıqlanmışdır. Lakin baxılan metod və üsullar inkişafda olan kompyüter proqram vasitələrinin və sistemlərinin tətbiqi ilə lazimi səviyyədə probasiya olunmamışdır.

Hazırkı mərhələdə avtomatik idarəetmənin və informatikanın metod və üsullarının *Matlab/Simulink* kompyüter proqram paketində realizasiyası geniş vüsət almışdır. Müvafiq predmet oblastında nəşr olunan elmi-metodik işlərin və dərsliklərin əksəriyyəti bu sahəyə aiddir. Lakin, Azərbaycan dilində müasir tələblərə cavab verən dərslik olmadığından tələbələr müəyyən çətinliklərlə qarşılaşırlar.

*Matlab Math Work Inc.* (ABŞ) şirkəti tərəfindən yaradılmışdır. Sistem ilk dəfə XX əsrin 70-ci illərində istifadə edilməyə başlansa da, onun çiçəklənmə dövrü 80-ci illərə təsadüf edir.

Matlab (qısa- *Matrix Laboratory*-matris laboratoriyası) mühəndis və elmi hesablamaları yerinə yetirmək üçün nəzərdə tutulmuş interaktiv kompyüter sistemidir.

Matlabı elmi kalkulyator adlandırmaq olar. Burada proqramla vizual vasitələrin vəhdəti tədqiqatçılar üçün əvəzolunmaz imkanlar yaradır. Matlabın tərkibində olan və dinamik sistemlərin modelləşdirilməsi üçün nəzərdə tutulmuş “vizual-bloklı imitasiya modelləşdirmə paketi” **Simulink** xüsusi yer tutur. Simulinkdə avtomatik tənzimləmə sisteminin tipik element və blokları, funksional və vizuallaşdırma vasitələri kitabxanada olan hazır bloklar şəklində təqdim olunur. Proqram təminatı isə üzə çıxmıyaraq arxa planda qalır. Blokların

parametrlərini dəyişmək üçün parametrlər pəncərəsindən istifadə olunur.

Simulinkdə müxtəlif modellər şəklində verilmiş idarəetmə obyektlərini modelləşdirmək mümkündür. Bunlardan ötürmə funksiyalarını və vəziyyət modellərini göstərmək olar. Bloklı imitasiya modelləşdirməsinə olduqca az vaxt sərf olunduğundan bir dərs saati ərzində nəticələri almaq və daha çox məlumat toplamaq mümkündür.

Matlabda *hesablama elementi matris* olduğundan modeli matris şəklində verilmiş sistemləri modelləşdirdikdə qurulmuş vektor *Simulink sxemində* matris və vektorları daxil etmək kifayətdir.

Tədqiqatların virtual xarakter daşmasına baxmayaraq praktiki tətbiqlərdə çox vacib olan biliklər qazanmaq mümkündür.

Avtomatik idarəetmədə istifadə olunan əsas Matlab paketləri aşağıdakılardır:

- Signal Processing Toolbox;
- Control System Toolbox;
- System Identification Toolbox;
- Optimization Toolbox.

Matlabda mövcud olmayan məsələnin həllini əldə etmək üçün İnternetə müraciət etmək olar.

Dərs vasitəi geniş oxucu kütləsinə hesablanmış və aşağıdakı xüsusiyyətlərə malikdir:

- xətti və qeyri-xətti sistemləri əhatə edir;
- bütün çevirmələr və hesablamalar Matlab/Simulinkdə verilmişdir;
- cəbri və tezlik dayanıqlıq kriterilərinin Matlab/Simulinkdə tədqiq texnologiyası verilmişdir;
- hər bölməyə aid çoxsaylı misalların analitik və kompyüter həlləri göstərilmişdir;

- hər bölməyə aid çalışmalar, fəslin sonunda isə “istifadə olunan Matlab funksiyaları”, “ Əsas anlayışlar və təriflər” verilmişdir;
- hər-bir metodun və üsulun mahiyyəti sadə dildə açıqlanmış və doğruluğu Matlab/Simulinkdə modelləşdirmə yolu ilə təsdiq edilmişdir.

İstənilən idarəetmə sistemini layihə etdikdə ilk növbədə onun dayanıqlı olmasını təmin etmək lazımdır. Lakin sistem eyni zamanda müəyyən keyfiyyət göstəricilərini də ödəməlidir. Bu səbəbdən dayanıqlıq zəruri olsa da kafi sayıla bilməz.

Əgər *girişin kiçik dəyişməsinə* çıxışın da kiçik dəyişməsi uyğun gələrsə – belə sistemlər (obyektlər) *praktiki baxımından dayanıqlı* sayıla bilər.

Dayanıqlıq sistemin *məxsusi* (daxili) *xüsusiyyəti* olduğundan xarici qüvvədən asılı deyil. Belə ki, idarə girişini müvafiq qaydada seçməklə dayanıqsız olan uçuş aparatlarını, nüvə reaktorlarını və s. dinamik tarazlıqda saxlamaq mümkündür.

Dayanıqlığı tədqiq etdikdə xarici qüvvələri sıfıra bərabər götürüb sistemin sıfıra bərabər olmayan başlanğıc şərtlərinin təsiri altında baş verən **sərbəst hərəkətini** araşdırmaq lazımdır.

Fiziki baxımdan dayanıqlığı xarici qüvvələrin təsiri kəsildikdən sonra obyektin (sistemin) öz tarazlıq vəziyyətinə (faza sürətinin sıfıra bərabər olduğu nöqtə) qayda bilmək xüsusiyyəti ilə xarakterizə etmək olar:

1. Xarici qüvvələrin təsiri kəsildikdən sonra obyekt istənilən başlanğıc nəqtdən tarazlıq vəziyyətinin kiçik ətrafına qayıdırsa, belə obyektlər *bütövlükdə* və ya *qlobal dayanıqlı* sistemlər adlanır. Belə sistemlərin müəyyən şərtləri ödəyən qeyri-xətti sinfi *mütləq dayanıqlı* sistemlər adlandırılır (V.M. Popov).

Əgər tarazlıq nöqtəsinə çatma sonsuz  $t \rightarrow \infty$  vaxta baş verirsə, belə sistemlər *asimptotik dayanıqlı sistemlər* adlanır. Qlobal dayanıqlıq yalnız xətti sistemlərə aiddir. Qeyri-xətti sistemlərdə müəyyən başlanğıc vəziyyətləri üçün sistem dayanıqlı, digərləri üçün dayanıqsız ola bilər.



2. Xarici qüvvələrin təsiri kəsildikdən sonra obyekt  $t \rightarrow \infty$  halında tarazlıq vəziyyətindən sonsuz uzaqlaşarsa belə obyektlər *dayanıqsız obyektlər* adlanır.

3. Xarici qüvvələrin təsiri kəsildikdən sonra sistem yeni tarazlıq vəziyyətinə gələrsə və belə nöqtələrin sayı sonsuz olarsa, belə sistemlər **neytral sistemlər** adlanır.

İlk dəfə dayanıqlıq haqqında ciddi riyazi anlayışı 1892-ci ildə rus alimi A.M.Lyapunov özünün «Hərəkət dayanıqlığı haqqında ümumi məsələ» əsərində təklif etmişdir. Lyapunovun irəli sürdüyü dayanıqlıq anlayışı o qədər uğurlu və ümumiləşdiricidir ki, o hazırda da elm və texnikanın müxtəlif sahələrində geniş istifadə olunur.

A.M.Lyapunovun dayanıqlıq anlayışı aşağıdakı dialektik qanunauyğunluğa əsaslanır:

*1. Elə başlanğıc şərtlər mövcud olmalıdır ki, zaman artıqca həll məhdud cərcivədə qalır.*

*2. Başlanğıc şərtin kiçik dəyişməsi həllin böyük dəyişməsinə səbəb olmur.*

*3. Qabarıq cəzətmə oblastından başlayan bütün həlləri eyni tarazlıq nöqtəsinə və ya attraktoruna (qapalı əyri) yığıldığından zaman artıqca bu həllər arasındakı məsafə sonsuz azalır.*

**Dərslinin məqsədi** – müasir informasiya texnologiyalarından istifadə etməklə istifadəçiyə dinamik sistemlərin dayıqlığının sadə hesablama və təhlil usullarını öyrətməkdir. Bunun üçün hal-hazırda kompyuter sistemlərindən daha münasib olanları – *MatLAB/Simulink* paketindən istifadə edilmişdir.

Matlabı elmi kalkulyator adlandırmaq olar. Burada proqramla vizual vasitələrin vəhdəti tədqiqatçılar üçün əvəzolunmaz imkanlar yaradır. Matlabın tərkibində olan və dinamik sistemlərin modelləşdirilməsi üçün nəzərdə tutulmuş “vizual-bloklı imitasiya modelləşdirmə paketi” *Simulink* xüsusi yer tutur. Simulinkdə avtomatik tənzimləmə sisteminin tipik element və blokları, funksional və vizuallaşdırma vasitələri kitabxanada olan hazır bloklar şəklində təqdim olunur. Proqram

təminatı isə üzə çıxmayaraq arxa planda qalır. Blokların parametrlərini dəyişmək üçün parametrlər pəncərəsindən istifadə olunur.

Simulinkdə müxtəlif modellər şəklində verilmiş idarəetmə obyektlərini modelləşdirmək mümkündür. Bunlardan ötürmə funksiyalarını və vəziyyət modellərini göstərmək olar. Bloklu imitasiya modelləşdirməsinə olduqca az vaxt sərf olunduğundan bir dərs saati ərzində nəticələri almaq və daha çox məlumat toplamaq mümkündür.

Matlabda *hesablama elementi matris* olduğundan modeli matris şəklində verilmiş sistemləri modelləşdirdikdə qurulmuş vektor *Simulink sxemində* matris və vektorları daxil etmək kifayətdir.

Tədqiqatların virtual xarakter daşmasına baxmayaraq praktiki tətbiqlərdə çox vacib olan biliklər qazanmaq mümkündür.

Kitabda Matlabın aşağıdakı bölmələrindən istifadə olunmuşdur:

- Symbolic Math Toolbox;
- Signal Processing Toolbox;
- Control System Toolbox;
- Statistics Toolbox;
- System Identification Toolbox;
- Optimization Toolbox;
- Simulink.

Matlabda mövcud olmayan məsələnin həllini əldə etmək üçün İnternetə müraciət etmək lazımdır.

Dərs vəsaiti 3 bölmədən ibarətdir:

1. Hərəkətin dayanıqlığı.
2. Dayanıqlıq kriteriləri.
3. Sistemin parametrlərinin dayanıqlığa təsiri.

Kitabda dayanıqlığın MatLABda təhlilinə aid kifayət qədər misal nümunələri göstərilmişdir.

Dərs vəsait "Proseslərin avtomatlaşdırılması mühəndisliyi"

"Kompyuter mühəndisliyi", "Mexatronika və robototexnika mühəndisliyi", "İnformasiya texnologiyaları və sistemləri mühəndisliyi", ixtisasları üzrə təhsil alan tələbələr və bu sahədə çalışan müxtəlif peşə sahibləri üçün nəzərdə tutulmuşdur.

***Müəlliflər:***

**Q.Ə.Rüstəmov**

**A.T.Məmmədova**

Email: [gazanfar.rustamov@gmail.com](mailto:gazanfar.rustamov@gmail.com)

mob. (0 50) 516 85 60

## Bölmə 1

### HƏRƏKƏTİN DAYANIQLIĞI

#### § 1. Dayanıqlıq anlayışı

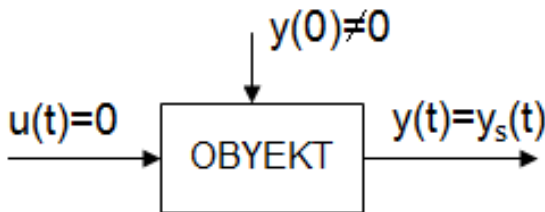
İstənilən idarəetmə sistemini layihə etdikdə ilk növbədə onun dayanıqlı olmasını təmin etmək lazımdır. Lakin sistem eyni zamanda müəyyən keyfiyyət göstəricilərini də ödəməlidir. Bu səbəbdən dayanıqlıq zəruri olsa da kafi sayıla bilməz.

Əgər *girişin kiçik dəyişməsinə* çıxışın da kiçik dəyişməsi uyğun gələrsə – belə sistemlər (obyektlər) *praktiki baxımından dayanıqlı* sayıla bilər.

Dayanıqlıq sistemin *məxsusi* (daxili) *xüsusiyyəti* olduğundan xarici qüvvədən (burada idarə signalı  $u(t)$ ) asılı deyil. Belə ki, idarə təsirini müvafiq qaydada seçməklə dayanıqsız olan uçuş aparatlarını, nüvə reaktorlarını və s. dinamik tarazlıqda saxlamaq mümkündür.

Dayanıqlığı tədqiq etdikdə xarici qüvvəni  $u(t) = 0$  sifra bərabər götürüb sistemin sifra bərabər olmayan başlanğıc  $y(0)$  şərtlərinin təsiri altında baş verən  $y(t) = y_s(t)$  **sərbəst hərəkətini** araşdırmaq lazımdır.

Şəkil 1-də obyektin sərbəst hərəkətini xarakterizə edən sxemi göstərilmişdir.



**Şəkil 1.** Obyektin sərbəst hərəkətini xarakterizə edən sxemi

Fiziki baxımdan dayanıqlığı xarici qüvvələrin təsiri kəsildikdən sonra obyektin (sistemin) öz tarazlıq vəziyyətinə (faza sürətinin sıfıra bərabər olduğu nöqtə) qayda bilmək xüsusiyyəti ilə xarakterizə etmək olar:

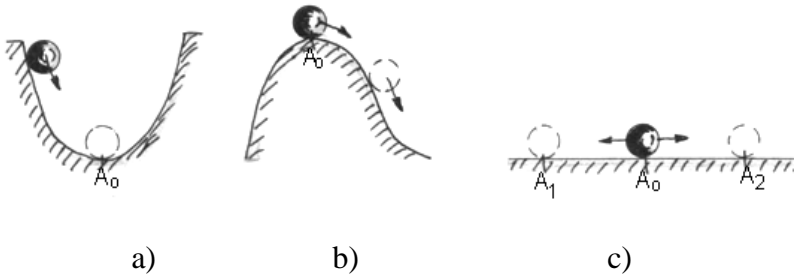
1. Xarici qüvvələrin təsiri kəsildikdən sonra obyekt istənilən başlanğıc nöqtədən tarazlıq vəziyyətinin kiçik ətrafına qayıdırsa, belə obyektlər *bütövlükdə* və ya *global dayanıqlı* sistemlər adlanır. Belə sistemlərin müəyyən şərtləri ödəyən qeyri-xətti sinfi *mütləq dayanıqlı* sistemlər adlandırılır (V.M. Popov).

Əgər tarazlıq nöqtəsinə çatma sonsuz  $t \rightarrow \infty$  vaxta baş verirsə, belə sistemlər *asimptotik dayanıqlı sistemlər* adlanır. Qlobal dayanıqlıq yalnız xətti sistemlərə aiddir. Qeyri-xətti sistemlərdə müəyyən başlanğıc vəziyyətləri üçün sistem dayanıqlı, digərləri üçün dayanıqsız ola bilər.

2. Xarici qüvvələrin təsiri kəsildikdən sonra obyekt  $t \rightarrow \infty$  halında tarazlıq vəziyyətindən sonsuz uzaqlaşarsa belə obyektlər *dayanıqsız obyektlər* adlanır.

3. Xarici qüvvələrin təsiri kəsildikdən sonra sistem yeni tarazlıq vəziyyətinə gəlersə və belə nöqtələrin sayı sonsuz olarsa, belə sistemlər **neytral sistemlər** adlanır.

Şəkil 2-də dayanıqlı (a), dayanıqsız (b) və neytral (c) obyektlərin kürəciyin misalında mexaniki analogiyası göstərilmişdir.



**Şəkil 2.** Dayanıqlığın mexaniki analogiya əsasında izahi

Neytral sistemlər *dayanıqlıq sərhəddində* olurlar. Xətti sistemlərdə iki növ dayanıqlıq sərhəddi mövcuddur:

- a) *aperiodik* dayanıqlıq sərhəddi;
- b) *rəqsi* dayanıqlıq sərhəddi.

Üçüncü şəkil aperiodik dayanıqlıq sərhəddinə uyğundur. Belə ki, müstəvini kiçik bucaq altında əysək kürrəcik artan sürətlə tarazlıq nöqtəsindən uzaqlaşacaqdır.

Rəqsi sistemdə *sönmə* (demferləmə) *əmsalını* sıfır edə bilsək ideal halda konservativ obyekt alacağıq. Bu halda sürtünmə olmadığından, sönməyən rəqslər baş verəcək. Rəqslərin amplitudu başlanğıc vəziyyətdən asılı olur.

Praktikada neytral sistemlər uzun müddət «yaşaya» bilməyərək dayanıqlı və ya dayanıqsız hala keçir.

Obyektin dayanıqlı olmasının riyazi şərtlərindən biri aşağıdakı fundamental münasibətin ödənilməsidir:

$$I = \int_0^{\infty} |v(t)| dt < \infty. \quad (1)$$

Sonsuz zaman intervalında sahənin məhdud olması üçün obektin çəki funksiyası sıfıra yaxınlaşmalıdır  $v(t) \rightarrow 0$ .

Avtomatik idarəetmə nəzəriyyəsində dayanıqlığı təyin etmək üçün aşağıdakı üsullardan istifadə olunur:

1. Lyapunovun 1-çi üsulu (kiciklikdə dayanıqlıq);
2. Lyapunovun 2-çi üsulu (birbaşa üsul);
3. Köklər üsulu;
4. Cəbri dayanıqlıq kriteriləri – Hurvis, Raus;
5. Tezlik dayanıqlıq kriteriləri – Mixaylov, Naykvist.

## § 2. Lyapunova görə dayanıqlıq

İlk dəfə dayanıqlıq haqqında ciddi riyazi anlayışı 1892-ci ildə rus alimi A.M.Lyapunov özünün «Hərəkət dayanıqlığı haqqında ümumi məsələ» əsərində təklif etmişdir. Lyapunovun irəli sürdüyü dayanıqlıq anlayışı o qədər uğurlu və ümumiləşdiricidir

ki, o hazırda da elm və texnikanın müxtəlif sahələrində geniş istifadə olunur.



Aleksandr Muxayloviç Lyapunov (1857-1918)

Obyektin hərəkəti qabariq  $G$  oblastında aşağıdakı *avtonom olmayan* qeyri-xətti adi diferensial tənliklər sistemi şəklində verilir:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$
$$x_i(t_0) = x_{i0} \in G.$$

Əgər  $f$  aşkar şəkildə  $t$ -dən asılı olarsa, belə sistem qeyri-*avtonom sistem* adlanır. Zaman  $t$  tənliyinin əmsallarına (dəyişən əmsallı və ya qeyri-stasionar tənlik) və ya tənliyə sərbəst şəkildə (qeyri-bircins tənlik) daxil ola bilər. Məsələn,  $dx/dt = f(x, t)$ . Və ya konkret  $dx/dt = -\sin(t)x^3 + 2x + t$ .

Əgər  $f$  aşkar şəkildə  $t$ -dən asılı deyilsə, belə sistem *avtonom sistem* adlanır. Avtonom stasionar (sabit əmsallı) və sərbəst, yəni bircins tənlikdir. Məsələn,  $dx/dt = f(x)$ . Və ya konkret olaraq

$$dx/dt + x^3 - 2x = 0.$$

$x_i$ - vəziyyət ləyişənləri adlanır.

$G \subset E^{n+1}$  –  $n+1$ ölşülü Ekvlid fəzasında qabarıq çoxluq.  $E^{n+1}$  fəzasının elementləri  $t$  və  $x_i$  koordinatlarıdır.  $G$  oblastının qabarıq olması şərti, birinci- həllin mövcudluq və yeganilik teoreminin ödənilməsi, ikincisi- tədqiq olunan tarazlıq vəziyyətinin cəzbətmə oblastının *separatrissalarla* ( ayrıcı traektoriyalar) təcrid olunması deməkdir. Yəni bütün  $x_{i0}$  başlanğıc nöqtələri  $G$  ilə isarə olunan oblastsnda yerləşməlidir.

Bu yanaşmada konkret  $t = t_0, x_i(t_0) = x_{i0}^* \equiv \varphi_i(t_0) = \varphi_{i0}$  başlanğıc şərtini, məsələn  $x_i(0) = 0^*$ , ödəyən *həyacanlanmamış*

$$x_i(t) = \varphi_i(x_{10}^*, x_{20}^*, \dots, x_{n0}^*; t) \quad (3)$$

və başlanğıc  $x_0$  şərti  $x_0^*$  nöqtəsinin  $\delta$  ətrafında yerləşən istənilən  $x_i(t) = x_i(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}; t)$  həllərinin fərqlinin zaman artdıqca məhdud oblastda qalmasıdır. Lyapunov  $x_i(t) = x_i(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}; t)$  həllini *həyacanlanmış* (başlanğıc şərtə görə) hərəkət adlandırmışdır.

**Tərif.** Başlanğıc şərtlərin fərqi radiusu  $\delta^2$  olan

$$\|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)\| < \delta \quad (4)$$

sferasının (kürrəsinin) daxilində olduqda *həyacanlanmış* və *həyacanlanmamış* hərəkətlərin (həllərin) fərqi zaman artdıqca, radiusu  $\varepsilon^2$  olan

$$\|x_i(t) - \varphi_i(t)\| < \varepsilon. \quad t \geq t_0. \quad (5)$$



*silindirinin* daxilində qalırsa, həyacanlanmamış  $x_i(t) = \varphi_i(x_{10}^*, x_{20}^*, \dots, x_{n0}^*; t)$  hərəkəti Lyapunova görə dayanıqlı sayılır. Burada  $\|\cdot\|$  evkilid normasıdır (məsafə). Məsələn,  $n=2$  üçün  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

**Başqa sözlə, əgər istənilən  $\varepsilon > 0$  ədədi üçün ondan asılı olan  $\delta(\varepsilon) > 0$  ədədi mövcud olarsa və bu halda (4) şərtindən bütün  $t > t_0$  üçün (5) şərti ödənilərsə həyacanlanmamış  $\varphi(x^*, t)$  hərəkəti dayanıqlı sayılır.**

Teoremin açıqlaması:

1. *Elə başlanğıc şərtlər mövcud olmalıdır ki, zaman artıqca  $\varphi(t)$  həlli məhdud cərcivədə qalsın.*

2. *Başlanğıc şərtin kiçik ləyişməsi həllin böyük dəyişməsinə səbəb ola bilməz.*

3. *Qabarıq  $G$  oblastından başlayan bütün  $\varphi_i(t)$  həlləri eyni tarazlıq nöqtəsinə və ya attraktoruna (qapalı əyri) yığıldığından zaman artdıqca bu həllər arasındakı məsafə sonsuz azalır, yəni  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Yaxınlaşma xəta ilə baş verərsə  $\varepsilon = const$  ola bilər.*

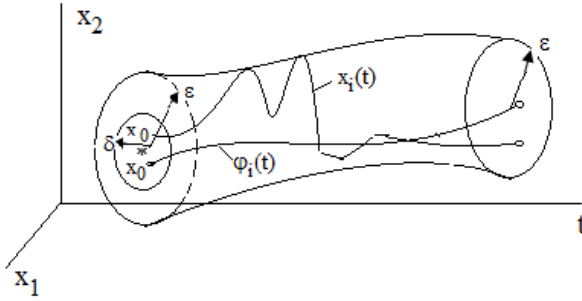
(5) ifadəsindən görüldüyü kimi həyacanlanmış və həyacanlanmamış həllər bütün  $i$ -lər,  $i=1,2,\dots,n$ , üçün iki-iki müqayisə olunur.

Əgər

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_i(t) - x_i(t)\| = 0$$

olarsa,  $\varphi_i(t)$  asimptotik dayanıqlı hərəkət adlanır. Yəni obyekt tarazlıq nöqtəsinə sonsuz vaxta çatır.

Şəkil 3-də  $n=2$  halı üçün tərifin həndəsi təsviri göstərilmişdir.



**Şəkil 3.**

Əgər istənilən  $\delta(\epsilon) > 0$  üçün hər- hansı bir  $x_i(t)$  həlli (5) bərabərsizliyini ödəmirsə, həyacanlanmamış  $\varphi_i(t)$  hərəkəti *dayanıqsız hərəkət adlanır*.

Əgər  $\delta = \infty$  olarsa, (2) dinamik sistemi *bütövlükdə dayanıqlı sistem* (xətti sistemlər) adlanır. Bu tip dayanıqlıq xətti differensial tənliklərlə yazılan sistemlər (obyektlər) üçün doğrudur.

**Trivial (sıfır) həllin dayanıqlığı.** Avtomatik tənzimləmədə əsas önəmli məsələ tarazlıq nöqtəsinin (vəziyyətinin) dayanıqlığının təyin olunmasıdır. Sıfır tarazlıq nöqtəsi  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$  *trivial həll* adlanır. Əvvəldə baxdığımız istənilən həllin dayanıqlığını trivial həllin, yəni tarazlıq nöqtəsinin dayanıqlığına gətirmək mümkündür.

(1) tənliyini vektor şəklində yazaq:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t),$$

Burada  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ .

Qeyri xətti sistemin bir-necə tarazlıq nöqtəsi olabilir. Tarazlıq nöqtəsinin korrdinatları

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (6)$$

qeyri-xətti tənliklər sisteminin (stasionarlıq şərti) həllindən tapılır.

Xətti

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (7)$$

sistem isə koordinat başlanğıcında yerləşən yeganə  $x(t) \equiv 0$  tarazlıq nöqtəsinə malikdir.

(6) tənliklər sisteminin həlli nəticəsində tapılmış və bizi maraqlandıran tarazlıq nöqtəsini  $x_s$  işarə edək. Yeni  $z = x - x_s$  dəyişəni daxil etməklə tarazlıq nöqtəsini koordinat başlanğıcına gətirmək olar. Beləliklə alınmış yeni tənlik

$$\frac{dz}{dt} = \psi(z, t) \quad (8)$$

*həyacanlanmış hərəkət tənliyi* adlanır. Aydındır ki, tarazlıq nöqtəsi  $z_s(t) \equiv 0$  (trivial həlli) bu tənliyin həllidir. Buna səbəb  $z_s(t)$  qiymətini (8) tənliyində yerinə yazsaq  $\psi(x_s, t) \equiv 0$  olduğundan

$$\frac{dz}{dt} \equiv 0$$

olmasıdır ki, onun da həllinin  $z(t) \equiv 0$  olması aşkardır.

Bu halda əvvəldə *həyacanlanmamış* hərəkət kimi qəbul etdiyimiz həlli  $\varphi(t) \equiv 0$  qəbul edib yalnız başlanğıc şərtləri  $x_0$  olan *həyacanlanmış*  $x(t)$  (gətirilmiş (8) sistemi üçün  $z(t)$  həlli) həllərinə baxmaq olar.

Gətirilmiş (8) sistemi üçün yuxarıdakı dayanıqlıq tərifinin şərtlərini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\|z_i(t_0)\| < \delta, \quad \|z_i(t)\| < \varepsilon. \quad t \geq t_0.$$

Xətti (7) sistemi üçün isə

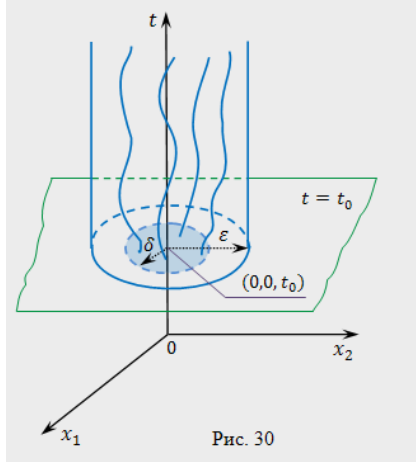
$$\|x_i(t_0)\| < \delta, \quad \|x_i(t)\| < \varepsilon. \quad t \geq t_0.$$

Əgər bütün  $x_i(t)$  həlləri üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

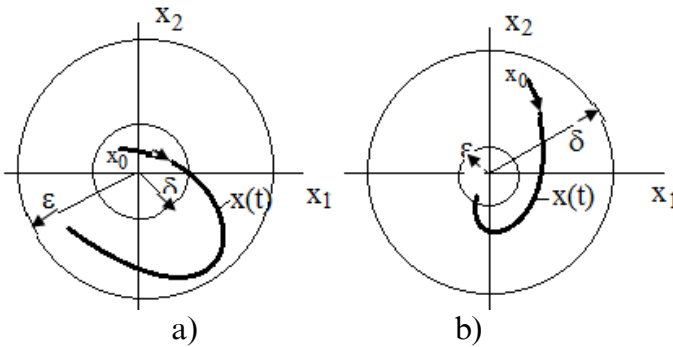
şerti ödənilsə onda system *asimptotik dayanıqlı* hesab olunur. Yəni dayanıqlığı yoxlamaq üçün (7) və ya (8) tənliklər nsistemini həll edib (9) asimptotik dayanıqlıq şərtini yoxlamaq lazımdır.

$n=2$  halında dayanıqlı sistem üçün  $\delta > 0$  radiuslu çevrədən başlayan bütün həllər  $\varepsilon > 0$  radiuslu silindirin daxilində qalacaqdır (şəkil 4).



**Şəkil 4**

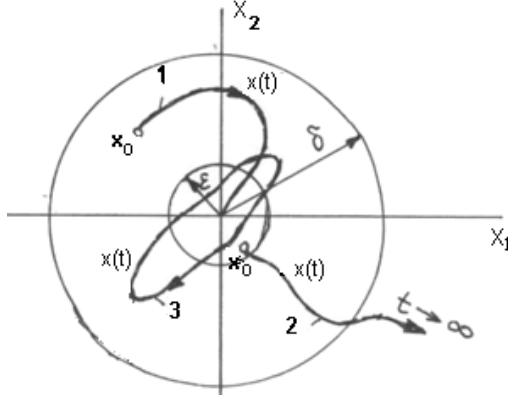
Dayanıqlığın növündən asılı olaraq  $\varepsilon > \delta$  və ya  $\varepsilon < \delta$  ola bilər (şəkil 5, a,b).



**Şəkil 5.**

Şəkilə a)- ümumiyyətlə dayanıqlıq (məsələn, orbital və ya finit  $t \rightarrow T$  dayanıqlıq), b)- asimptotik dayanıqlıq.

Şəkil 6-də  $n=2$  qiymətində trivial həll üçün faza müstəvisində kiçiklikdə dayanıqlığın həndəsi izahı verilmişdir.



**Şəkil 6.** Kiçiklikdə dayanıqlığın faza müstəvisində həndəsi təsviri

Şəkilə, 1 – dayanıqlı, 2 – dayanıqsız, 3 – orbital dayanıqlı sistemin faza trayektoriyaları  $x(t)$  göstərilmişdir.

**Misal 1.** Obyekt xətti qeyri-bircins tənlik ilə yazılır:

$$\frac{dx}{dt} = 1 + t - x.$$

$x(0) = 0$  başlanğıc şərtini ödəyən  $x(t)$  həllinin dayanıqlığını yoxlamaq lazımdır.

Bu tənliyin ümumi həlli  $x(t) = Ce^{-t} + t$ . Başlanğıc  $x(0) = 0$  şərtinə uyğun gələn həyacanlanmamış hərəkət:  $\varphi(t) = t$ .

$x(0) = x_0$  başlanğıc şərtinə uyğun gələn həyacanlanmış hərəkət:

$$x(t) = x_0 e^{-t} + t.$$

(5) fərqi formalaşdıraraq:

$$x(t) - \varphi(t) = x_0 e^{-t} + t - t = (x_0 - 0)e^{-t}.$$

Buradan göründüyü kimi, istənilən  $\varepsilon > 0$  üçün elə  $\delta > 0$  mövcuddur ki, (məsələn,  $\delta = \varepsilon$ ) başlanğıc qiyməti  $\|x_0 - 0\| < \delta$  şərtini ödəyən istənilən  $x(t)$  həlli üçün aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir:

$$|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - 0|e^{-t} < \varepsilon, \quad t \geq 0$$

Deməli  $\varphi(t) = t$  həlli dayanıqlıdır. Bundan başqa,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \varphi(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_0 - 0|e^{-t} = 0$$

*Şərti ödənildiyindən*  $\varphi(t) = t$  həlli asimptotik dayanıqlı həldir. Bu həll  $t \rightarrow +\infty$  halında qeyri məhduddur. Göstərilən misal təsdiq edir ki, diferensial tənliyin həllinin dayanıqlı olmasından bu həllin məhdud olmasına dələlət etmir.

$f$ -funksiyasının qeyri-xətti olduğu halda yuxarıdakı xətti tənlik (system) üçün aparılmış araşdırmalar cox yorucu, hətta mümkün olmaya bilər.

### § 3. Dayanıqlığın obyektin differensial tənliyinin həlli əsasında təyini

1. Obyektin tənliyi «giriş – çıxış» formasında verilmişdir:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 u + m_0 f. \quad (10)$$

Xarici təsirləri  $u = f = 0$  qəbul edib bu tənliyi sıfır bərabər olmayan  $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$  başlanğıc şərtlərində həll etmək lazımdır. Bu halda  $y(t)$  həlli obyektin sərbəst hərəkətini xarakterizə edir. Həll üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y^{(k-1)}(t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

*şərti ödənilirsə belə obyekt asimptotik dayanıqlı obyekt hesab olunur.* Yəni zaman artdıqca obyekt tarazılıq vəziyyəti olan 0 nöqtəsinə yaxınlaşır.

*Xətti sistemlərin dayanıqlığı başlanğıc şərtədən asılı olmadığından onun seçilməsi sərbəstdir.*

Matlabda (10) tənliyini analitik (simvolik) həll etmək üçün **dsolve(.)** funksiyasından istifadə olunur.

2. Obyektin modeli *ötürmə funksiyası* şəklində verilmişdir:

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad n \geq m. \quad (12)$$

Bu halda obyektin sərbəst hərəkətini xarakterizə edən  $v(t)$  çəki funksiyasını almaq üçün **impulse(W)** funksiyasından istifadə edib (1)

$$I = \int_0^{\infty} |v(t)| dt < \infty$$

şərtini yoxlamaq olar. Bu inteqral **I = int(abs(v(t), 0, inf)** funksiyasının köməyi ilə hesablanır.

3. Obyektin tənliyi *vəziyyət modeli* şəklində verilmişdir:

$$dx/dt = Ax + Bu,$$

$$y = Cx + Du. \quad (13)$$

Bu halda  $v(t)$  çəki xarakteristikasını  $B = 0, D = 0$  qiymətlərində **impulse(.)** funksiyasının köməyi ilə alıb  $I < \infty$  şərtini yoxlamaq olar.

3.1. Obyektin sərbəst hərəkəti *xətti diferensial tənliklər sistemi* şəklində verilmişdir:

$$dx/dt = Ax, \quad x(0) \neq 0. \quad (14)$$

Bu halda  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  həllini tapmaq üçün **lsim(.)** və ya **dsolve(.)** funksiyasından istifadə etmək olar.

Tənlik (14)-in köməyi ilə xətti sistemin tarazlıq nöqtəsinin yeganə olub  $x = 0$  koordinat başlanğıcında yerləşməsinə isbat etmək olar. Belə ki, tarazlıq nöqtəsində sürət  $dx/dt = 0$  olduğundan  $Ax = 0$  stansionarlıq şərti ödənilməlidir.  $A \neq 0$

olduğundan bu şərt yalnız  $x = 0$  halında, yəni koordinat başlanğıcında ödənilir.

Qeyd edək ki, tarazlıq vəziyyəti *dayanıqlı*, *dayanıqsız* və *neytral* ola bilər. Sistem (14)-in dayanıqlıqlı olması üçün  $x(t) = e^{At}x_0$  həlli aşağıdakı vector şərtini ödəməlidir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{At} x_0) = 0$$

və ya koordinat şəklində

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0, \dots, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_n(t) = 0. \quad (15)$$

Tənlik (14) həll etmək üçün **dsolve(·)** və ya **lsim(·)** funksiyalarından istifadə edib (15) şərtini **limit(·)** funksiyasının köməyi ilə yoxlamaq olar.

Bundan başqa həllin Simulink sxemindən də istifadə edib  $x(t)$  həllini müşahidə etmək olar.

**Misal 2.** Obyektin tənliyi “giriş-çıxış” modeli şəklində verilmişdir:

$$10\ddot{y} + 18\dot{y} + 40y = 5u. \quad (16)$$

Xarici təsiri  $u=0$  qəbul edib, dayanıqlığı (11) şərtinə əsasən yoxlayaq:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y^{(k-1)}(t) = 0, \quad k = 1, 2.$$

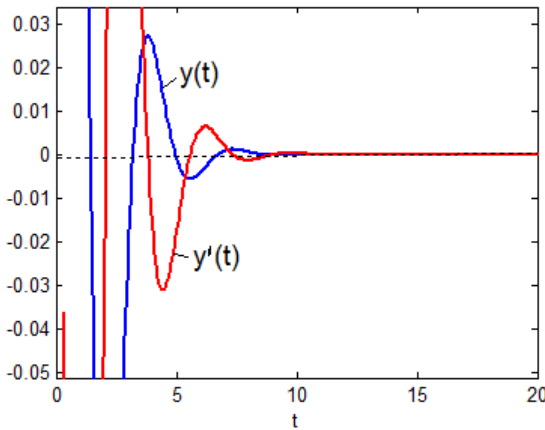
Şəkil 7-də həllin  $y(0) = 0.5$ ,  $\dot{y}(0) = 1$  başlanğıc şərtlərində Matlab proqramı və  $t=20$  s. qiymətində  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  qrafikləri göstərilmişdir.



```

>> y=dsolve('10*D2y+18*Dy+40*y=0','y(0)=0.5','Dy(0)=1')
y =
1/22*319^(1/2)*exp(-9/10*t)*sin(1/10*319^(1/2)*t)+
1/2*exp(-9/10*t)*cos(1/10*319^(1/2)*t)
>> Dy=diff(y) % Teremenin alınması
Dy =
-1/11*319^(1/2)*exp(-9/10*t)*sin(1/10*319^(1/2)*t)+
exp(-9/10*t)*cos(1/10*319^(1/2)*t)
>> ezplot(y,0,20), hold on
>> ezplot(Dy,0,20)
>>

```



**Şəkil 7.** Dayanıqlığın “giriş-çixış” modeli əsasında təyini

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  və  $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = 0$  şərtləri ödənildiyindən baxılan obyekt dayanıqlıdır. Obyektin dayanıqlı (rəqsi dayanıqlı) olması vizual olaraq  $y(t)$  qrafikindən aydın görünür.

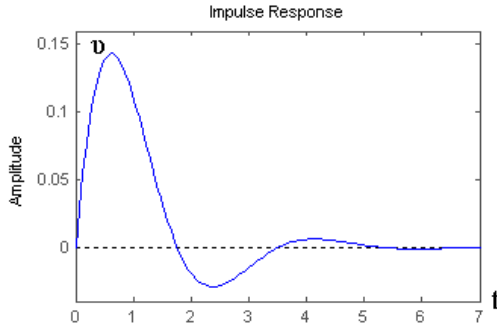
**Misal 3.** İndi (16)-ya uyğun

$$W(s) = \frac{5}{10s^2 + 18s + 40}$$

ötürmə funksiyasından istifadə edib çəki funksiyası  $v(t)$ -ni **impulse(.)** funksiyasının köməyi ilə əlaq. Bu funksiya sıfır  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  başlanğıc şərtlərində giriş vahid impuls  $u = \delta(t)$  ( $u = \text{dirac}(t)$ ) olduqda alınan reaksiyanı, yəni  $y(t)$ -ni hesablayır.

Şəkil 8-də MATLAB programı və  $v(t)$  qrafiki göstərilmişdir.

```
>> s=tf('s');
>> W=5/(10*s^2+18*s+40);
>> impulse(W)
>> |
```



**Şəkil 8.** Dayanıqlığın çəki funksiyası əsasında təyini

Göründüyü kimi, fundamental (1)  $I = \int_0^{\infty} |v(t)| dt = 3.0828 < \infty$

şerti ödənildiyindən obyekt dayanıqlıdır. Dayanıqlıq  $v(t)$ -nin qrafikindən də aydın görünür.

**Misal 4.** Obyektin sərbəst hərəkəti:

$$\dot{x}_1 = x_2 + 2x_3,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 0.6x_2 + 7x_3,$$

$$\dot{x}_3 = -4x_1 - 2x_2 - 6x_3.$$

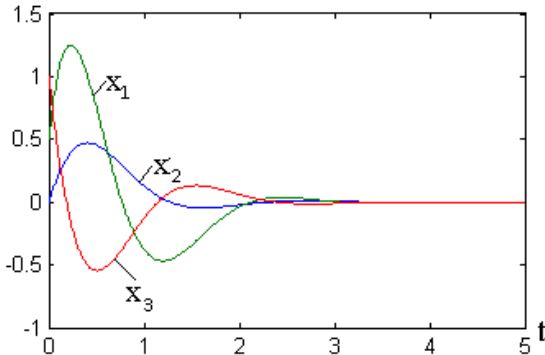
Bu halda

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0.6 & 7 \\ -4 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

$x(t)$  həllini  $x(0) = (0,0.5,1)^T$  başlanğıc şərtlərində **lism(.)** funksiyasının köməyi ilə alağ.

Şəkil 9-da Matlab proqramı və  $x_i(t)$  həllinin qrafikləri göstərilmişdir.

```
>> % MATLAB proqramı
>> % Dayanıqlığın təyini
>> A=[0 1 2;1 0.6 7;-4 -2 -6];B=[0;0;0];C=[0 0 0];D=[0];
>> sys=ss(A,B,C,D);
>> x0=[0 0.5 1];
>> t=[0:0.01:5];
>> u=0*t;
>> [y,T,x]=lism(sys,u,t,x0);
>> plot(T,x(:,1),T,x(:,2),T,x(:,3))
```



**Şəkil 9.** Tənliklər sistemi şəklində verilmiş obyektin dayanıqlığının təyini

Qrafikdən görüldüyü kimi bütün həllər sıfıra yaxınlaşdığından obyekt dayanıqlıdır.

Yuxarıda baxılan üsuldan istifadə etmək üçün obyektin differensial tənliyini analitik və ya ədədi üsul ilə *həll etmək tələb olunur*.

## § 4. Qeyri-xətti sistemlərin dayanıqlığının birinci yaxınlaşma tənliyi əsasında təyini. Lyapunovun 1-ci üsulu (1892)

Tarazlıq nöqtəsinin kiçik ətrafında qeyri-xətti sistemlərin hərəkət xüsusiyyətləri xətti sistemlərin hərəkət xüsusiyyətlərinə yaxındır. Bu səbəbdən qeyri-xətti sistemin tənliyini tarazlıq nöqtəsinin kiçik ətrafında xəttiləşdirib, alınmış xətti sistemin dayanıqlığını tədqiq edirlər. Sonra alınmış nəticələr ilkin qeyri-xətti sistemə tətbiq olunur. Müvafiq teorem A.M. Lyapunovun 1892-ci ildə yekunlaşdırdığı dissertasiyasının birinci hissəsində şərh edilmişdir [1].

**Birinci yaxınlaşma tənliyi (xəttiləşdirilmiş tənlik).** Fərz edək ki, tənzimləmə sisteminin və ya obyektinin yazılışı aşağıdakı qeyri-xətti avtonom diferensial tənliklər sistemi şəklində verilmişdir:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n} \quad (17)$$

Burada  $x_i$  – vəziyyət dəyişənləridir. Qeyri-xətti funksiyalar  $x_i = 0$  qiymətində  $f_i(0) = 0$  şərtini ödəməlidir. Bu o deməkdir ki, (17) sisteminin tarazlıq vəziyyəti  $\mathbf{x} = 0$  koordinat başlanğıcındadır. Başqa tarazlıq vəziyyətlərini tədqiq etdikdə  $z_i = x_i - x_i^s$  əvəzləməsi etməklə koordinat oxlarını  $x_i^s$  tarazlıq nöqtəsinə paralel sürüşdürüb məsələni yenə sıfırda olan tarazlıq nöqtəsinin tədqiqinə gətirmək olar.

Fərz olunur ki,  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  funksiyaları hər hansı  $\|\mathbf{x}\| < H$  oblastında kəsilməz xüsusi törəmələrə malikdir.  $H = \infty$  olarsa, baxılan (17) dinamik sistemi *bütövlükdə dayanıqlı* sistem adlanır.

Qeyri-xətti  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  funksiyalarını  $\mathbf{x} = 0$  tarazlıq nöqtəsinin kiçik ətrafında Teylor sırasına ayırıq:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n} \quad (18)$$

$$\text{Burada } a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=0} \quad (19)$$

sabit əmsallardır.

Qalıq həddi aşağıdakı şərti ödəməlidir:

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = 0.$$

Burada  $\|\mathbf{x}\|$  – Evklid normasıdır.

İfadə (18)-i ilkin (17) tənliyində yerinə yazsaq, vektor formasında alarıq:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}).$$

Burada  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  – vəziyyət vektoru;

$\mathbf{A} = (a_{ij})$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  –  $n$  ölçülü kvadrat matrisdir.

Bu tənliyin xətti hissəsi

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (20)$$

qeyri-xətti sistemin *birinci yaxınlaşma tənliyi* adlanır. Burada  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  elementləri (19) əsasında təyin olunan sabit matrisdir.

Bəzi hallarda (19) qeyri-xətti sisteminin trivial (yəni  $\mathbf{x} = 0$  həlli) həllinin dayanıqlığı haqqında birinci yaxınlaşma tənliyinə əsasən mühakimə yürütmək olar.

Bu halda:

a) əgər (20) xətti sisteminin  $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$  xarakteristik tənliyinin bütün köklərinin həqiqi hissələri mənfi ədədlədirsə, yəni  $\text{Re}\lambda_i < 0$ , onda (17) qeyri-xətti sisteminin trivial  $\mathbf{x}(t) = 0$  həlli Lyapunova görə asimptotik dayanıqlıdır.

Başqa sözlə, (17) tənliklər sisteminin  $\mathbf{x} = 0$  tarazlıq nöqtəsi dayanıqlı tarazlıq vəziyyətidir.

b) əgər  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$  xarakteristik tənliyinin kökləri içərisində bir və ya bir neçə köklərin həqiqi hissələri müsbətdirsə, yəni  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ , onda (17) qeyri-xətti sisteminin tarazlıq  $\mathbf{x}(t) = 0$  vəziyyəti dayanıqsızdır.

c) əgər köklər içərisində sıfır və ya sıfır xəyali köklər mövcud olarsa və qalan köklər mənfidirsə birinci yaxınlaşma tənliyinə əsasən (17) qeyri-xətti sistemin dayanıqlığı haqqında mühakimə yürütmək olmaz. Bu halda dayanıqlıq qeyri-xətti  $\varphi(\mathbf{x})$  qalıq həddindən asılı olur.

Bəzi ümumiləşdirmələr aparaq.

1. Köklər teoremin şərtini ödəyirsə, yəni  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ , onda  $\mathbf{x} = 0$  trivial həlli dayanıqlıdır.

2. Əgər köklərdən bəziləri sıfır, qalanlarının isə həqiqi hissələri mənfidirsə, onda sistem *neytral sistem* (dayanıqlıq sərhəddi) adlanır. Sıfırdan fərqli köklər həqiqi olarsa, sistem aperiodik, kompleks-qoşma köklər olarsa – rəqsi dayanıqlıq sərhəddində olur.

Misal üçün,  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -x_2$  sisteminin xarakteristik tənliyi  $\lambda(\lambda + 1) = 0$  olduğundan  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Bu səbəbdən sistem aperiodik dayanıqlıq sərhəddindədir. Sistemin faza portreti şəkil 30, a-ya uyğundur.

3. Əgər köklər içərisində heç olmazsa bir kök müsbət həqiqi hissəyə malik olarsa, belə sistem dayanıqsızdır.

**Misal 5.** Aşağıdakı sistemin dayanıqlığını yoxlayın.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1(1 + x_1^2) - 2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + x_2. \end{aligned} \tag{21}$$

Əvvəlcə tarazlıq nöqtələrinin koordinatlarını stasionarlıq şərtindən tapaq:

$$x_1^3 + x_1 + 2x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 = 0.$$

Bu tənliklər sisteminin həlli:

$$x_1^1 = 0, x_2^1 = 0; \quad x_1^2 = 1, x_2^2 = -1; \quad x_1^3 = -1, x_2^3 = 1.$$

Birinci  $O(0;0)$  tarazlıq nöqtəsinə uyğun gələn yaxınlaşma tənliyini qurmaq üçün  $\mathbf{A}$  matrisinin əmsallarını hesablayaq:

$$f_1 = -x_1(1+x_1^2) - 2x_2, \quad f_2 = x_1 + x_2$$

olduğundan (19) ifadəsinə əsasən:

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -1 + 2x_1 \Big|_{x_1=0} = -1; \quad a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -2.$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1, \quad a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ olduğundan xarakteristik tənlik}$$

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Köklər  $\lambda_{1,2} = \pm j$ . Bu halda  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0$  olduğundan teorem 1-in şərti ödənilmir. Bu səbəbdən birinci yaxınlaşma tənliyinə əsasən  $O(0;0)$  tarazlıq nöqtəsinin dayanıqlı olub-olmaması haqqında fikir söyləmək mümkün deyil.

İkinci  $B(1;-1)$  tarazlıq nöqtəsi sıfırdan fərqləndiyindən koordinat başlanğıcını bu nöqtəyə sürüşdürmək lazımdır. Bu məqsədlə  $z_1 = x_1 - x_1^2 = x_1 - 1$  və  $z_2 = x_2 - x_2^2 = x_2 + 1$ . Buradan  $x_1 = z_1 + 1$ ,  $x_2 = z_2 - 1$  tapıb (21) tənliyində yerinə yazsaq, sistemin yeni dəyişənlərdə tənliyini alarıq:

$$\frac{dz_1}{dt} = -z_1(z_1^2 + 3z_1 + 4) - 2z_2,$$

$$\frac{dz_2}{dt} = z_1 + z_2.$$

Tarazlıq  $(0;0)$  nöqtəsinə uyğun gələn birinci yaxınlaşma

tənliyi:

$$\frac{dz_1}{dt} = -4z_1 - 2z_2, \quad \frac{dz_2}{dt} = z_1 + z_2.$$

Uyğun xarakteristik tənlik  $\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$ . Köklər:  $\lambda_1 = 0.56$ ,  $\lambda_2 = -3.56$ .  $\text{Re}\lambda_1 > 0$  olduğundan  $B(1; -1)$  tarazlıq vəziyyəti dayanıqsızdır.

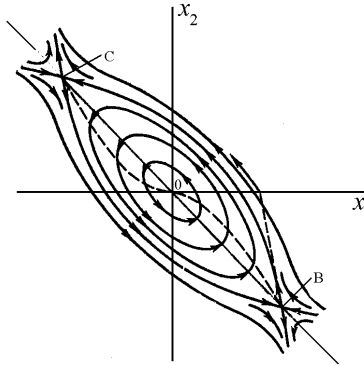
Üçüncü  $C(-1; 1)$  tarazlıq nöqtəsi də sıfırdan fərqləndiyindən koordinat başlanğıcını bu nöqtəyə sürüşdürmək lazımdır. Bu halda  $z_1 = x_1 - x_1^3 = x_1 + 1$ ,  $z_2 = x_2 - x_2^3 = x_2 - 1$ . Yuxarıdakı əməliyyatları yerinə yetirək görürük ki, bu hal da ikinci ilə üst-üstə düşür. Deməli,  $C$  nöqtəsi də dayanıqsızdır.

Sistemin faza portreti şəkil 10-da göstərilmişdir.

Göründüyü kimi,  $B$ ,  $C$  "yəhər",  $O$  isə "mərkəz" tipli tarazlıq nöqtələridir.

**Misal 6.** Aşağıdakı tənliklə yazılan sistemin trivial, yəni  $\mathbf{x} = 0$  həllinin dayanıqlığını yoxlayın.

$$\frac{dx_1}{dt} = 1 - x_1 - \cos x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1^2 - x_2.$$



**Şəkil 10**

Göründüyü kimi,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  qiymətləri  $f_1(0) = f_2(0) = 0$



şərtini ödəyir. Əmsalları hesablayaq.

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -1 + \sin x_2 \Big|_{x_2=0} = -1, \quad a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \cos x_2 \Big|_{x_2=0} = 0,$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2x_1 \Big|_{x_1=0} = 0, \quad a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1.$$

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  olduğundan birinci yaxınlaşma tənliyi

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2.$$

Xarakteristik tənlik

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 = 0. \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Köklərin hər ikisi sol yarımmüstəvidə yerləşdiyindən, yəni  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$  şərti ödənilməyindən  $\mathbf{x} = 0$  nöqtəsi dayanıqlı tarazlıq nöqtəsidir.

## § 5. Lyapunovun 2-ci üsulu. Ümumi hal

**Lyapunovun ikinci üsulu** (*böyüklikdə dayanıqlıq*). Bu üsulun ideyası belədir. Əgər sistemin  $x(t)$  trayektoriyası üzrə dəyişən müsbət müəyyən  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  funksiyası mövcuddursa və bu funksiyanın zamana görə törəməsi (sürət) mənfidirsə  $dV/dt < 0$ , onda sistemin enerjisi azalır və  $t \rightarrow \infty$  halında tarazlıq nöqtəsinə düşür. Bu əlamət sistemin dayanıqlı olmasını xarakterizə edir.  $V(x)$  funksiyası energetik funksiya olub *Lyapunov funksiyası* adlanır. Dayanıqlıq isə  $V(x)$ -nin təyin oblastı böyük olduğundan **böyüklikdə dayanıqlıq** adlanır.

Fərz edək ki, avtonom (stasiotar) obyektin sərbəst hərəkəti aşağıdakı **qeyri-xətti** differensial tənliklə yazılır:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_0. \quad (22)$$

Burada  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$  – ümumi halda qeyri-xətti vektor funksiyasıdır.

$V(\mathbf{x})$  Lyapunov funksiyasının zamana görə törəməsini mürəkkəb funksiya kimi ( $V - x -$  dan,  $x$  isə  $t -$  dən asılıdır) alaıq. Onda

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (23)$$

*Məsələnin qoyuluşu.* Elə müsbət müəyyən Lyapunov funksiyası seçmək tələb olunur ki (əgər belə funksiya mövcuddursa) onun törəməsi mənfi müəyyən funksiya olsun. Yəni  $dV/dt < 0$  şərti ödənilsin. Bu halda (22) obyekt *böyüklükdə asimptotik dayanıqlı* olacaqdır.

**Tərif 1. Qeyri-xətti (22) sisteminin global asimptotik dayanıqlı olmasının kafi şərti aşağıdakı xassələrə malik olan Lyapunov funksiyasının mövcud olmasından ibarətdir:**

1.  $V(\mathbf{x})$  funksiyası mərkəzi koordinat başlanğıcında olan qapalı  $B = \{\mathbf{x} \in R^n : \|\mathbf{x}\| < b\}$  oblastında kəsilməz birinci tərtib törəməyə malik olmalıdır.

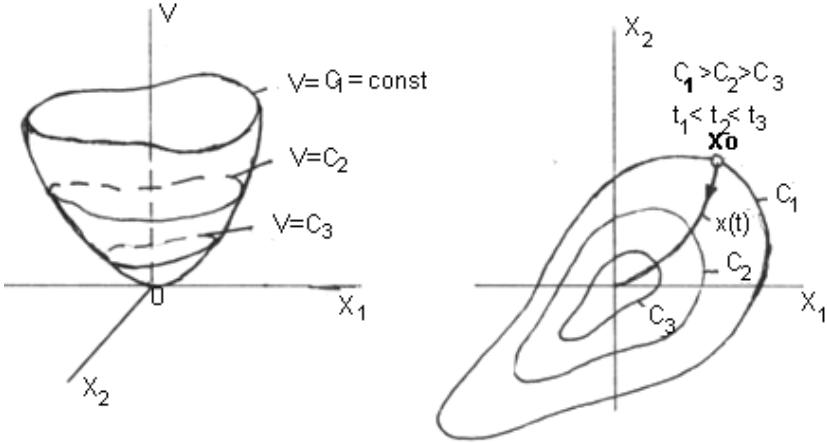
2.  $V(\mathbf{x})$  funksiyası müsbət müəyyən funksiya olmalıdır, yəni  $B$  oblastının bütün nöqtələrində  $V(\mathbf{x}) > 0$  koordinat başlanğıcında isə  $V(0) = 0$  olmalıdır. Məsələn,  $V = x_1^2 + x_2^2$ .

3.  $V(\mathbf{x})$  funksiyasının zamana görə törəməsi (23) mənfi müəyyən funksiya olmalıdır. Yəni  $B$  oblastında  $dV/dt < 0$  koordinat başlanğıcında isə  $\dot{V}(0) = 0$  şərti ödənməlidir.

Beləliklə, dayanıqlıq  $V(\mathbf{x})$  funksiyasının törəməsinin işarəsinə görə müəyyən olunduğundan Lyapunovun 2-ci üsulu sadə olub əsasən qeyri-xətti obyektlərin dayanıqlılığının təyin olunması üçün

geniş istifadə olunur. Burada yeganə çətinlik müxtəlif tipli sistemlər üçün  $V(x)$  Lyapunov funksiyasının seçilməsidir.

Şəkil 11-də  $n = 2$  halı üçün  $V(x)$  funkiyasının şəkli (a) və onun dayanıqlı sistemin  $x(t)$  traektoriyası üzrə dəyişməsi (b) göstərilmişdir.



**Şəkil 11.** Lyapunov funksiyasının həndəsi təsviri və onun sistemin trayektoriyası üzrə dəyişməsi

## § 6. Xətti sistemlərin dayanıqlılığının Lyapunovun 2-ci üsulunun köməyi ilə təyini

Bu halda avtonom obyektin sərbəst hərəkəti aşağıdakı xətti differensial tənliklə yazılır:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = x_0. \quad (24)$$

Xətti və bəzi qeyri-xətti sistemlər çün Lyapunov funksiyası müsbət müəyyən *kvadratik formada* qəbul olunur:

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_{ij} . \quad (25)$$

Burada  $\mathbf{Q} = (q_{ij})$  - müsbət müəyyən simmetrik matrisdir,  $q_{ij} = q_{ji}$  və ya  $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}$ .

Lyapunov funksiyasının zamana görə törəməsi:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{dt} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{A} \mathbf{x})^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{x} = \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}) \mathbf{x} . \end{aligned} \quad (26)$$

Göründüyü kimi yeni kvadratik forma alınmışdır.

**Məsələnin qoyuluşu.** Elə müsbət müəyyən simmetrik  $\mathbf{Q}$  matrisi tapmaq tələb olunur ki, (əgər belə matris mövcuddursa)  $dV/dt < 0$  fundamental şərti ödənilsin. Bu (10) obyektinin global asimptotik dayanıqlı obyekt olmasına dəlalət edir.

İfadə (26)-də mütərizənin daxlındəki ifadəni (-P) ilə işarə edək:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} = -\mathbf{P} . \quad (27)$$

P müsbət müəyyən matris olarsa (26)-ə əsasən

$$dV/dt = -\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} < 0$$

törəməsi mənfi işarənin hesabına mənfi müəyyən funksiya olacaqdır.

Tənlik (27) *Lyapunovun cəbri matrisi tənliyi* adlanır.

**Məsələnin həlli.** Əvvəlcə müsbət müəyyən simmetrik P matrisi seçilir. Məsələn, sadəlik üçün vahid matris şəklində,  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ . Sonra (27) *Lyapunov matris tənliyi* obyektin məlum A qiymətində həll edilib Q matrisi təyin edilir. Əgər müsbət müəyyən həll mövcuddursa, onda (19) sistemi dayanıqlıdır.  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$  olduğundan Q həlli simmetrik matris şəklində alınır. Matlabda (27) Lyapunov tənliyini həll etmək üçün **lyap**(·) funksiyasından istifadə olunur.

Matrisin müsbət müəyyənliyini aşağıdakı üsullar ilə təyin etmək olar:

a) məxsus  $\lambda_i$  qiymətlərinin təyin edilməsi. Müsbət müəyyən matris üçün bunların həqiqi hissələri müsbət olmalıdır,  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ . Məlum olduğu kimi  $\lambda_i$

$$\det(\lambda I - Q) = 0 \quad (28)$$

xarakteristik tənliyinin kökləridir.

b) Silvester şərtinə əsasən diaqonal minorları (təyinediciləri)

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} q_{11} & \dots & q_{1k} \\ & \dots & \\ q_{k1} & \dots & q_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

sıfırdan böyük olmalıdır, yəni  $\Delta_k > 0$  şərti ödənilməlidir.

Fərz edək ki, kvadratik forma

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

şəklində verilmişdir.

Uyğun matris yazılışı:

$$V(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bu halda simmetrik Q matrisi: 
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bu matris üçün (28) xarakteristik tənliyi:

$$\det \left[ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) = 0.$$

Buradan,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = (3 + \sqrt{5})/2$ ,  $\lambda_3 = (3 - \sqrt{5})/2$ .

Hər üç kök  $\lambda_i > 0$  olduğundan Q matrisi və ona uyğun kvadratik forma müsbət müəyyəndir:  $V(\mathbf{x}) > 0$ .

Müsbət müəyyənliyi ikinci üsul ilə yoxlayaq. Bu halda

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Bütün minorlar üçün  $\Delta_k > 0$ ,  $k = 1, 2, 3$  şərtinin ödənilməsi baxılan kvadratik formanın müsbət müəyyən funksiya olmasını göstərir.

Matlabda matrisin determinantı **det**([1 1 0; 1 2 0; 0 0 1]) məxsusi qiymətləri isə **eig**([1 1 0; 1 2 0; 0 0 1]) funksiylarının köməyi ilə hesablanır.

**Misal 7.** Hamar qeyri-xəttiliyə malik olan bir tərtibli sistemə baxaq:

$$dx/dt = -x + ax^3, \quad a > 0.$$

Bu tənlik üçün stasionarlıq şərti:  $-x + ax^3 = 0$ . Bu tənliyi həll etsək tarazlıq nöqtələrinin koordinatlarını taparıq:

$$x_{1s} = 0, \quad x_{2s} = a^{-1/2}, \quad x_{3s} = -a^{-1/2}.$$

Lyapunov funksiyası kimi aşağıdakı müsbət müəyyən funksiyanı qəbul edək:

$$V(x) = \frac{1}{2} x^2.$$

Bu funksiyanın (23) ifadəsinə əsasən törəməsi:

$$dV/dt = x(dx/dt) = -x^2 + ax^4.$$

$dV/dt < 0$  dayanıqlıq şərti  $x$ -in yalnız  $ax^2 < 1$  bərabərsizliyini ödəyən qiymətləri üçün ödənilir. Bu qiymətlər kiçik olduğundan koordinat başlanğıcı  $x = x_{1s} = 0$  lokal asimptotik dayanıqlı nöqtədir. Deməli baxılan sistem  $|x_0| < 1/\sqrt{a}$  başlanğıc şərtlərində dayanıqlıdır.

İndi sistemin dayanıqlılığını  $x_{2s} = a^{-1/2}$  tarazlıq nöqtəsinin kiçik ətrafında tədqiq edək.

Bu halda

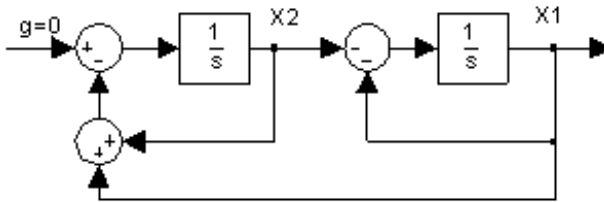
$$V(x) = \frac{1}{2} (x - x_{2s})^2 = \frac{1}{2} (x - a^{-1/2})^2.$$

Müvafiq törəmə:

$$dV/dt = ax(x + a^{-1/2})(x - a^{-1/2})^2.$$

Sonuncu vuruq müsbət müəyyən funksiya olduğundan işarəni təyin etdikdə onu nəzərdən atmaq olar. Bundan sonra, aydın görünür ki,  $x = x_{2s} = a^{-1/2}$  nöqtəsinin kiçik ətrafında  $dV/dt > 0$  olduğundan sistem bu ətrafda dayanıqsızdır.

**Misal 8.** Şəkil 12-də göstərilmiş xətti ATS-in dayanıqlılığını tədqiq edək.



**Şəkil 12.** ATS-in struktur sxemi

Uyğun tənlik:

$$dx_1/dt = -x_1 + x_2,$$

$$dx_2/dt = -x_1 - x_2.$$

Burada  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $P = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  vahid matris qəbul

edib (27) Lyapunov tənliyini tərtib edək:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

$q_{12} = q_{21}$  olduğundan üç  $q_{11}$ ,  $q_{12}$ ,  $q_{22}$  dəyişəni tapmaq kifayətdir.

Matris (30) tənliyini açaq. Onda

$$2q_{11} + 2q_{12} = 1,$$

$$q_{11} - 2q_{12} - q_{22} = 0,$$

$$-q_{12} + 2q_{22} = 1.$$

Alınmış xətti cəbri tənliklər sisteminin həlli:  $q_{11} = 0.5$ ,  $q_{12} = 0$ ,  
 $q_{22} = 0.5$  Beləliklə axtarılan matris

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

müsbət müəyyən matris olduğundan baxılan ATS asimptotik dayanıqlıdır.

## § 7. Lyapunov tənliyinin Matlabda həlli

Matris cəbri tənlikləri həll etmək üçün Matlabda xüsusi funksiyalar mövcuddur.

**Q = lyap(A,P)** funksiyası

$$A^T Q + Q A + P = 0$$



şəklində olan Lyapunov tənliyini həll etməyə imkan verir. Burada  $A$ ,  $P$  eyni ölçülü verilmiş kvadratik matrislərdir. Əgər  $P$  simmetrik matris şəklində verilərsə, məsələn,  $P = I$  vahid matris şəklində, onda axtarılan  $Q$  matrisi də simmetrik matris şəklində alınacaqdır.  $P$ -nin vahid matris şəklində verilməsi sistemin dayanıqlığına və ya dayanıqsızlığına xələl gətirmir.

**Misal 9.** Aşağıdakı tənlik ilə verilmiş obyektin dayanıqlığını  $\text{lyap}(A,P)$  funksiyasının köməyi ilə yoxlayaq:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -5.4 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x.$$

$$P = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{qəbul edək.}$$

Aşağıda müvafiq Matlab proqramı və həll ( $Q$  matrisi) göstərilmişdir.

```
>> % Lyapunov tenliyinin helli
>> A=[-5.4 1;-1 -1]; % Obyektin matrisi
>> P=[1 0;0 1]; % P matrisi
>> Q=lyap(A,P),s=eig(Q) % Hell Q ve onun mexsusu ededleri

Q =
    0.1025    0.0537
    0.0537    0.4463

s =
    0.0943
    0.4545
```

Həll

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1025 & 0.0537 \\ 0.0537 & 0.4463 \end{bmatrix}$$

simmetrik matris şəklində alınmışdır.

Bu matrisin məxsusi ədədləri  $\lambda = \text{eig}(\mathbf{Q})$  funksiyasının köməyi ilə təyin olunmuşdur.  $\lambda_1 = 0.0943 > 0$ ,  $\lambda_2 = 0,4545 > 0$  olduğundan  $\mathbf{Q}$  müsbət müəyyən matrisdir və deməli müvafiq sistem dayanıqlıdır. Qeyd edək ki,  $\mathbf{Q}$  matrisinin məxsusi ədədlərini yoxlamamaq da olardı. Çünki  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$  olduğundan həll mövcuddursa, o hökmən simmetrik şəkildə alınacaqdır. Yuxarıda deyildiyi kimi belə matris müsbət müəyyən matrisdir!

Sistem dayanıqlıq sərhəddində və ya dayanıqsız olarsa, məsələn

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2; \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

qiymətlərində, Lyapunov tənliyinin həlli mövcud deyil. Belə hallarda proqram həllin olmaması haqqında “*??? solution does not exist or not unique*” məlumatını verir. Bu nəticə baxılan obyektin dayanıqsız (və ya dayanıqlıq sərhəddində) olmasını göstərir.

**Problem.** Lyapunovun 2-ci üsulu sistemin diferensial tənliyinin həllini tələb etməsə də lazımi xassələrə malik olan Lyapunov funksiyasının tapılmasını tələb edir. Əgər belə funksiya tapmaq mümkündürsə, bu dayanıqlığa dəlalət edir. Lakin Lyapunov funksiyasının tapıla bilməməsi sistemin hökmən dayanıqsız olması demək deyil. Ola bilsin ki, tədqiqatçının təcrübəsi kifayət qədər deyil və ya ümumiyyətlə baxılan tip qeyri-xəttilik üçün Lyapunov funksiyasının qurulması metodikası işlənilməmişdir.

Lyapunov funksiyasının qurulmasının ümumi qaydasının olmaması bu üsulun çatışmayan cəhətidir. Hazırda Lyapunov funksiyasının tərtib olunma qaydası xətti və bəzi tip qeyri-xəttiliklərə malik olan qeyri-xətti tənziqlənmiş sistemləri üçün işlənilməmişdir.

## **§ 8. Xətti sistemlər üçün Lyapunov funksiyasının tərtib olunması**

Aşağıdakı xətti diferensial tənliklər sistemi ilə yazılan xətti və ya xəttiləşdirilmiş obyektə (sistemə) baxaq:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n ,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n ,$$

.....

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n .$$

Və ya vektor formasında:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} . \quad (31)$$

Burada  $\mathbf{A} = (a_{ij}) - n \times n$  -ölçülü məlum sabit matrisdir.

Xətti sistemin yeganə olan tarazlıq vəziyyəti

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = 0$  nöqtəsində olduğundan, koordinatların əvəz olunmasına ehtiyac yoxdur.

Xətti sistemlər üçün Lyapunov funksiyası *kvadratik forma* şəklində axtarılır:

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}x_i x_j, \quad q_{ij} = q_{ji} \quad (32)$$

və ya vektor şəklində

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} . \quad (33)$$

Burada  $\mathbf{Q} = (q_{ij}) - n \times n$  -ölçülü simmetrik matrisdir.

Kvadratik (33) formasının və deməli, skalyar  $V(\mathbf{x})$  funksiyasının müsbət müəyyən olması üçün, birincisi,  $\mathbf{Q}$  simmetrik matris olmalı, ikincisi, onun məxsusi ədədləri  $\lambda_i < 0$  şərtini ödə-

məlidir. Qeyd edək ki, simmetrik matrisin məxsusi ədədləri həqiqi ədədlərdir. Məlum olduğu kimi,  $\lambda_i$

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{Q}) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{Q}| = 0 \quad (34)$$

xarakteristik tənliyinin həllindən tapılır.

Matrisin müsbət müəyyən (mənfi müəyyən) olmasının başqa bir əlaməti onun bütün  $\Delta_i$  diaqonal (baş) minorlarının sıfırdan böyük (kiçik) olmasıdır. Bu Silvestrin zəruri və kafi şərtidir. Bu halda aşağıdakı münasibətlər ödənilməlidir:

$$\Delta_1 = q_{11} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = |\mathbf{Q}| > 0. \quad (35)$$

Lyapunov funksiyasının törəməsi

$$\frac{dV}{dt} = \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^m \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{x}^m (\mathbf{A}^m \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}) \mathbf{x}. \quad (36)$$

Göründüyü kimi, yeni kvadratik forma alınmışdır. Əgər  $\mathbf{P}$  ilə işarə etdiyimiz

$$\mathbf{P} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}) \quad (37)$$

matrisinə müsbət müəyyən (yəni  $(\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A})$  matrisi mənfi müəyyən olarsa) matris olarsa, onda  $\dot{V}(\mathbf{x})$  mənfi müəyyən funksiya olacaq və teorem 2-yə əsasən (31) bütövlükdə asimptotik dayanıqlı sistem olacaqdır.

$\mathbf{P}$  matrisinin müsbət müəyyənliyini seçilmiş müsbət müəyyən  $\mathbf{Q}$  və məlum  $\mathbf{A}$  matrislərini (37) ifadəsində yerinə yazaraq yuxarıda göstərilmiş iki üsuldən biri ilə yoxlamaq olar. Göstərmək olar ki, əgər  $\mathbf{A}$  matrisi dayanıqlıdır (Hurvis matrisi), yəni məxsusi ədədlərinin həqiqi hissələri sıfırdan kiçikdirsə, onda istənilən müsbət müəyyən  $\mathbf{Q}$  üçün  $\mathbf{P}$  matrisi də müsbət müəyyən matris şəklində alınır.

Adətən praktiki hesablamalarda tərs məsələyə baxırlar. Hər hansı bir müsbət müəyyən  $\mathbf{P}$  matrisi verilir (sadəlik üçün  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$

vahid matris şəklində qəbul etmək olar) və (37) matris tənliyinin həllindən  $\mathbf{Q}$  tapılır. Əgər, o da müsbət müəyyən matris olarsa, onda sistem asimptotik dayanıqlıdır.

$\mathbf{P}$  simmetrik matris olduğundan  $\mathbf{Q}$  matrisini tapmaq üçün cəmi  $n(n+1)/2$  tənlik lazım gəlir.

Deyilənləri teorem şəklində ümumiləşdirək.

**Teorem 3.** *İstənilən müsbət müəyyən  $\mathbf{P}$  matrisi üçün (32) tənliyini ödəyən müsbət müəyyən simmetrik  $\mathbf{Q}$  matrisi mövcud olarsa,  $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$  sistemi üçün koordinat başlanğıcı (yəni, trivial  $\mathbf{x}=0$  həlli) bütövlükdə asimptotik dayanıqlı tarazlıq nöqtəsidir.*

**Misal 10.** Fərz edək ki, kvadratik (27) forması verilmişdir:

$$V(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Matris şəklində:

$$V(\mathbf{x}) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Göründüyü kimi  $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ . Silvestr teoreminə əsasən  $\Delta_1, \Delta_2$

minorları

$$4 > 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

sıfırdan böyük olduğundan kvadratik forma müsbət müəyyəndir.

**Misal 11.** Fərz edək ki, tənziqləmə sisteminin sıfır olmayan başlanğıc şərtlərin təsiri altında sərbəst hərəkəti:

$$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2.$$

Burada  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  müsbət müəyyən matris şəklində qəbul etsək, (37) matris tənliyini belə yazmaq olar:

$$-\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$q_{12} = q_{21}$  olduğunu nəzərə alıb alınmış matris tənliyini açaq:

$$2q_{11} + 2q_{12} = 1,$$

$$q_{11} - 3q_{12} - q_{22} = 0,$$

$$-2q_{12} + 2q_{22} = 1.$$

Bu tənliklər sisteminin həlli:  $q_{11} = 0.5$ ,  $q_{12} = 0$ ,  $q_{22} = 0.5$ . Beləliklə,

$$Q = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

diaqonal matris olduğundan müsbət müəyyən matrisdir. Deməli, baxılan xətti sistem asimptotik dayanıqlıdır.

## § 9. Qeyri-xətti sistemlər üçün Lyapunov funksiyasının tərtib olunması

Lyapunov funksiyasının tərtib olunma qaydasının məlum olduğu müəyyən tip qeyri-xətti sistemlərə baxaq.

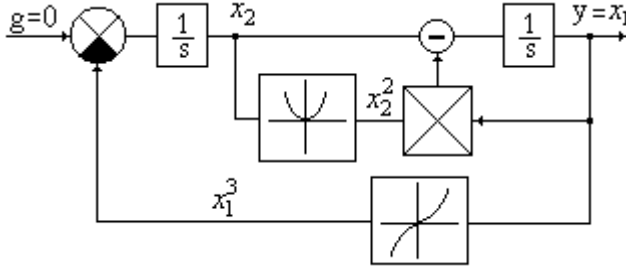
**Fasiləsiz qeyri-xəttiliklər.** Bəzi sadə hallarda fasiləsiz qeyri-xətti sistemlər üçün də Lyapunov funksiyasını kvadratik formada qurmaq mümkün olur.

Bir misala baxaq. Sistemin tənliyi

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_1 x_2^2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1^3.$$

Sistemin struktur sxemi şəkil 13-də göstərilmişdir.



**Şəkil 13.**

Lyapunov funksiyasını aşağıdakı müsbət müəyyən kvadratik forma şəklində seçək:

$$V(\mathbf{x}) = q_{11}x_1^4 + q_{22}x_2^2 .$$

Sistemin trayektoriyası üzərində bu funksiyanın dəyişməsi

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 4q_{11}x_1^3(x_2 - x_1x_2^2) + 2q_{22}(-x_1^3) .$$

$q_{11}=1/4$  ,  $q_{22}=1/2$  qəbul etsək:  $\dot{V}(\mathbf{x}) = -x_1^4x_2^2$  . Bu funksiya  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  , yəni mənfi müəyyən funksiya olduğundan koordinat başlanğıcı asimptotik dayanıqlı tarazlıq nöqtəsidir.

Daha yüksək tərtibli sistemlər üçün Lyapunov funksiyasını qurmaq üçün konstruktiv üsullardan biri olan D.Şuls üsulu ilə tanış olaq. Bu üsul V funksiyanın vektor qradiyentinin xətti şəkildə aproksimasiyasına əsaslanır:

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ \dots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n \end{bmatrix} \quad (38)$$

Bu halda V-nin törəməsi (23) ümumi ifadəyə əsasən təyin olunur:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \nabla V^T \dot{\mathbf{x}} = \nabla V^T \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (39)$$

Tərsinə hərəkət edərək  $\dot{V}(\mathbf{x})$  törəməsinə əsasən uyğun  $V$  funksiyasını tapaq:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int_0^{\mathbf{x}} \nabla V^T d\mathbf{x} = \int_0^{x_1} \nabla V_1(\xi_1, 0, \dots, 0) d\xi_1 + \\ &+ \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, \xi_2, 0, \dots, 0) d\xi_2 + \dots + \int_0^{x_n} \nabla V_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi_n) d\xi_n. \end{aligned} \quad (40)$$

Şuls üsulunun tətbiqinə baxaq.

**Misal 12.** Sistemin sərbəst hərəkəti:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1^3. \end{aligned}$$

Sistemin tərtibi  $n = 2$  olduğu üçün (38)-ə əsasən

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

İfadə (39)-ə əsasən  $f_1 = x_2$ ,  $f_2 = -x_2 - x_1^3$  olduğundan

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2)x_2 + (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2)(-x_2 - x_1^3) = \\ &= -\alpha_{21}x_1^4 + (\alpha_{11} - \alpha_{21} - \alpha_{22}x_1^2)x_1x_2 - (\alpha_{22} - \alpha_{12})x_2^2. \end{aligned}$$

$\alpha_{ij}$  parametrlərini elə seçmək lazımdır ki,  $\dot{V}$  mənfi müəyyən funksiya olsun, yəni  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \neq 0$  və  $\dot{V}(0) = 0$  şərtləri ödənilsin.  $\alpha_{21} > 0$ ,  $\alpha_{22} \geq \alpha_{12}$  və  $x_1x_2$  vuruğunun əmsalını  $\alpha_{11} = \alpha_{21} + \alpha_{22}x_1^2$  şəklində qəbul etsək, mənfi müəyyənlik şərtini təmin etmiş olarıq. Konkret olaraq  $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 2$ ,  $\alpha_{22} = 2$  qəbul edək. Onda  $\alpha_{11} = 2 + 2x_1^2$ . Bu halda

$$\dot{V} = -2x_1^4.$$



Qradiyentin ifadəsi

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_1^3 + 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

İfadə (40)-a əsasən

$$V = \int_0^{x_1} (2\xi_1 + \xi_1^3) d\xi_1 + \int_0^{x_2} (2x_1 + 2\xi_2) d\xi_2 = \frac{1}{2}x_1^4 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2.$$

Lyapunov funksiyası  $V$ , nəzəri hissədə deyildiyi kimi müsbət müəyyən olmalıdır. Bu xassəni yoxlamaq üçün alınmış  $V$  funksiyasını aşağıdakı kimi yazaq:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + 0.5x_1^4.$$

Burada  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  və  $\Delta_1 = 1$ ,  $\Delta_2 = 0$  olduğundan kvadratik

forma müsbət yarımmüəyyəndir, yəni  $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} \geq 0$ . İkinci toplanan isə müsbət müəyyən funksiya, yəni  $0.5x_1^4 > 0$  olduğundan,  $V$  də müsbət müəyyən funksiya şəklində alınır.

Beləliklə, Lyapunovun 2-ci teoreminin şərtləri ödəndiyindən  $\mathbf{x} = 0$  nöqtəsi asimptotik dayanıqlı tarazlıq nöqtəsidir.

Qeyd edək ki,  $\alpha_{22} = 4 > \alpha_{12}$  qiymətində

$$V = -2x_1^4 - 2x_2^2.$$

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + x_1^4.$$

Bu halda  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\Delta_1 = 1 > 0$ ,  $\Delta_2 = 1 > 0$  olduğundan kvad-

ratik forma müsbət müəyyən alınır.

**Misal 13.** İndi  $B$  dayanıqlıq oblastının (birtərtibli halda – intervalının) təyin olunması mümkün olan sadə hala baxaq. Sistem birtərtibli olub sərbəst hərəkəti aşağıdakı qeyri-xətti diferensial tənliklə yazılır:

$$\frac{dx}{dt} = -x + x^3 .$$

Bu sistemin  $x=0$ ,  $x=\pm 1$  nöqtələrində yerləşən üç tarazlıq nöqtəsi mövcuddur.  $x=0$  nöqtəsinin dayanıqlığını araşdıraraq.

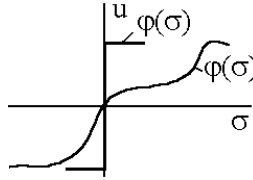
Lyapunov funksiyasını  $V=x^2$  şəklində seçək. Bu halda  $\dot{V}=-2x^2+2x^4$ .  $V$  funksiyası bütün  $x \neq 0$  üçün müsbət müəyyən funksiya olsa da,  $\dot{V}$  yalnız  $|x|<1$  üçün mənfi müəyyəndir. Deməli, dayanıqlıq intervalı  $-1 < x < +1$  parçasıdır. Bu o deməkdir ki, sistemin trayektoriyaları bu intervala daxil olan bütün  $|x(0)|<1$  başlanğıc vəziyyətlərindən asimptotik olaraq  $x=0$  nöqtəsinə yaxınlaşırlar.

Ümumiyyətlə  $V$  və  $\dot{V}$  funksiyalarının xassələri əsasında dayanıqlıq oblastlarını təyin edərkən ehtiyatlı olmaq lazımdır.  $V$ -nin seçilməsindən asılı olaraq təhlil olduqca mürəkkəbləşə bilər.

İndi Lyapunov funksiyasını  $V=x^2-0.5x^4$  şəklində seçək. Bu halda  $\dot{V}=-2(x+x)^2$  istənilən  $x$  üçün mənfi müəyyən funksiya şəklində alınır.  $V$ -nin müsbət müəyyənlik intervalını təyin etmək hətta baxılan sadə halda belə, müəyyən çətinliklə əlaqədardır.  $0 \leq x^2-0.5x^4 < \varepsilon$  bərabərsizliyini həll etsək alarıq:  $\varepsilon=0.5$ ,  $|x|<1$  olanda. Deməli, əvvəldə olduğu kimi burada da dayanıqlıq intervalı  $-1 < x < +1$  parçasıdır.

**(0,∞) sektorunda məhdud olan qeyri-xəttiliklər.** A.İ.Lurye 1950-ci ildə xətti obyektədən və  $(0,\mu) = (0,\infty)$  sektorunda, yəni I,III rüblərdə yerləşən fasiləsiz və ya sıfır nöqtəsində birinci növ kəsilməyə malik olan birqiymətli qeyri-xəttilikdən ibarət sistemlər üçün Lyapunov funksiyasının qurulma qaydasını təklif etmişdir.

Şəkil 14-də  $\varphi(\sigma)$  qeyri-xəttiliyinin dəyişmə xarakteri göstərilmişdir.



**Şəkil 14**

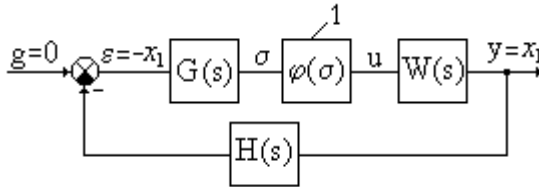
Qeyri-xəttilik aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$\sigma\varphi(\sigma) > 0 \quad \text{əgər } \sigma \neq 0, \quad (41)$$

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{əgər } \sigma = 0. \quad (42)$$

Sıfır nöqtəsində, kəsilən xarakteristikaların qeyri-müəyyənliyinə baxmayaraq onlar üçün də (42) şərtini qəbul etmək lazımdır.

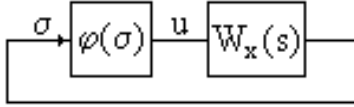
Birölçülü tənzimləmə sisteminin struktur sxemi şəkil 15-də göstərilmişdir.



**Şəkil 15**

Dayanıqlığı tədqiq etdikdə xarici qüvvə kimi tapşırıq təsirini sıfır qəbul edib sistemin sıfır olmayan başlanğıc şərtlərin təsiri altında sərbəst hərəkətinə baxırlar.

Şəkil 15 – statik (yaddaşsız) qeyri-xətti tənzimləyicidir. Struktur çevirmələrin köməyi ilə xətti hissələri:  $W(s)$  – obyekt,  $H(s)$  – əks əlaqəni,  $G(s)$  – qeyri-xəttiliyin  $\sigma = c_1\varepsilon + c_2\dot{\varepsilon} + \dots$  xətti arqumentini formalaşdıran blokun ötürmə funksiyalarını  $W_x(s)$  xətti blokda birləşdirsək şəkil 16-da göstərilmiş ekvivalent sxemi almış olarıq.



**Şəkil 16**

Sistemin vəziyyətlər koordinatlarında yazılışı:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad (43)$$

$$u = \varphi(\sigma),$$

$$\sigma = \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

$$y = x_1.$$

Burada  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  – n-ölçülü vəziyyət vektoru;  $u$  – skalyar idarə təsiri;  $\sigma$  – dəyişmə funksiyası;  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$  – n-ölçülü vektor;  $\varphi(\cdot)$  – fasiləsiz və ya parçada kəsilməz qeyri-xəttilik;  $y$  – sistemin çıxış kəmiyyətidir.

$\sigma\varphi(\sigma) > 0$ ,  $\sigma \neq 0$  şərti bu hasilin müsbət müəyyənliyini,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\sigma = 0$  şərti isə  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  olduğundan yeganə tarazlıq nöqtəsinin  $\mathbf{x} = 0$  nöqtəsi olduğunu təmin edir. Deməli,  $\mathbf{x} = 0$  nöqtəsi dayanıqlı olarsa, (43) qeyri-xətli sistemi *bütövlükdə*, yəni *mütləq dayanıqlı* sistem olur.

Çıxışa nəzərən yazılmış tənlikdən vəziyyət dəyişənlərində yazılmış (38) tənliyinə keçidə aid bir misala baxaq. Fərz edək ki, ikiölçülü obyektin çıxışa nəzərən yazılmış tənliyi:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = bu.$$

Əvvəlcə  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  qəbul edib, obyektin tənliyini vəziyyətlər dəyişənlərində yazaq:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

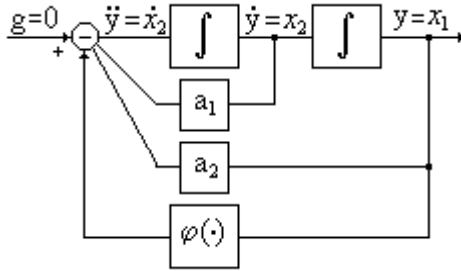
$$\dot{x}_2 = -a_2x_1 - a_1x_2 + bu. \quad (44)$$

Fərz edək ki, qeyri-xəttilik yalnız xətanın özündən asılıdır:  $u = \varphi(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = g - y$  – tənzipləmə xətasıdır.  $g = 0$  olduğundan  $\varepsilon = -y = -x_1$  və  $u = -\varphi(x_1)$ . Bu halda  $\sigma = -x_1$ . (44)-ə uyğun

qapalı tənzimləmə sisteminin tənliyi:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_2x_1 - a_1x_2 - b\varphi(x_1), \\ y &= x_1. \end{aligned} \quad (45)$$

Uyğun sistemin struktur sxemi şəkil 17-də göstərilmişdir.



Şəkil 17.

Tənliklər sistemi (43) ilə yazılan sistemlər üçün Lyapunov funksiyası kvadratik forma ilə  $\varphi(\sigma)$  qeyri-xəttiliyin inteqralının cəmi şəklində qəbul olunur:

$$V(\mathbf{x}, \sigma) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \beta \int_0^{\sigma} \varphi(\xi) d\xi \quad (46)$$

Burada  $\mathbf{Q}$  – müsbət müəyyən simmetrik matris,  $\beta > 0$ . (41), (42)

şərtlərinin sayəsində ikinci toplanan da  $\int_0^{\sigma} \varphi(\xi) d\xi > 0$ . Yəni müsbət

müəyyən funksiyadır. Hər iki toplanan müsbət müəyyən funksiya olduğundan (46) şəklində seçilmiş Lyapunov funksiyası müsbət müəyyən funksiyadır, yəni  $V(\mathbf{x}, \sigma) > 0$ ,  $\mathbf{x} \neq 0$ ,  $V(0) = 0$ . Dəyişənlər  $\mathbf{x}$  və  $\sigma$  artdıqca  $V(\mathbf{x}, \sigma) = c = \text{const}$  bərabər səviyyə xətlərinin qiyməti artaraq bütün fəzanı doldurur.

Sistem (43)- in dayanıqlı olması üçün  $\dot{V}(\mathbf{x}, \sigma)$  mənfi müəyyən funksiya olmalıdır, yəni  $\dot{V}(\mathbf{x}, \sigma) < 0$ ,  $\mathbf{x} \neq 0$ ,  $\dot{V}(0) = 0$ .

İfadə (46)-ə əsasən  $\dot{V}(\mathbf{x}, \sigma)$  funksiyasını təyin edək:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \sigma) = (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x})' + (\beta \int_0^\sigma \varphi(\xi) d\xi)' = \quad (47)$$

$$= \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{P}_x \varphi(\sigma) + \beta \varphi(\sigma) \dot{\sigma};$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A},$$

$$\mathbf{P}_x = \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{B}, \quad (48)$$

$$\dot{\sigma} = \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c}^T [\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \varphi(\sigma)].$$

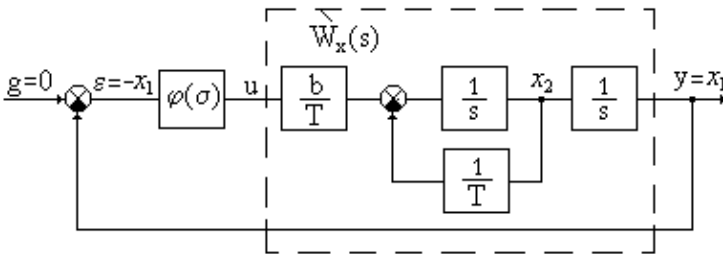
$\dot{V}$  törəməsinin mənfi müəyyən olması şərti  $\mathbf{c}^T$  parametrini və  $\beta$  kəmiyyətini seçməklə yerinə yetirilir. Layihə məsələlərində obyektin  $\mathbf{A}$  və  $\mathbf{B}$  parametrləri qabaqcadan məlum olmadığından onları da  $\dot{V}(\mathbf{x}, \sigma) < 0$  şərtinin ödənilməsinə tabe etmək olar.

Bu üsulun əsas müsbət xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki,  $\dot{V}(\mathbf{x}, \sigma)$  funksiyasının mənfi müəyyən olub-olmamasını araşdırdıqda  $\varphi(\sigma)$  qeyri-xəttiliyinin konkret şəklini bilmək tələb olunmur. Onun yalnız (41), (42) şərtlərini ödəyən qeyri-xəttiliklər sinfinə daxil olması kifayətdir.

**Misal 14.** Şəkil 18-də göstərilən və xətti hissəsinin ötürmə funksiyası

$$W_x(s) = \frac{b}{s(Ts+1)}$$

olan (ətalətli-inteqrallayıcı manqa) və  $\varphi(\sigma)$  qeyri-xəttiliyə malik olan qeyri-xətti tənzimləmə sisteminin tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlıq şərtini təyin etməli.



Şəkil 18

Xətti hissənin ("obyektin") çıxışa nəzərən yazılmış diferensial tənliyi:

$$T\ddot{y} + \dot{y} = bu .$$

$x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  qəbul edib, xətti hissənin tənliyini vəziyyətlər koordinatlarında yazmaq:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 , \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 + \frac{b}{T}u , \\ y &= x_1 . \end{aligned}$$

Şəkildən görüldüyü kimi, qapalı sistemdə qeyri-xəttilik  $\varepsilon$  xətasının özündən asılıdır, yəni  $\varphi(\varepsilon)$  şəklində. Qapanma tənliyini  $\varepsilon = g - y$  və  $g = 0$  halında  $\varepsilon = -y = -x_1$ . Qeyri-xətti xarakteristikənin tək funksiya olduğunu nəzərə alsaq,  $u = -\varphi(x_1)$ . Görüldüyü kimi, bu halda  $\sigma = x_1$ , deməli,  $c^T = (1, 0)$ . Qapalı sistemin vəziyyətlər koordinatlarında tənliyi:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 , \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 - \frac{b}{T}\varphi(x_1) . \end{aligned}$$

Burada  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/T \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -b/T \end{pmatrix}$ ,  $c^T = (1, 0)$ .

Lyapunov funksiyası üçün  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$  qəbul etsək, (46)-ya əsasən yazmaq olar:

$$V = \frac{1}{2}x_2^2 + \beta \int_0^{x_1} \varphi(\xi) d\xi .$$

Bu funksiyanın törəməsini tapmaq üçün (47) ifadəsindən istifadə edək.  $P, \dot{\sigma}$  və  $P_x$  ifadələri (48)-yə əsasən tapırıq:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/T \end{pmatrix}, \quad P_x = -\frac{b}{T}x_2, \quad \dot{\sigma} = x_2.$$

Qeyd edək ki,  $\dot{\sigma}$  törəməsini (48) ifadəsinin köməyi ilə də hesablamaq olardı.  $\sigma = x_1$  olduğundan asanlıqla təyin etmək mümkündür:  $\dot{\sigma} = \dot{x}_1 = x_2$ .

Beləliklə,

$$\dot{V} = -\frac{1}{T}x_2^2 - \frac{b}{T}x_2\varphi(x_1) + \beta x_2\varphi(x_1).$$

$\beta = \frac{k}{T}$  qəbul etsək,  $\dot{V} = -\frac{1}{T}x_2^2 < 0$  alarıq.  $\dot{V}$  bütün vəziyyət müstəvisində mənfi müəyyən funksiya olduğundan, baxılan sistemin  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T = 0$  tarazlıq vəziyyəti bütövlükdə asimptotik dayanıqlı nöqtədir.

## **§ 10. V.M. Popovun mütləq dayanıqlıq kriterisi (1960 – cı il)**

Qeyri-xətti sistemlərin olduqca müxtəlif olmasına baxmayaraq, elə sinif sistemlər mövcuddur ki, bunlar dayanıqlıq baxımından özlərini xətti sistemlər kimi aparırlar, yəni *bütövlükdə dayanıqlıq* xassəsinə malikdirlər.

Lakin xətti sistemlərə xas olan bütövlükdə dayanıqlıq bu sistemlər üçün *mütləq dayanıqlıq* anlayışı ilə əvəz olunmuşdur. Xətti sistemlərdə olduğu kimi belə sistemlərdə də vəziyyətlər və ya faza fəzasının istənilən nöqtəsindən başlayan trayektoriya zaman keçdikcə koordinat başlanğıcında yerləşən yeganə tarazlıq nöqtəsinə yaxınlaşır. Yəni bütün vəziyyətlər fəzası cəzbolunma oblastıdır. Praktiki baxımdan bu o deməkdir ki, sistemdə texniki və fiziki şərtlərlə məhdudlaşdırılan işçi oblastın daxilində qalan istənilən meyletmələr ("kifayət qədər kiçik" yox) zaman keçdikcə sıfıra yaxınlaşır.

Baxılan üsulun əsas üstünlüyü  $\varphi(\sigma)$  qeyri-xəttiliyinin (qeyri-xətti hissənin statik xarakteristikası) tipini bilmək tələb olunmamasıdır. Onun



hər hansı bir sektora daxil olmasını bilmək kifayətdir. Adətən,  $u_1 = \mu_1 \varepsilon$  və  $u_2 = \mu_2 \varepsilon$  xətləri arasında yerləşən  $u = \varphi(\varepsilon)$  qeyri-xəttiliklərinə baxırlar. Yəni

$$\mu_1 \varepsilon \leq \varphi(\varepsilon) \leq \mu_2 \varepsilon$$

və ya

$$\mu_1 \leq \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq \mu_2, \quad 0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \infty.$$

Burada  $\varphi(\varepsilon)$  – qeyri-xətti hissənin statik xarakteristikası;  $\mu_1, \mu_2$  – sektoru məhdudlaşdıran düz xətlərin bucaq əmsallarıdır.

Şəkil 19-da  $M[\mu_1, \mu_2]$  sinfinə daxil olan bəzi qeyri-xəttiliklər göstərilmişdir.

Şəkildə, 1 – fasiləsiz, 2 isə – kəsilən qeyri-xətti xarakteristikalardır.

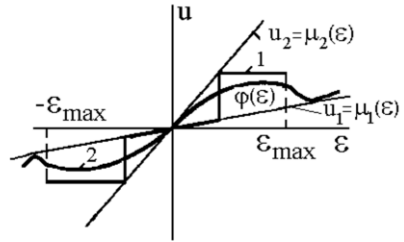
Hesablamaları araşdırmaq məqsədi ilə adətən  $\varphi(\varepsilon)$  xarakteristikasını  $[0, \mu]$  sektoruna sürüşdürürlər,  $\mu = \mu_2 - \mu_1$ . Bu halda sürüşdürülmüş xarakteristika

$$\varphi_0(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon) - \mu_1 \varepsilon \quad (49)$$

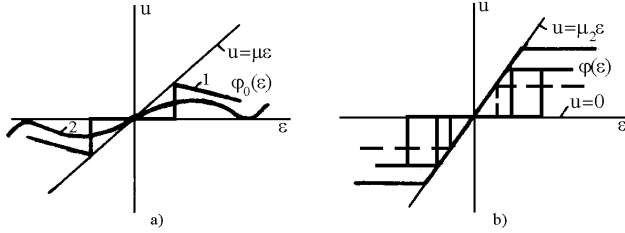
ifadəsi ilə təyin olunur. Bu halda

$$0 \leq \frac{\varphi_0(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq \mu, \quad \varepsilon \neq 0, \quad 0 < \mu < \infty.$$

Şəkil 20, a-da sürüşdürülmüş, b-də isə sürüşdürülməsinə ehtiyac olmayan xarakteristikalar göstərilmişdir.



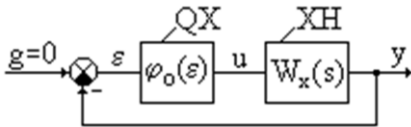
**Şəkil 19**



**Şəkil 20**

Funksiya  $\varphi(\varepsilon)$  fasiləsiz və ya parçada-fasiləsiz (kəsilən) bir-qiymətli olmadıqda, misal üçün, histerezisə malik olan rele xarakteristikaları, struktur çevirmələrin köməyi ilə onu birqiymətli xarakteristikaya gətirmək lazımdır. Məsələn, histerezisə malik olan üçmövqeli rele xarakteristikasını həssaslıq zonasına malik olan üçmövqeli releni gücləndirmə əmsalı histerezisin eninə bərabər olan müsbət əks əlaqə ilə əhatə etməklə birqiymətli xarakteristikaya gətirmək olar.

Bundan başqa, müxtəlif qeyri-xətti və xətti maneələrdən ibarət olan ilkin tənzimləmə sistemini statik xarakteristikası  $\varphi_0(\varepsilon)$  yuxarıdakı tələblərə cavab verən qeyri-xətti hissə (QX) ilə  $W_x(s)$  ötürmə funksiyasına malik olan dayanıqlı xətti hissənin (XH) ardıcıl birləşməsindən ibarət olan birkonturlu tənzimləmə sisteminə gətirmək lazımdır.



**Şəkil 21**

Gətirilmiş sistemin struktur sxemi şəkil 21-də göstərilmişdir.

Yada salaq ki, xətti hissənin dayanıqlı olması üçün onun xarakteristik tənliyinin,

yəni  $W_x(s)$  ötürmə funksiyasının məxrəcindəki polinomun köklərinin həqiqi hissələri sıfırdan kiçik olmalıdır.

Rumın riyaziyyatçısı V.M.Popov 1959-cu ildə Lyapunovun ikiknci üsulundan istifadə edərək stasionar və qeyri-stasionar (zaman üzrə dəyişən) birqiymətli qeyri-xəttiliyə və dayanıqlıq

xətti hissəyə malik olan birkonturlu tənzimləmə sistemləri üçün *bütövlükdə asimptotik dayanıqlığın zəruri şərtini* təyin edən çox sadə və həndəsi əyaniliyə malik olan *tezlik dayanıqlıq kriterisi* təklif etmişdir.

Qeyri-xətti xarakteristikaya qoyulan tələbat çox ümumi olduğundan Popovun kriterisi geniş praktiki tətbiq tapmışdır.

Popovun mütləq dayanıqlıq kriterisi:  $[0, \mu]$  *sektorunda*

$0 \leq \frac{\varphi_0(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq \mu$  *şərtini ödəyən birqiymətli*  $\varphi_0(\varepsilon)$  *qeyri-xəttiliyindən və dayanıqlı xətti hissədən ibarət olan birkonturlu tənzimləmə sisteminin bütövlükdə asimptotik* (buradakı anlayışa əsasən – mütləq) *dayanıqlı olması üçün tezliyin*  $\omega \geq 0$  *qiymətləri üçün elə həqiqi*  $q$  *ədədi mövcud olmalıdır ki,*

$$Q(\omega) - q\omega P(\omega) + \frac{1}{\mu} > 0 \quad (60)$$

*şərti ödənilsin.*

Bu teorem mütləq dayanıqlığın zəruri şərtini ifadə edir. Birqiymətli stasionar xətiliklər üçün  $-\infty < q < \infty$ ,  $0 < \mu < \infty$ .  $Q(\omega)$  və  $P(\omega)$  xətti hissənin  $W_x(j\omega)$  tezlik ötürmə funksiyasının həqiqi və xəyali hissələridir. Yəni

$$W_x(j\omega) = Q(\omega) + jP(\omega) \quad (61)$$

Popovun (60) kriterisi tədqiqatlar üçün çox faydalı olan həndəsi əyaniliyə malikdir. Həndəsi qurmaları aparmaq üçün ifadə (60)-da işarə edək:

$$Q(\omega) = Q_M(\omega), \quad \omega P(\omega) = P_M(\omega) \quad (62)$$

Onda yazmaq olar:

$$Q_M(\omega) - qP_M(\omega) + \frac{1}{\mu} > 0 \quad (63)$$

Uyğun olaraq, modifikasiya olunmuş xətti hissə anlayışından istifadə edək:

$$W_{MX}(j\omega) = Q_M(\omega) + jP_M(\omega) \quad (64)$$

Popovun kriterisinin bərabərlik halı üçün:

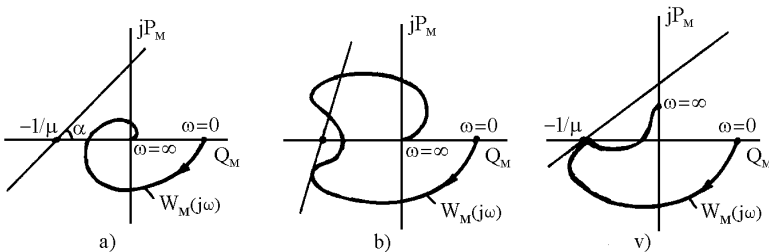
$$P_M(\omega) = \frac{1}{q} Q_M(\omega) + \frac{1}{q\mu} \quad (65)$$

İfadə (65),  $(Q_M, jP_M)$  kompleks müstəvisində  $Q_M$  absis oxunu  $(-1/\mu; j \cdot 0)$  nöqtəsində kəsən və  $1/q$  bucaq əmsalına malik ( $\alpha = \arctg(1/q)$ ) olan düz xəttin tənliyidir. Bu xətt *Popov xətti* adlanır.

Bu xətt bütün müstəvini iki hissəyə ayırır. (63) bərabərsizliyi xətdən sağ tərəfdə yerləşən oblastı xarakterizə edir. Beləliklə, Popovun (60) mütləq dayanıqlıq kriterisinin ödənilməsi üçün modifikasiya olunmuş xətti hissənin AFTX Popov xəttindən sağ tərəfdə yerləşməlidir.

Parametr  $q$ -nün konkret qiyməti verilmədiyindən bu əlaməti yoxlamaq üçün əvvəlcə  $Q_M(\omega)$  və  $P_M(\omega)$  həqiqi və xəyali hissələrini  $\omega \geq 0$  qiymətləri üçün hesablayıb modifikasiya olunmuş xətti hissənin AFTX (Popov qodoqrafı) qurmaq lazımdır. Sonra xətkəşin köməyi ilə absis oxunun üzərində yerləşən  $(-1/\mu; j \cdot 0)$  nöqtəsindən keçən elə düz xətt axtarmaq lazımdır ki, AFTX bu xəttin sağ tərəfində yerləşsin. Düz xəttin bucaq əmsalı  $-\infty < 1/q < \infty$  olduğundan o ixtiyari ola bilər. Əgər heç olmasa bir belə xətt tapmaq mümkündürsə, onda sistem mütləq dayanıqlıdır.

Şəkil 22-də, a – dayanıqlı, b – dayanıqsız hallar göstərilmişdir. b – toxunan halını isə dayanıqlıq sərhəddi kimi qəbul etmək olar.

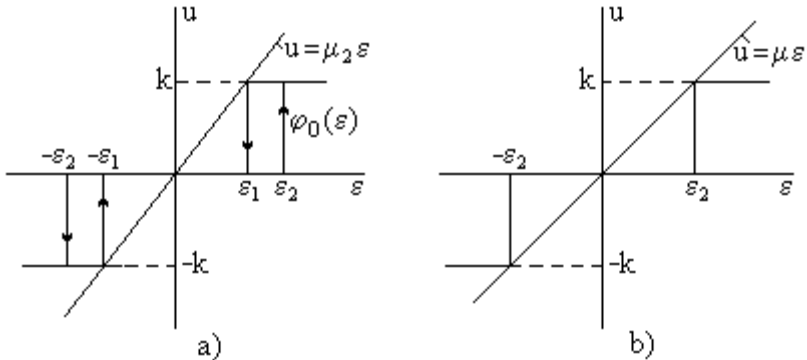


**Şəkil 22**

Popovun kriterisinin ən maraqlı xüsusiyyətlərindən biri də odur ki, o, xətti və qeyri-xətti hissələrin buraxıla bilən parametrləri arasında əlaqə yaratmağa imkan verir. Məsələn,  $q$  parametri xeyli sərbəst olduğundan, qeyri-xətti xarakteristikanın daxil olduğu sektorun minimal bucağını  $\mu = \mu_{\min}$  və ya xətti hissənin gücləndirmə əmsalının maksimal mümkün qiymətini seçmək olar.

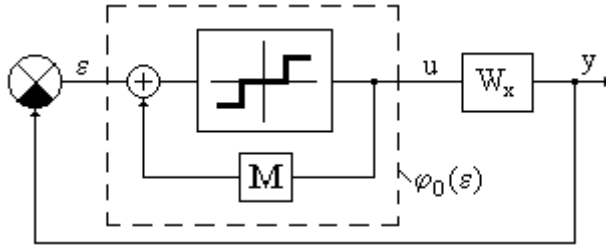
**Misal 15.** Gecikən histerezisə malik olan ikiqiymətli xarakteristikalı qeyri-xətti hissədən və dayanıqlı  $W_x(s)$  hissədən ibarət olan sistemdə struktur çevrilmələrin yerinə yetirilməsi qaydasına baxaq.

İlkin qeyri-xətti xarakteristika (şəkil 23,a)  $\varphi(\varepsilon)$  üçün  $\mu_1 = 0$  olduğundan onu (49) idarəsinin köməyi ilə sürüşdürməyə ehtiyac yoxdur. Lakin  $\varphi(\varepsilon)$  ikiqiymətli olduğundan sistemi birqiymətli xəttiliyə malik olan ekvivalent sistemə gətirmək lazımdır.



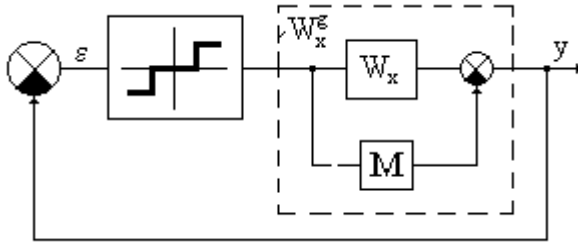
**Şəkil 23**

Şəkilə a-da  $\mu_2 = k/\varepsilon$ , b)-də  $\mu = k/\varepsilon_2$ . Bu məqsədlə ilkin  $\varphi_0(\varepsilon)$  xarakteristikasını şəki 23, b-də göstərilən üçmövqəli birqiymətli olan rele xarakteristikasını  $M = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$  histerezisin eninə bərabər olan gücləndirməyə malik müsbət əks əlaqə ilə əhatə etmək olar (bax, şəkil 24).



Şəkil 24

Xətti əks əlaqəni obyektə aid etsək, yekunda şəkil 25-də göstərilən sxemi alarıq.



Şəkil 25

Şəkildə  $W_x^g$  – gətirilmiş xətti hissənin ötürmə funksiyasıdır. Şəkildən görüldüyü kimi, *Popov qodoqrafını* gətirilmiş xətti hissə üçün qurmaq lazımdır. Kritik  $(-1/\mu; j0)$  nöqtəsini təyin etmək üçün  $k$  və  $\varepsilon_2$  verilməlidir.  $k$  və  $M$  parametrlərinin hədd qiymətlərini tapmaq üçün qodoqrafı bunların müxtəlif qiymətlərində kompüterdə quraraq onun Popov xəttinə nəzərən necə yerləşməsini tədqiq etmək olar.

## § 11. Xətti sistemlərin dayanıqlığının xarakteristik tənliyin kökləri əsasında təyini. Köklər üsulu

Differensial tənliyin həlli müəyyən çətinliklərlə əlaqədar olarsa dayanıqlığı təyin etmək üçün obyektin (sistemin) xarakteristik tənliyindən istifadə etmək olar.

Xatırladaq ki, xarakteristik tənlik obyektin

$$W(s) = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_0}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (66)$$

ötürmə funksiyasının məxrəcindəki polinomu sıfıra bərabər etməklə alınır:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (67)$$

Dayanıqlıq  $u = 0 \Rightarrow U(s) = 0$  halında sərbəst hərəkət ilə təyin edildiyindən sürətdəki polinom  $M(s) = 0$  olur və dayanıqlığa təsir etmir.

Obyektin tənliyi vəziyyət modeli

$$dx/dt = Ax + Bu,$$

$$y = Cx + Du$$

şəklində verilsə xarakteristik tənlik:

$$D(s) = \det(sI - A) = 0. \quad (68)$$

Xarakteristik tənliyi MATLAB-da **poly(A)** funksiyasının köməyi ilə almaq olar.

**Dayanıqlığın zəruri şərti.** *Obyektin (ATS-in) dayanıqlığının zəruri şərti onun xarakteristik tənliyinin bütün  $a_i$  əmsallarının sıfırdan böyük olmasıdır:  $a_i > 0$ .*

**Tərif. Xətti sistemin dayanıqlı olmasının zəruri və kafi şərti onun xarakteristik (67) (və ya (68)) tənliyinin bütün  $s_i$  köklərinin həqiqi hissələrinin sıfırdan kiçik olmasıdır. Yəni**

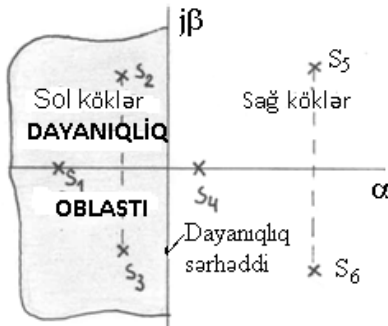
$$\operatorname{Re}(s_i) < 0 \quad (69)$$

şerti ödənilməlidir.

Vəziyyət modelində (68) xarakteristik tənliyinin kökləri  $A$  matrisinin məxsusi qiymətləri və ya xarakteristik ədədləridir. Bu halda obyektin dayanıqlı olması üçün  $A$  matrisi *Hurvis matrisi* olmalıdır. Belə matrisin məxsusi qiymətləri  $\operatorname{Re}(s_i) < 0$  şərtini ödəyir.

Həndəsi baxımdan dayanıqlı sistemin bütün  $s_i$  kökləri köklər müstəvisinin ( $S$ -müstəvi) sol tərəfində yerləşməlidir. Belə köklər *sol köklər* adlanır.

Şəkil 26-da köklərin  $S$ -müstəvisində paylanma sxemi göstərilmişdir.  $s_1$  və  $s_4$  kökləri həqiqi köklərdir.



**Şəkil 26.** Xarakteristik tənliyin köklərinin paylanma sxemi

Tərif *sadə köklər* üçün isbat edək. Xatırladaq ki, sadə köklər təkrarlanmayan (sıfır, həqiqi, kompleks-qoşma) köklərdir. Bu halda obyektin sərbəst hərəkəti (tənliyin  $u = 0$  halında həlli) aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$y_s(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t}. \quad (70)$$

$C_1, C_2, \dots, C_n$  - başlanğıc şərtlərdən asılı olan əmsallardır. Məsələn,  $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$  tənliyinə uyğun xarakteristik tənliyin

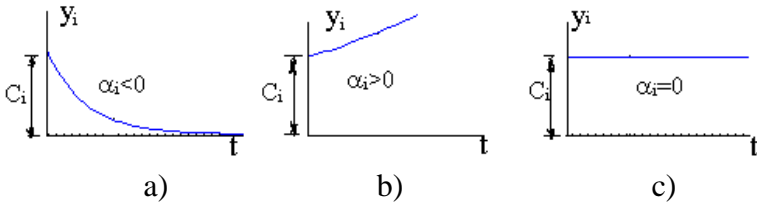


kökləri  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = -2$ ;  $y(0) = 1$ ,  $\dot{y}(0) = 1$  başlangıç şərtlərində həll:  $y_s = 3\exp(-t) - 2\exp(-2t)$ . Burada  $C_1 = 3$ ,  $C_2 = -2$ .

İfadə (70)-dən görüldüyü kimi  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_s(t) = 0$  asimptotik dayanıqlıq şərtinin ödənilməsi üçün bütün  $C_i \cdot e^{s_i t}$  toplananları (harmonikaları) sıfıra yaxınlaşmalıdırlar, yəni zaman  $t \rightarrow \infty$  yaxınlaşanda sönməlidirlər.

**1. Həqiqi köklər.**  $s_i = \alpha_i$  həqiqi köklərə  $y_i = C_i e^{\alpha_i t}$  toplananları uyğun gəlir. Bu toplananlar yalnız  $\alpha_i < 0$  olduqda sıfıra yaxınlaşırlar.  $\alpha_i > 0$  olduqda sonsuz artır,  $\alpha_i = 0$  halında isə  $C_i e^{0 \cdot t} = C_i = \text{const}$  sabit qiymət alır (aperiodik dayanıqlıq sərhəddi).

Şəkil 27, a-c yuxarıdakı hallar göstərilmişdir.



**Şəkil 27.** Həqiqi köklərə uyğun gələn toplananlar

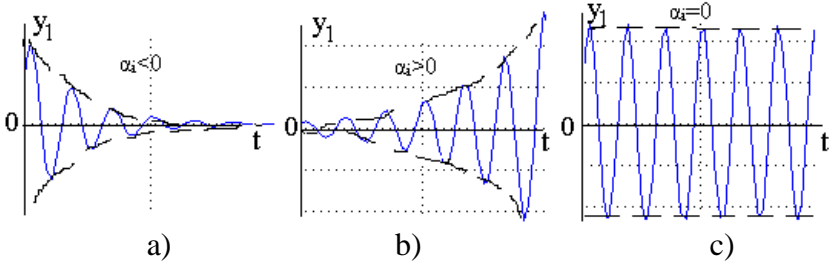
**2. Qoşma – kompleks köklər.**  $s_1 = \alpha + j\beta$ ,  $s_2 = \alpha - j\beta$  köklərinə uyğun gələn  $C_1 e^{s_1 t}$  və  $C_2 e^{s_2 t}$  toplananları qoşa-qoşa toplanaraq harmonik həll yaradır:

$$y_1(t) = e^{\alpha t} (C_1^* \cos(\beta t) + C_2^* \sin(\beta t)).$$

$C_1^*, C_2^*$  – başlangıç şərtlərdən asılı olan sabitlərdir. Həll üçün həqiqi ifadə almaq üçün  $C_{1,2} = a \pm jb$  vuruqları qoşma-kompleks olmalıdır.  $y_1(t)$ -də ikinci vuruq  $\beta$  tezlikli sönməyən rəqslər yaradır. Bu rəqslərin sönməsi, artması və ya amplitudunun sabit qalması  $e^{\alpha t}$  vuruğundan, daha doğrusu kökün həqiqi hissəsi  $\alpha$ -dan asılıdır.

Harmonik toplananlar yalnız  $\alpha < 0$  olduqda sönür, yəni bu toplanan üçün asimptotik dayanıqlıq şərti ödənilir,  $\alpha > 0$  olduqda artır,  $\alpha = 0$  olduqda isə sabit qalır (rəqsi dayanıqlıq sərhəddi).

Şəkil 28, a-c-də yuxarıdakı hallar göstərilmişdir.



**Şəkil 28.** Qoşma-kompleks köklərə uyğun gələn toplananlar

Beləliklə, həqiqi və qoşma-kompleks kökləri birləşdirən (70) həllinin asimptotik dayanıqlıq şərtini ödəməsi üçün (68) xarakteristik tənliyin bütün  $s_i$  köklərinin həqiqi hissələri sıfırdan kiçik olmalıdır, yəni (69)  $\text{Re}(s_i) < 0$  və ya  $\alpha_i < 0$  şərti ödənilməlidir.

**Dayanıqlıq sərhəddi** (Neytral obyektlər). Əgər bəzi köklər üçün  $\text{Re}(s_i) = 0$  olarsa onda bu köklər *dayanıqlıq sərhəddi* olan ordinat oxunda yerləşir. Qalan köklər isə dayanıqlıdır, yəni onlar  $\text{Re}(s_j) < 0$  dayanıqlıq şərtini ödəyir. Burada iki hal fərqləndirilir:

a) **Aperiodik dayanıqlıq sərhəddi.** Bir-neçə kök *həqiqi kök* olub sıfıra  $s_i = \alpha_i = 0$  bərabər olduğundan koordinat başlanğıcında yerləşir. Qalan köklər isə dayanıqlı köklərdir (həqiqi və qoşma-kompleks ola bilər). Aşağıda aperiodik dayanıqlıq sərhəddində olan obyektlərin ötürmə funksiyaları göstərilmişdir:

$$W = \frac{2}{s(s+1)} ; \quad W = \frac{1}{s(s^2 + 0.5s + 1)}$$

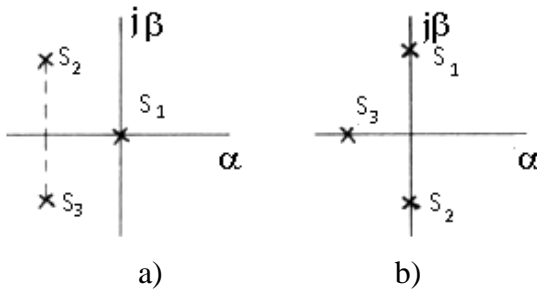
Uyğun olaraq xarakteristik tənliyin kökləri:  $s_1 = 0, s_2 = -1;$   
 $s_{1,2,3} = -0.25 \pm j0.97$ .

b) **Rəqsi dayanıqlıq sərhəddi.** Bəzi köklər *sırf xəyali kök*  $s_i = \pm j\beta_i$  olub ordinat oxunda yerləşir. Digər köklər isə dayanıqlı köklərdir (həqiqi və qoşma-köpleks ola bilər). Məsələn:

$$W = \frac{2}{(s^2 + 1)(4s + 1)(2s + 1)}; \quad W = \frac{5}{(s^2 + 2)(s^2 + 0.4s + 1)}.$$

Xarakteristik tənliyin kökləri:  $s_{1,2} = \pm j \cdot 1$ ,  $s_3 = -1/4$ ,  $s_4 = -1/2$ ;  
 $s_{1,2} = \pm j \cdot \sqrt{2}$ ,  $s_{3,4} = -0.2 \pm j0.98$ .

Şəkil 29,a və b-də dayanıqlıq sərhəddində olan neytral obyektlər üçün köklərin paylanma sxemi göstərilmişdir.



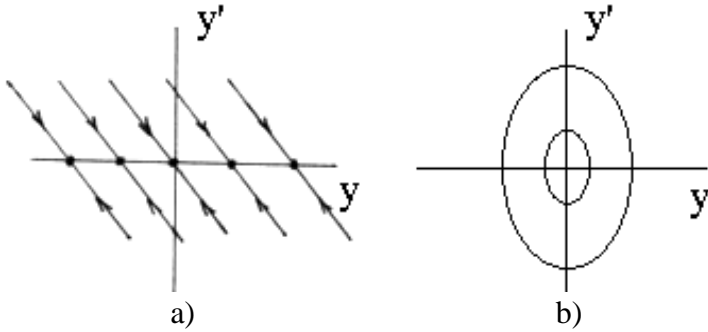
**Şəkil 29.** Neytral sistemlərdə köklərin paylanma sxemi

a) apəriodik dayanıqlıq sərhəddi b) rəqsi dayanıqlıq sərhəddi

Şəkil 30,a və b-də apəriodik (a) və rəqsi (b) dayanıqlıq sərhəddində olan obyektlərin aşağıdakı

$$W = \frac{1}{s(s + 1)}; \quad W = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

ötürmə funksiyaları üçün faza portretləri göstərilmişdir.



**Şəkil 30.** Neytral obyektlərin faza portretləri

Faza traektoriyaları müxtəlif başlanğıc şərtlərdə və sərbəst hərəkət almaq üçün girişin sıfır  $u=0$  qiymətində alınır.

Birinci halda başlanğıc vəziyyətdən asılı olaraq trayektoriyalar aperiodik olaraq (törəməsinin işarəsi dəyişmədən) absis oxunda yerləşən tarazlıq nöqtələrinə yaxınlaşır (şəkil 30,a), ikinci halda isə sönməyən rəqslər edir (şəkil 30,b).

### 11.1. MATLABda realizasiya

Obyektin və ya ATS-in dayanıqlığını köklər üsulu ilə təyin etmək üçün onun xarakteristik  $D(s)=0$  tənliyinin köklərini tapıb həqiqi hissələrin sıfırdan kiçik olması, yəni  $\text{Re}(s_i) < 0$  şərtini yoxlamaq lazımdır.

$W(s)$  ötürmə funksiyası verilərsə  $D(s) = 0$  xarakteristik tənliyinin köklərini (ötürmə funksiyasının qütübləri) tapmaq üçün **pole(W)** funksiyasından istifadə olunur. Əgər xarakteristik tənlik məlum olarsa onda polinomun köklərini tapmaq üçün istifadə olunan **roots(P)** funksiyasından istifadə etmək olar.

Qütüblərin və sıfırların  $s$  - köklər müstəvisində yerləşmə sxemini, yəni sağ və ya sol kök olduğunu əyani şəkildə görmək üçün **pzmap(W)** funksiyasından istifadə olunur. Dayanıqlıq yalnız qütüblərlə təyin olunduğundan bizi yalnız qütüblərin

yerləşməsi maraqlandırır. Obyektin tənliyi vəziyyət modeli  $dx/dt = Ax + Bu$  şəkildə verilərsə, A matrisinin məxsusi ədədlərini ( $D(s)=0$  xarakteristik tənliyinin kökləri) təyin etmək kifayətdir. Bu məqsədlə  **eig(A)** funksiyasından istifadə olunur.

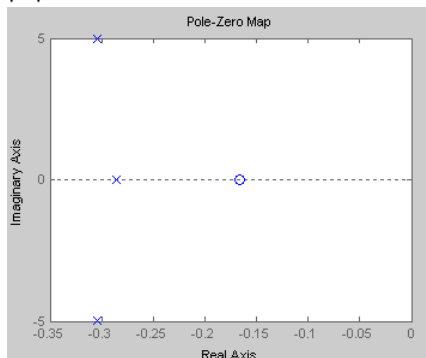
**Misal 16.** Obyektin ötürmə funksiyası verilmişdir:

$$W(s) = \frac{300s + 50}{7.05s^3 + 6.3s^2 + 176s + 50}$$

Köklər üsulu ilə dayanıqlığı təyin edək.

Şəkil 31-də  $D(s) = 7.05s^3 + 6.3s^2 + 176s + 50 = 0$  xarakteristik tənliyinin köklərinin tapılması  **pole(W)**, köklərin paylanma sxemi isə  **pzmap(W)** funksiyasının köməyi ilə qurulma proqramı göstərilmişdir.

```
>> % MATLAB proqrami
>> % Kokler usulu
>> s=tf('s');
>> W=(300*s+50)/(7.05*s^3+6.3*s^2+176*s+50);
>> s=pole(W)
    -0.3038 + 4.9698i
s = -0.3038 - 4.9698i
    -0.2861
>> pzmap(W)
```



**Şəkil 31.** Dayanıqlığın xarakteristik tənliyin köklərinə əsasən təyini

Göründüyü kimi,  $D(s) = 0$  xarakteristik tənliyinin hər üç kökünün həqiqi hissəsi  $\text{Re}(s_i) < 0$  şərtini ödədiyindən obyekt dayanıqlıdır. Sxemdə qütüblər  $\mathbf{x}$ , sıfırlar isə  $\circ$  işarəsi ilə qeyd olunmuşdur. Sıfırın sol və ya sağ kök olmasının dayanıqlığa təsiri yoxdur.

**Misal 17.** Aşağıdakı vəziyyət modeli ilə verilmiş obyektin dayanıqlığını köklər üsulu ilə yoxlayaq:

$$dx_1/dt = x_1 - x_2,$$

$$dx_2/dt = -4x_1 + x_2 + 3u.$$

Burada  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Xarakteristik tənliyin köklərini tapaq. (28) ifadəsinə əsasən bu tənlik:

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= \det \left[ \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ 4 & s-1 \end{pmatrix} = \\ &= s^2 - 2s - 3 = 0. \end{aligned}$$

Bu halda köklər  $s_1 = 3$ ,  $s_2 = -1$ .  $\text{Re}(s_1) = 3 > 0$  olduğundan  $s_1$  kökü sağ kökdür. Bu səbəbdən baxılan obyekt dayanıqsızdır.

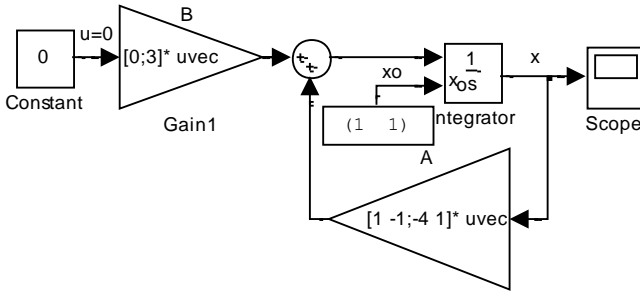
Aşağıda A matrisinin məxsusi ədədlərinin təyin olunmasının Matlab proqramı göstərilmişdir.

```
>> % MATLAB proqramı
>> % Matrisin məxsusi ədədl. təyini
>> A=[1 -1;-4 1];
>> s=eig(A)

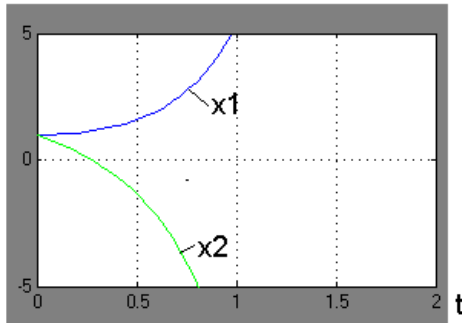
s =
    3.0000
   -1.0000
```

Göründüyü kimi, alınmış qiymətlər xarakteristik tənliyin kökləri ilə eynidir.

Şəkil 32-də  $x_0 = (1,1)^T$  başlanğıc şərtində həllin Simulink sxemi (a) və  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  qrafikləri (b) göstərilmişdir.



a)



b)

**Şəkil 32.** Həllin Simulink sxemi

Zaman artdıqca hər iki həllin sonsuzluğa yaxınlaşması obyektin doğrudan da dayanıqsız olmasını göstərir.

**Neytral obyektlər.** Şəkil 33-də müxtəlif başlanğıc vəziyyətlərdə və sərbəst hərəkət almaq üçün sıfır  $u=0$  girişində neytral obyektlərdə  $y(t)$  keçid proseslərini almaq üçün Simulink sxemi (a) və uyğun keçid prosesləri göstərilmişdir: b) aperiodik dayanıqlıq sərhəddində olan, c) rəqsi dayanıqlıq sərhəddində olan obyektlər üçün.

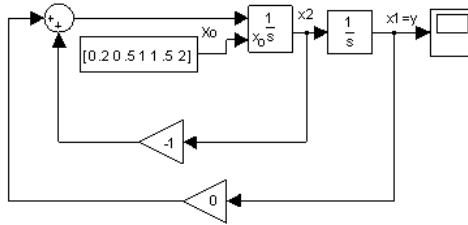
Modelləşdirmə zamanı aperiodik dayanıq sərhəddində olan obyekt kimi

$$W(s) = \frac{K}{s(T+1)}, \quad s_1 = 0, s_2 = -1/T.$$

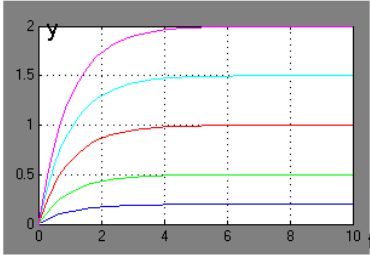
rəqsi dayanıqlıq sərhəddində olan obyekt kimi isə

$$W(s) = \frac{K}{(T_1 s^2 + 1)}, \quad s_{1,2} = \pm \sqrt{1}/T_1,$$

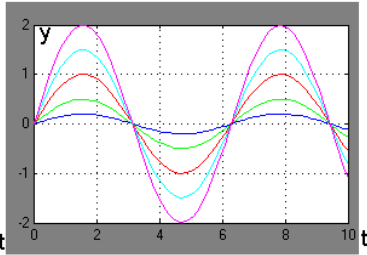
ötürmə funksiyaları qəbul olunmuşdur,  $k = 1, T = 1 \text{ s}, T_1 = 1 \text{ s}$ .



a)



b)



c)

**Şəkil 33.** Neytral obyektlərdə keçid prosesləri

Başlanğıc şərtləri daxil edə bilmək üçün uyğun vəziyyət modelindən istifadə olunmuşdur.

**Sadə Matlab funksiyası.** Matlabda dayanıqlığın təyin olunmasının ən sadə üsulu *isstable* (sys) funksiyasından istifadə etməkdir. Burada **sys** (sistem) ötürmə funksiyası  $sys = W(s)$  və ya vəziyyət modeli  $sys = ss(A, B, C, D)$  şəklində verulə bilər: 1 (dayanıqlı); 0 (dayanıqsız və ya dayanıqlıq sərhəddi (neytral obyektlər)).



**Misal 18.** Ötürmə funksiyası

$$W(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 1}$$

olan obyektin dayanıqlığını yoxlayaq.

Aşağıda müvafiq Matlab proqramı və nəticə göstərilmişdir.

```
>> % Matlab proqramı
>> s=tf('s'); % Oturma funks. daxil edilmesi
>> W=(s^2+2*s+3)/(s^4+2*s^3+3*s^2+4*s+1)
```

```
Transfer function:
```

$$s^2 + 2 s + 3$$

```
-----
s^4 + 2 s^3 + 3 s^2 + 4 s + 1
```

```
>> isstable(W)
```

```
ans = 1
```

Nəticədən görüldüyü kimi baxılan obyekt dayanıqlıdır.  
İndi də vəziyyət modeli ilə verilmiş obyektə baxaq:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 0.5x_2.$$

Burada  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix}$ ,  $B = 0, C = 0, D = 0$ .

Aşağıda müvafiq Matlab proqramı və nəticə göstərilmişdir.

```

>> % Matlab programi, vезiyet modeli
>> A=[0 1;-1 0.5];B=[];C=[];D=[]; % Matrislerin daxil edilm.
>> sys=ss(A,B,C,D)
           x1    x2
a = x1    0    1
     x2   -1   0.5

b = Empty matrix: 2-by-0
c = Empty matrix: 0-by-2
d = []
Continuous-time model.
>> isstable(sys)

ans = 0

```

Baxılan obyekt dayanıqsızdır. Buna səbəb  $D(s) = s^2 - 0.5s + 1$  xarakteristik tənliyində mənfəi əmsalın olmasıdır. Məlum olduğu kimi, bu dayanıqlığın zəruri şərtinin pozulması deməkdir.

Rəqsi dayanıqlıq sərhəddində olan  $W(s) = 1/(s^2 + 1)$  obyektə baxaq.

Aşağıda müvafiq Matlab programı və nəticə göstərilmişdir.

```

>> s=tf('s');
>> W=1/(s^2+1);
>> isstable(W)

ans = 0

```

$D(s) = s^2 + 0 \cdot s + 1 = 0$  xarakteristik tənliyində əmsalın biri sıfır olduğundan neytral obyekt də dayanıqsız obyekt kimi təqdim olunur.

## Bölmə 2

### DAYANIQLIQ KRİTERİLƏRİ

#### 2.1. Cəbri dayanıqlıq kriteriləri

Avtomatik idarəetmədə dayanıqlığı təyin etmək üçün dayanıqlıq kriterilərindən (meyar) də geniş istifadə olunur. Aşağıdakı kriterilərlə tanış olacağıq:

1. Cəbri dayanıqlıq kriteriləri;
2. Tezlik dayanıqlıq kriteriləri.

Birinci halda dayanıqlığı təyin etmək üçün obyektin xarakteristik tənliyin *əmsallarından*, ikinci halda isə *tezlik xarakteristikalarından* istifadə olunur.

#### § 1. Hurvis dayanıqlıq kriterisi

Bu kriteri 1895-ci ildə alman riyaziyyatçısı A.Hurvis tərəfindən təklif olunmuşdur.



**Adolf Hurvis (1859-1919)**

Burada köklər üsulundan fərqli olaraq xarakteristik tənliyi həll edib onun köklərini tapmaq lazım gəlmir. Dayanıqlıq yalnız xarakteristik tənliyin  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  əmsalları arasındakı müəyyən münasibətlərin yoxlanılmasına əsaslanır.

Kriteridən istifadə etmək üçün obyektin (və ya ATS-in) xarakteristik polinomu məlum olmalıdır:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n. \quad (1)$$

Fərz olunur ki, dayanıqlığın zəruri  $a_i > 0$  şərti ödənilir. Dayanıqlığı təyin etmək üçün bu polinomun əmsallarından xüsusi matris tərtib olunur:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}. \quad (2)$$

**Matrisin tərtib olunma qaydası.** Matrisin baş diaqonalı üzrə soldan sağa doğru  $a_1$ -dən  $a_n$ -ə qədər bütün əmsallar yazılır. Hər bir diaqonal elementdən yuxarı qalxdıqca əmsalların indeksləri artır, aşağı düşdükcə isə azalır.  $n$ -dən böyük və sıfırdan kiçik indeksli əmsalların yerinə sıfırlar yazılır.

**Tərif. Obyektin dayanıqlı olması üçün  $a_i > 0$  halında  $H$  matrisi müsbət müəyyən matris olmalıdır:  $H > 0$ .**

$H$  matrisinin müsbət müəyyən olması (1) xarakteristik tənliyi üçün əvvəldə göstərilmiş  $\text{Re}(s_i) < 0$  dayanıqlıq şərtini təmin edir.

Matrisin müsbət müəyyənliyini təyin etmək üçün ən əlverişli üsul kimi aşağıdakı üsullardan istifadə etmək olar:

1. *Silvestr kriterisi*- baş minorların  $\Delta_i > 0$  şərtinin ödənməsi;
2. Matrisin  $\lambda_i$  xarakteristik ədədlərinin təyini -  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$  şərtinin ödənməsi.

3. Matris müsbət müəyyən olarsa onun  $\det(s\mathbf{I}-H)=0$  xarakteristik tənliyinin əmsalları sıfırdan fərqli və növbələşən işarəli olmalıdır.

Silvestr kriterisinə əsasən matrisin müsbət müəyyən matris olması üçün onun bütün *diagonal* (baş) *minorlar* ((2)-də qırıq-qırıq xətlə ayrılmışdır) sıfırdan böyük olmalıdır:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = |H| = a_n \Delta_{n-1} > 0. \quad (3)$$

Hurvis kriterisinə əsasən dayanıqlığı təyin etmək üçün (3)-ə əsasən bütün  $\Delta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , minorlarını (determinantlarını) hesablayıb onların  $\Delta_k > 0$  şərtini ödəməsini yoxlamaq kifayətdir.

Əvvəldə qeyd edildiyi kimi, Matlabda determinantı hesablamaq üçün **det**(·) funksiyasından istifadə olunur.

Proqrama H matrisi daxil edilib  $\Delta_i$  matrisləri formalaşdırılaraq onların determinantları hesablanır.

**Xüsusi hallar.** n-in kiçik qiymətlərində determinantları açaraq sadə hesablama düsturları almaq olar:

$$1) n = 1, D = a_0 s + a_1, a_0 > 0, \Delta_1 = a_1 > 0.$$

$$2) n = 2, D = a_0 s^2 + a_1 s + a_2, a_0 > 0, \Delta_1 = a_1 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0 \Rightarrow a_2 > 0.$$

$$3) n = 3, D = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3, i = 1, 2, 3. n = 3, a_i > 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

$$4) n = 4, a_i > 0, a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0. i = 1, \dots, 4.$$

$$5) n = 5, \quad a_i > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \quad (a_1 a_2 - a_0 a_3) \cdot (a_3 a_4 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 > 0. \quad i = 1, \dots, 5.$$

Göründüyü kimi  $n = 1$ ,  $n = 2$  tərtibli obyektlər üçün əmsalların,  $n = 3$  üçüncü tərtib obyektlərin isə dayanıqlı olması üçün əlavə olaraq orta  $a_1$ ,  $a_2$  əmsalların hasilindən kənar  $a_0$ ,  $a_3$  əmsalların hasilinin fərfinin müsbət kəmiyyət olması kifayətdir.

Hesablama baxımından  $H$  matrisinin müsbət müəyyənliyini yoxlamaq üçün onun  $s_i$  məxsusi qiymətlərini təyin etməyə imkan verən **eig**([H]) funksiyasından istifadə etmək daha əlverişlidir.

Əgər  $\text{Re}(s_i) > 0$  şərti ödənilərsə matris müsbət müəyyən və uyğun obyekt dayanıqlı olacaqdır.

**Dayanıqlı sərhəddi (Neytral sistemlər).** Hurvis kriterisinin köməyi ilə dayanıqlıq sərhəddinin xarakterini təyin etmək mümkündür.  $H$  matrisinin sonuncu sütunu təkcə  $a_n$  elementindən ibarət olduğundan  $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$  yazmaq olar. Əgər  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ , ...,  $\Delta_{n-1} > 0$  minorları sıfırdan böyük və  $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} = 0$  olarsa obyekt **dayanıqlıq sərhəddindədir**. Bu bərabərlik iki halda mümkündür:

a) **Aperiodik dayanıqlıq sərhəddi**,  $a_n = 0$ . Bu halda (1) xarakteristik tənliyinin bir  $s_j = 0$  sıfır bərabər kökü olur. Digər köklərin həqiqi hissələri  $\text{Re}(s_i) < 0$ ,  $i \neq j$  dayanıqlıq şərtini ödəyir.

$n=2$  üçün bu halda uyğun gələn xarakteristik tənlik aşağıdakı şəkildə ola bilər:

$$D(s) = s(Ts + 1) = 0, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = -1/T.$$

b) **Rəqsi dayanıqlıq sərhəddi**,  $\Delta_{n-1} = 0$ . Bu halda  $D(s) = 0$  xarakteristik tənliyinin köklərindən bir cütü sıfır xəyali  $s = \pm j\beta$ , digər köklər isə

a) halında olduğu kimi dayanıqlı köklər (sol köklər) olmalıdır. Məsələn,  $n = 3$  üçün:

$$D(s) = (s^2 + 1)(Ts + 1) = Ts^3 + s^2 + Ts + 1 = 0,$$

$$s_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm j, s_3 = -1/T.$$

Obyektin tənliyi vəziyyət modeli

$$dx/dt = Ax + Bu$$

şəklində verilərsə xarakteristik polinom  $D(s) = \det(sI - A)$  kimi təyin olunur.

## 1.1. MATLABda realizasiya

İki hala baxaq:

1.  $\Delta_k$  determinantlarının hesablanması.

a) verilmiş (1) xarakteristik  $D(s)$  polinomuna əsasən  $H$  matrisi tərtib olunur və daxil edilir;

b)  $H_i = H(1:i, 1:j)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  - diaqonal minorlara uyğun gələn matrislər formalaşdırılır;

c)  $D_i = \det(H_i)$  - diaqonal minorlar hesablanır;

d)  $D_i > 0$  şərti yoxlanılıb dayanıqlıq haqqında nəticə çıxarılır.

**Misal 1.** Obyektin xarakteristik polinomu:

$$D(s) = s^4 + 3s^3 + 5.5s + 6s + 2.5, \quad n = 4.$$

Hurvis matrisini tərtib edirik:

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5.5 & 2.5 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5.5 & 2.5 \end{bmatrix}.$$

Müvafiq Matlab proqramını aşağıda göstərilmişdir.

```

>> % MATLAB proqrami
>> % Hurvis dayanikliq kriterisi
>> % Bas determinantlarin (minorlarin) hesablanmasi
>> H=[3 6 0 0;1 5.5 2.5 0;0 3 6 0;...
0 1 5.5 2.5] % Hurvis matrisi
H =
    3.0000    6.0000         0         0
    1.0000    5.5000    2.5000         0
         0    3.0000    6.0000         0
         0    1.0000    5.5000    2.5000
>> H1=H(1:1,1:1);H2=H(1:2,1:2);H3=H(1:3,1:3);H4=H(1:4,1:4); % Bas
>> D1=det(H1);D2=det(H2);D3=det(H3);D4=det(H4);% Bas determinantl
>> D=[D1,D2,D3,D4]
D = 3.0000  10.5000  40.5000  101.2500

```

Bütün diaqonal determinantları  $D_i \equiv \Delta_k > 0$  olduğundan  $H$  müsbət müəyyən matrisdir. Deməli, baxılan obyekt dayanıqlıdır.

2. **H matrisinin məxsusi  $\lambda_i$  xarakteristik ədədlərinin hesablanması.** Yuxarıda deyilən kimi, bu əməliyyat **eig(H)** funksiyasının köməyi ilə yerinə yetirilir.

Aşağıda müvafiq Matlab proqramı göstərilmişdir.

```

>> % MATLAB proqrami
>> % Hurvis dayanikliq kriterisi
>> % Məxsusi qiymetlerin hesablanmasi
>> H=[3 6 0 0;1 5.5 2.5 0;0 3 6 0;...
0 1 5.5 2.5] % Hurvis matrisi
H =
    3.0000    6.0000         0         0
    1.0000    5.5000    2.5000         0
         0    3.0000    6.0000         0
         0    1.0000    5.5000    2.5000

```



```
>> λ = eig(H)
      2.5000
λ =  9.0000
      1.0000
      4.5000
```

H matrisinin  $\lambda_i$  məxsusi ədədləri  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$  şərtini ödədiyindən bu matris müsbət müəyyən matrisdir. Bu səbəbdən baxılan obyekt dayanıqlıdır.

Göründüyü kimi bu üsul determinantların hesablanmasından daha sadədir.

## § 2. Raus dayanıqlıq kriterisi

Bu cəbri dayanıqlıq kriterisi 1877-ci ildə ingilis riyaziyyatçısı E.Raus tərəfindən müəyyən qayda (alqoritm) şəklində təklif edilmişdir.



**Edvard Dion Paus (1831-1870)**

Bu kriteridən istifadə etmək üçün Hurvis kriterisində olduğu kimi sistemin və ya obyektin xarakteristik polinomu məlum olmalıdır:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n. \quad (4)$$

Bu tənliyin əmsallarından xüsusi cədvəl (Raus cədvəli) tərtib olunur.

**Cədvəlin tərtib olunma qaydası.** Cədvəlin (matrisin) elementlərini ( $c_{ij}$ ) ilə işarə edək,  $i$  - sətirin,  $j$  - isə sütunun nömrəsidir.

1. Cədvəlin birinci sətrinə ( $i = 1$ )  $c_{11} = a_0$  əmsalından başlayaraq cüt indeksli  $c_{12} = a_2$ ,  $c_{13} = a_4$ , ... əmsalları yazılır.

2. Cədvəlin ikinci sətrinə ( $i = 2$ )  $c_{21} = a_1$ ,  $c_{22} = a_3$ ,  $c_{23} = a_5$ , ... tək əmsallı indekslər yazılır.

3. Sonrakı sətrlərin elementləri aşağıdakı rekurent ifadənin əsasında hesablanır:

$$c_{ij} = c_{i-2,j+1} - r_i c_{i-1,j+1}, \quad i = 3, 4, \dots, n+1, j = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Burada 
$$r_i = \frac{c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}}.$$

Məsələn,  $i = 3$ ,  $j = 1$  olarsa  $c_{31} = (a_1 a_2 - a_0 a_3) / a_1$ .

Cədvəli doldurduqdan sonra obyektin dayanıqlığı haqqında mühakimə yürütmək olar.

**Tərif.  $D(s)$  xarakteristik polinomunun sağ köklərinin sayı Raus cədvəlinin birinci sütunundakı elementlərin işarəsinin dəyişmələrinin sayına bərabərdir.**

Deməli obyektin dayanıqlı olması üçün Raus cədvəlinin birinci sütunundakı elementlərin işarəsi eyni olmalıdır:  $a_0 > 0$  olarsa,  $c_{11} > 0$ ,  $c_{21} > 0$ ,  $c_{31} > 0$ , ...,  $c_{n+1,1} > 0$  olmalıdır.

Raus cədvəli aşağıda göstərilmişdir.

## Raus cədvəli

$r_i$	Sətir, $i$	Sütun, $j$			
		1	2	3	4
-	1	$c_{11} = a_0$	$c_{12} = a_2$	$c_{13} = a_4$	...
-	2	$c_{21} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{23} = a_5$	...
$r_3 =$ $c_{11}/c_{21}$	3	$c_{31} = c_{12} - r_3 c_{22}$	$c_{32} = c_{13} - r_3 c_{23}$	$c_{33} = c_{14} -$ $r_3 c_{24}$	...
$r_4 =$ $c_{21}/c_{31}$	4	$c_{41} = c_{22} - r_4 c_{32}$	$c_{42} = c_{23} - r_4 c_{33}$	$c_{43} = c_{24} -$ $r_4 c_{34}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Aşağıdakı hallar da mümkündür.

1. Əgər birinci sütunun sıfır bərabər elementi meydana çıxarsa hesablamaları davam etdirmək mümkün olmur. Bu halda sıfır elementini kiçik  $\varepsilon$  kəmiyyəti ilə əvəz edib hesablamalar yekunlaşdıqdan sonra onu sıfıra yaxınlaşdırıb limitə keçmək lazımdır. Bu vaxt bəzi elementlər  $\pm\infty$  ola bilər.

2. Birinci sütunda sıfır elementinin meydana çıxması obyektin dayanıqsız və ya dayanıqlıq sərhəddində olmasını göstərir.

3. Yalnız sıfırlardan ibarət sətir meydana çıxarsa obyekt rəqsi dayanıqlıq sərhəddinə uyğun olub ordinat oxunda yerləşən sıfır xəyali köklərə malik olur:  $s = \pm j\beta$ .

### 2.1. MATLABda realizasiya

Matlab proqramını tərtib edərkən Raus cədvəlindən doldurulma qaydasından əə (4.27) ifadəsindən istifadə olunmuşdur. Xarakteristik tənliyin çüt və tək əmsallarını daxil etdikdə əmsalları sıfıra qədər tamamlamaq lazımdır.  $n$  – çüt olduqda sütunların sayı  $n$  tək olduqda isə  $n - 1$  olur. İndeks  $i = 3:n+1$ ,  $j = n$  və ya  $j = n - 1$ .

**Misal 2.** Obyektin xarakteristik polinomu,  $n = 4$ :

$$D(s) = s^4 + 3s^3 + 5.5s^2 + 6s + 2.5$$

Bu halda cüt əmsallar:  $a_0 = 1$ ,  $a_2 = 5.5$ ,  $a_4 = 2.5$ ,  $a_6 = 0$ .

Tək əmsallar:  $a_1 = 3$ ,  $a_3 = 6$ ,  $a_5 = 0$ ,  $a_7 = 0$ .

Raus cədvəlinin hesablanması Matlab proqramı aşağıda göstərilmişdir.

```
>> % MATLAB proqramı
>> % RAUS kriterisi
>> c(1,1)=1;c(1,2)=5.5;c(1,3)=2.5;c(1,4)=0; % Cüt indeksli əmsallar
>> c(2,1)=3;c(2,2)=6;c(2,3)=0;c(2,4)=0; % Tək indeksli əmsallar
>> for i=3:5
for j=1:3
r(i)=c(i-2,1)/c(i-1,1);
c(i,j)=c(i-2,j+1)-r(i)*c(i-1,j+1);
end;
end
>> c(i,j)=c(i-2,j+1)-r(i)*c(i-1,j+1)

    1.0000    5.5000    2.5000         0
    3.0000    6.0000         0         0
c =  3.5000    2.5000         0         0
     3.8571         0         0         0
     2.5000         0         0         0
```

Göründüyü kimi, cədvəl 1-ci sütununun bütün elementləri  $c_{ij} > 0$  olduğundan baxılan obyekt dayanıqlıdır.

**Misal 3.** Obyektin xarakteristik polinomu,  $n = 5$ :

$$D(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63.$$

Cüt əmsallar:  $a_0 = 1$ ,  $a_2 = 4$ ,  $a_4 = 3$ ,  $a_6 = 0$ .

Tək əmsallar:  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = 24$ ,  $a_5 = 63$ ,  $a_7 = 0$ .

Matlab proqramının skripti aşağıda göstərilmişdir.

```
>> % MATLAB proqramı
>> % RAUS kriterisi
>> c(1,1)=1;c(1,2)=4;c(1,3)=3;c(1,4)=0; % Cüt indeksli əmsallar
>> c(2,1)=1;c(2,2)=24;c(2,3)=63;c(2,4)=0; % Tək indeksli əmsallar
>> n=5;
```

```

>> for i=3:n+1
for j=1:3
r(i)=c(i-2,1)/c(i-1,1);
c(i,j)=c(i-2,j+1)-r(i)*c(i-1,j+1);
end
end
Warning: Divide by zero.
Warning: Divide by zero.
Warning: Divide by zero.
>> c(i,j)=c(i-2,j+1)-r(i)*c(i-1,j+1)

      1      4      3      0
      1     24     63      0
c = -20    -60      0      0
      21     63      0      0
      0      0      0      0
      NaN    NaN    NaN      0

```

Cədvəlin 1-ci sütunun elementləri işarəsini iki dəfə dəyişdiyindən (+1, -20, +21 - iki dəfə) **iki kök sağ yarımmüstəvidə yerləşir**. Deməli, obyekt dayanıqsızdır. Altıncı sətərdə NaN = 0/0 qeyri müəyyənlik alınmışdır. Bu sətiri nəzərdən atmaq lazımdır. NaN - ədəd olmayan kəmiyyət deməkdir.

Sətirlərin sayını azaldıb  $i = 3:n$  qəbul etsəydik NaN kəmiyyətindən yaxa qurtara bilərdik (yoxlayın).

Alınmış nəticəyə əmin olmaq üçün köklər üsulundan istifadə edək. Kökləri təyin etmək üçün **roots([1 1 4 24 3 63])** funksiyasından istifadə edək. Aşağıda uyğun Matlab proqramı göstərilmişdir.

```

>> % Xar. tenliyin koklerinin teyini
>> s=roots([1 1 4 24 3 63])
      -3.0000
      1.0000 + 2.4495i
s =    1.0000 - 2.4495i
      0.0000 + 1.7321i
      0.0000 - 1.7321i

```

Göründüyü kimi bir sol kök:  $s_1 = -3$ , iki sağ kök:  $s_{2,3} = 1 \pm \sqrt{6}$  və ordinat oxunda yerləşən iki sıfır xəyali kök  $s_{4,5} = \pm j\sqrt{3}$  mövcuddur.

## 2.2. Tezlik dayanıqlıq kriteriləri

Tezlik dayanıqlıq kriteriləri avtomatik tənzimləmə sistemlərinin və obyektlərinin dayanıqlığını onların tezlik xarakteristikaları əsasında təyin etməyə imkan verir.

Tezlik xarakteristikaları qrofoanalitik olub tezlik xarakteristikalarının qurulmasına əsaslanır. Bu səbəbdən sadə həndəsi təsvirə və əyaniliyə malik olduğundan geniş tətbiq tapmışlar.

Tezlik kriteriləri kompleks dəyişənlər nəzəriyyəsiindən məlum olan *arqument prinsipinə* əsaslanır.

### § 1. Arqument prinsipi

Fərz edək ki, obyektin xarakteristik polinomu aşağıdakı şəkildə verilmişdir:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n. \quad (6)$$

Əgər köklər məlum olarsa *Bezu teoreminə* əsasən bu ifadəni xətti buruqların hasilinə şəkildə yazmaq olar:

$$D(s) = a_0 (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n).$$

$s_i = \alpha_i \pm j\omega_i$   $D(s) = 0$  tənliyinin kökləridir. Həqiqi köklər üçün  $\omega_i=0$ , sırf xəyali köklər üçün  $\alpha_i = 0$ .

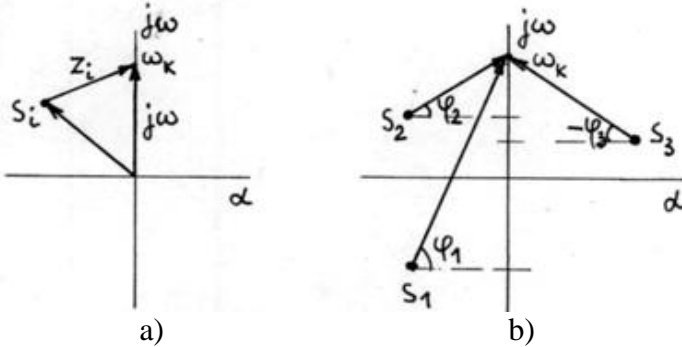
Tezlik oblastına keçmək üçün  $s = j\omega$  əvəzləməsini edək,  $\omega$ , rad/s - tezlikdir. Onda

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - s_1) (j\omega - s_2) \dots (j\omega - s_n).$$

$z_i = j\omega - s_i$  işarə etsək yazmaq olar:

$$D(j\omega) = a_0 z_1 z_2 \dots z_n. \quad (7)$$

Şəkil 1-də  $z_i$  fərq vektoru (a) və üç kökə uyğun olan  $z_1, z_2, z_3$  fərq vektorları (b) göstərilmişdir.

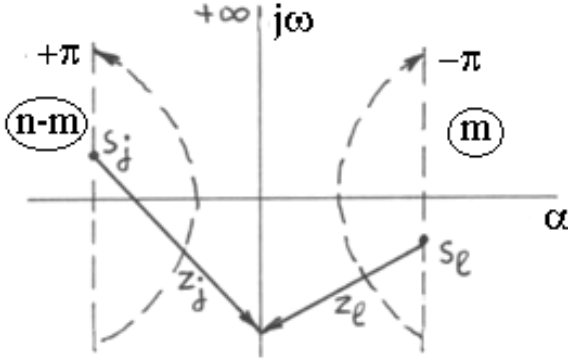


**Şəkil 1.** Köklər müstəvisində  $z_i$  fərq vektorlarının vəziyyəti

Fərz edək ki, (6) xarakteristik tənliyinin sağ yarımmüstəvidə (sağ köklər) **m sayda** və deməli sol yarımmüstəvidə (sol köklər) **n – m sayda** kökləri mövcuddur.  $D(j\omega)$  kompleks kəmiyyətinin  $\omega_k$  nöqtəsində arqumentini (bucaq  $\varphi$ ) tapaq. Kompleks kəmiyyətlərin (7) **hasilin arqumentini vuruqların arqumentlərinin** ( $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ) **cəminə bərabər olduğundan** yazmaq olar:

$$\arg D(j\omega_k) = \sum_{i=1}^n \arg z_i(\omega_k) = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n. \quad (8)$$

İndi fərz edək ki,  $\omega_k$  tezliyi  $-\infty < \omega < +\infty$  intervalında dəyişir. Bu halda  $n - m$  sayda  $z_j$  sol vektorların ucu ordinat oxu üzrə  $-\infty$  - dan  $+\infty$ -a qədər hərəkət edərək saat əqrəbinin əksinə,  $m$  sayda  $z_\ell$  sağ vektorları isə saat əqrəbi istiqamətində fırlanaraq  $\pi$  rad bucaq cızacaqlar (şəkil 2).



**Şəkil 2.** Arqument prinsipinin həndəsi izahi

Saat əqrəbinin istiqamətində fırlanmanı şərti olaraq  $+\pi$ , əksinə fırlanmanı isə  $(-\pi)$  qəbul etsək, yekunda yazmaq olar:

$$\arg D(j\omega) = (n - m)\pi + m(-\pi) = (n - 2m)\pi. \quad (9)$$

$-\infty < \omega < +\infty$

*Düstur (9) arqument prinsipinin riyazi ifadəsidir.*

Fiziki intervalda  $\omega$  tezliyi  $0 \leq \omega < +\infty$  intervalında dəyişdiyini və  $D(j\omega)$  xarakteristikasının simmetrik olduğunu nəzərə alsaq nahayət yazmaq olar:

$$\arg D(j\omega) = (n - 2m) \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

$0 \leq \omega < +\infty$



## § 2. Mixaylov dayanıqlıq kriterisi

Bu kriterii 1938-ci ildə rus alimi A.V.Mixaylov tərəfindən təklif edilmiş və mahiyyət etibarlı ilə argument prinsipinin həndəsi interpretasiyasından ibarətdir.

Bu kriteridən istifadə etmək üçün obyektin və ya ATS-in xarakteristik polinomu məlum olmalıdır:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n. \quad (11)$$

Köklər üsulundan (§4.4) məlum olduğu kimi, obyektin dayanıqlı olması üçün  $D(s) = 0$  xarakteristik tənliyinin bütün kökləri *sol köklər olmalıdır*. Yəni sağ köklərin sayı  $m = 0$  olmalıdır. Bu şərti argument prinsipinin (10) ifadəsində nəzərə alsaq yazmaq olar:

$$\arg D(j\omega) = n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \omega < +\infty \quad (12)$$

Bu ifadə Mixaylov kriterisinin riyazi yazılışdır. Bu ifadənin həndəsi yozumu Mixaylov kriterisini formalaşdırmağa imkan verir:

**Tərif. Obyektin dayanıqlı olması üçün tezlik  $0 \leq \omega < +\infty$  intervalında dəyişdikdə  $D(j\omega)$  vektoru koordinat başlanğıcının ətrafında saat əqrəbinin əksinə fırlanaraq ardıcıl olaraq n sayda kvadrant (rüb) keçməli və sonuncu kvadrantda sonsuzluğa getməlidir.**

Bir kvadrant  $\pi/2$  və ya  $90^\circ$ ,  $n$  - obyektin tərtibidir. Kriteridən istifadə etmək üçün  $D(j\omega)$  vektorunun ucunun cızdığı əyrini qurub onun yuxarıdakı tərfi ödəyib-ödəməməsini yoxlamaq lazımdır. Bu əyri **Mixaylov qodoqrafı adlanır**.

Qodoqrafın tənliyini almaq üçün  $D(s)$ -in (11) ifadəsində  $s = j\omega$  əvəzləməsi edib onu həqiqi və xəyalı hissələrə parçalamaq lazımdır. Onda:

$$D(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = X(\omega) + jY(\omega). \quad (13)$$

Burada həqiqi hissə:

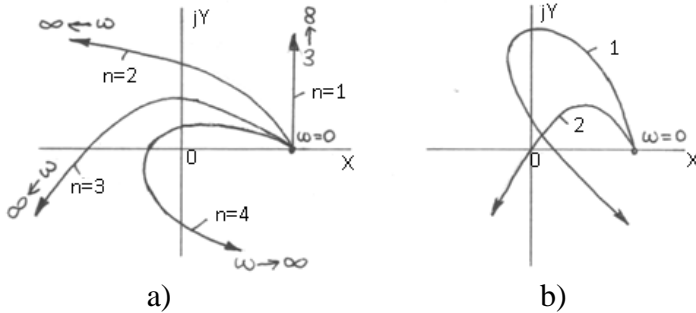
$$X(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots \quad (14)$$

Xəyali hissə:

$$Y(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots \quad (15)$$

$D(j\omega)$  qodoqrafını qurmaq üçün (14) və (15) ifadələrində  $\omega$  tezliyinə 0-dan başlayaraq qiymətlər verərək  $X(\omega)$  və  $Y(\omega)$  kəmiyyətlərini hesablamaq lazımdır.

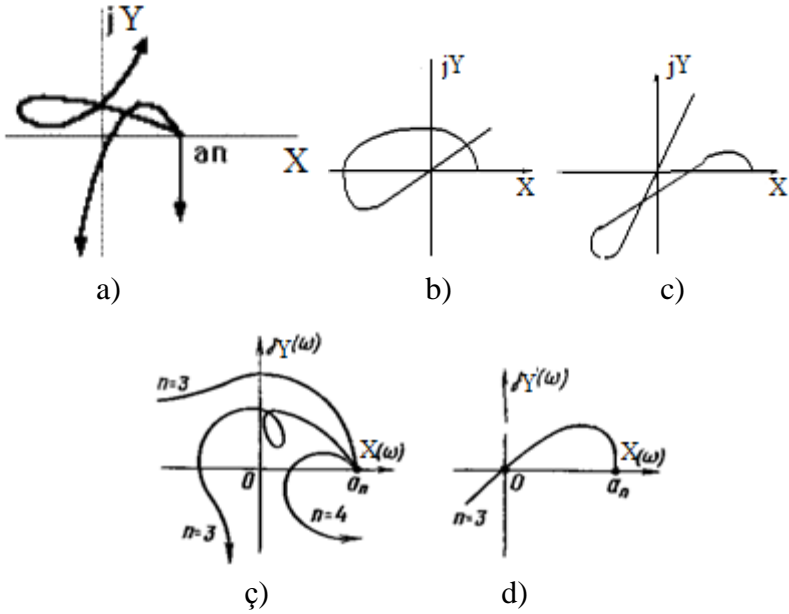
Şəkil 3,a-da  $n$ -in müxtəlif qiymətləri üçün dayanıqlı obyektin Mixaylov qodoqrafları göstərilmişdir.



**Şəkil 3.** Dayanıqlı (a), dayanıqsız (b) 1 və dayanıqlı sərhəddində (b) 2 olan obyektlərin Mixaylov qodoqrafları

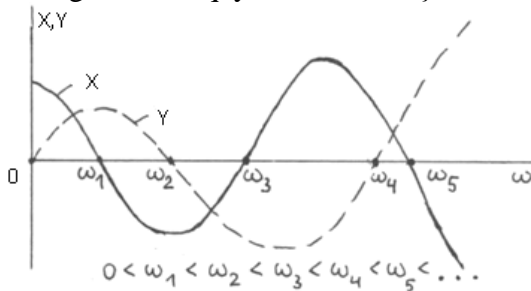
Şəkil 3, b-də rüblərin aşma ardıcılığı pozulduğundan 1 əyrisinə uyğun gələn obyekt dayanıqsız, 2 əyrisi isə koordinat başlanğıcından keçdiyindən müvafiq obyekt dayanıqlı sərhəddindədir.

Şəkil 4,a-d-də mümkün olan Mixaylov qodoqrafları göstərilmişdir.



**Şəkil 4.** Mümkün olan Mixaylov qodoqrafları

Əgər ardıcılıq ödənilərsə, onda  $X(\omega)$  və  $Y(\omega)$  funksiyalarının qrafiki şəkil 5-də göstərilən qaydada növbələşməlidirlər.



**Şəkil 5.** Dayanıqlı obyektin  $X(\omega)$  və  $Y(\omega)$  funksiyaları

Dayanıqlığı şəkildə göstərilən növbələşməni yoxlamaq yolu ilə də təyin etmək olar.

**Misal 3.** Qapalı ATS-in ötürmə funksiyası aşağıdakı şəkildə verilmişdir:

$$W(s) = \frac{k}{s(Ts+1)+k}, \quad T = 2s, \quad k = 10.$$

Xarakteristik polinom:

$$D(s) = Ts^2 + s + k.$$

Bu ifadədə  $s = j\omega$  əvəzləməsi edib qruplaşdırma aparsaq alarıq:

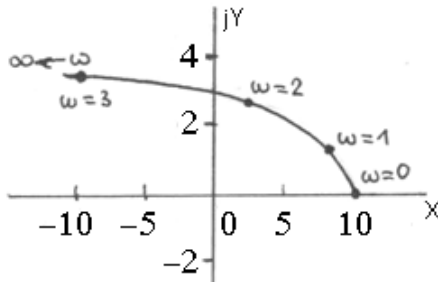
$$X(\omega) = -T\omega^2 = k, \quad Y(\omega) = \omega.$$

Hesablamların nəticələri cədvəl 4.1-də göstərilmişdir.

Cədvəl 1 **Hesablamların nəticələri**

$\omega$	0	1	2	3	6	10	20	50
X	10	8	2	-8	-62	-190	-790	-4900
Y	0	1	2	3	6	10	20	50

Şəkil 6-da cədvələ əsasən qurulmuş Mixaylov qodoqrafı göstərilmişdir.



**Şəkil 6.** Mixaylov qodoqrafı

$n = 2$  olduğundan (12) ifadəsinə əsasən  $\arg D(j\omega) = \pi \text{rad} = 180^\circ$ . Qodoqraf ardıcıl olaraq iki kvadrant keçdiyindən və sonuncu kvadrantda sonsuzluğa getdiyindən baxılan ATS dayanıqlıdır.

## 2.1. MATLABDA realizasiya

Bu əməliyyat hesablamaların və Mixaylov qodoqrafının qurulmasının avtomatlaşdırılmasından ibarətdir. Üsul qrafoanalitik olduğundan obyektin dayanıqlı olub-olmaması haqqında nəticə tədqiqatçı tərəfindən çıxarılır.

Şəkil 7-də

$$W(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 4s + 1}$$

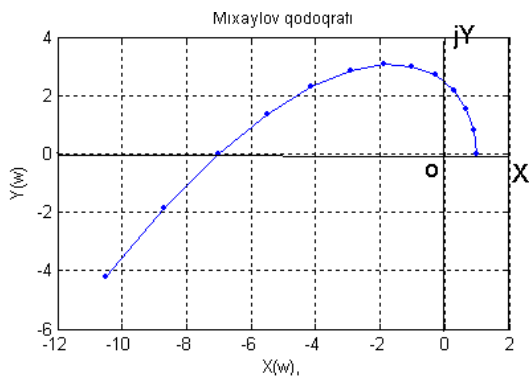
ötürmə funksiyası ilə verilən ATS-in dayanıqlığının tədqiqinin Matlab proqramı və Mixaylov qodoqrafı göstərilmişdir.

```
>> % ATLAB proqramı
% Mixaylov dayanıqlıq kriterisi
w=0:0.2:2.5; % Tezlik intervalı ve addımı
s=j.*w;      % s=jw evezlemesi
D=s.^3+2*s.^2+4*s+1; % D(s)-xarakteristik polin
X=real(D. '); % Heqiqi hisse
Y=imag(D. '); % Xeyali hisse
N=[w', X, Y]   % Cap
```

N =

$\omega$	X	Y
0	1.0000	0
0.2000	0.9200	0.7920
0.4000	0.6800	1.5360
0.6000	0.2800	2.1840
0.8000	-0.2800	2.6880
1.0000	-1.0000	3.0000
1.2000	-1.8800	3.0720
1.4000	-2.9200	2.8560
1.6000	-4.1200	2.3040
1.8000	-5.4800	1.3680
2.0000	-7.0000	-0.0000
2.2000	-8.6800	-1.8480
2.4000	-10.5200	-4.2240

```
>> plot(X,Y,'.-'),grid,title('Mixaylov qodoqrafı')
>> xlabel('X( $\omega$ )'),ylabel('Y( $\omega$ )')
```



**Şəkil 7.** Mixaylov qodoqrafının qurulma proqramı

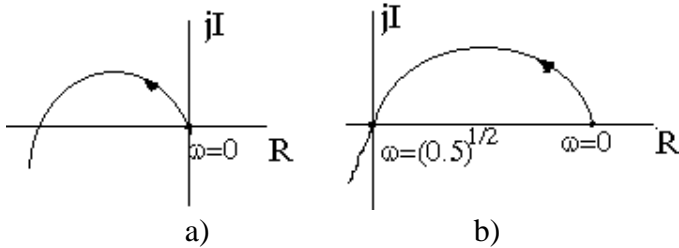
Vacib məsələlərdən biri tezlik intervalının və addımının düzgün seçilməsidir. Mixaylov qodoqrafı  $n = 3$  halında tərifin şərtlərini ödədiyindən baxılan ATS dayanıqlıdır.

Mixaylov kriterisi dayanıqlıq sərhədlərini də təyin etməyə imkan verir.

a) **Aperiodik dayanıqlıq sərhəddi.** Aperiodik dayanıqlıq sərhəddində olan ikinci tərtib obyektə baxaq:

$$W(s) = \frac{1}{s(2s + 1)}.$$

Bu halda xarakteristik polinom  $D(s) = 2s^2 + s$ . Əvəzləmə  $s = j\omega$  etsək alarıq  $D(j\omega) = -2\omega^2 + j\omega \Rightarrow R(\omega) = -2\omega^2, I(\omega) = \omega$ . Tezliyin  $\omega = 0$  qiymətində  $R(0) = I(0) = 0$  olduğundan Mixaylov qodoqrafı şəkil 8,a-da göstərildiyi kimi koordinat başlanğıcından başlayır.



**Şəkil 8.** Dayanıqlıq sərhəddlərinə uyğun gələn Mixaylov qodoqrafları

b) **Rəqsi dayanıqlıq sərhəddi.** Rəqsi dayanıqlıq sərhəddində olan ikinci tərtib obyekt:

$$W(s) = \frac{1}{2s^2 + 1}.$$

Bu halda  $D(j\omega) = -2\omega^2 + 1 \Rightarrow R(\omega) = -2\omega^2 + 1, I(\omega) = 0$ . Tezliyin  $\omega = 0$  qiymətində  $R(0) = 1, I(0) = 0$ . Deməli Mixaylov qodoqrafı absis oxunun üzərindən  $R(0) = 1$  nöqtəsindən başlayır və  $\omega = \sqrt{1/2}$  qiymətində isə şəkil 8,b-də göstərildiyi kimi koordinat başlanğıcından keçir.

### § 3. Naykvist dayanıqlıq kriterisi

Əks əlaqəli elektron gücləndiricilərinin dayanıqlığını təyin etmək məqsədi ilə 1932-ci ildə Amerika alimi H.Naykvist **açıq ATS-in amplitud-faza tezlik xarakteristikasının (AFTX) qurulmasına əsaslanan** yeni tezlik kriterisi təklif etdi.



Harry Nyquist (1889-1976)

Açıq sistemin ötürmə funksiyası əksər hallarda ayrı-ayrı bəndlərin ötürmə funksiyalarının hasilindən ibarət olduğundan hesablamalar asanlaşır.

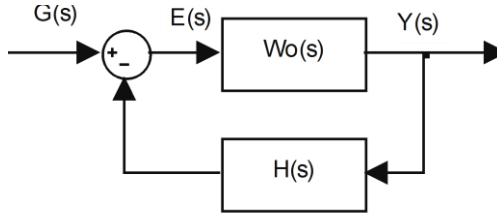
Rus alimi A.V.Mixaylov bu kriterini yenidən əsaslandırılmış, ümumiləşdirmiş və avtomatik tənzimləmədə istifadə oluna bilən şəkllə gətirmişdir.

Naykvist dayanıqlıq kriterisinin digər kriterilərdən fərqi ondan ibarətdir ki, burada **qapalı ATS-in** dayanıqlığı uyğun **açıq ATS-in** AFTX-nin qurulması əsasında təyin edilir. Bu kriteri də digər tezlik kriteriləri kimi qrafoanalitikdir. Yəni müəyyən qrafiklərinin qurulmasına əsaslanır. Naykvist kriterisi sistemin dayanıqlıq



ehtiyatlarını və gecikməyə malik sistemlərin dayanıqlığını da asanlıqla təyin etməyə imkan verir.

Şəkil 9-da dayanıqlığı yoxlanılan birölçülü qapalı ATS-in sxemi göstərilmişdir.



**Şəkil 9.** Qapalı ATS-in sxemi

Qapalı ATS-in dayanıqlığını tədqiq etmək üçün lazım olan açıq ATS-in ötürmə funksiyası  $W_A(s) = W_0(s) H(s)$ . Vahid əks əlaqə halında  $H(s) = 1$  olduğundan  $W_A(s) = W_0(s)$ .

Naykvist kriterisi üç halı əhatə edir:

1. Açıq sistem **dayanıqlıdır**, yəni xarakteristik tənliyin bütün kökləri sol köklərdir;

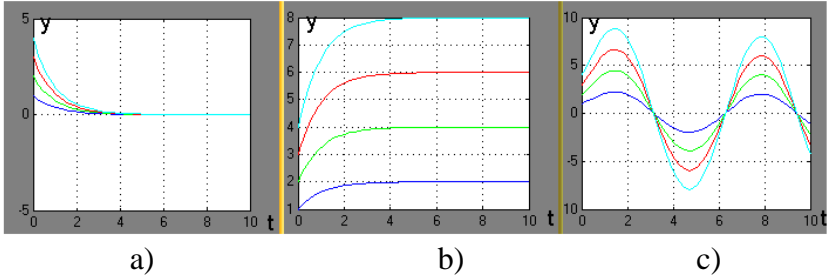
2. Açıq sistem **dayanıqlıqsızdır**, yəni xarakteristik tənliyin kökləri içərisində sağ köklər də mövcuddur;

3. Açıq ATS **dayanıqlıq sərhəddindədir** (neytraldır). Bu halda xarakteristik tənliyin kökləri arasında sıfır (aperiodik dayanıqlıq sərhəddi) və ya sırf xəyali köklər (rəqsi dayanıqlıq sərhəddi) olur. Digər köklər isə sol (dayanıqlı) köklər olmalıdır. Birinci halda sistem (obyekt) **astatik**, ikinci halda isə **konservativ** sistem adlanır.

Şəkil 10-da dayanıqlı (a), aperiodik (b) və rəqsi (c) dayanıqlıq sərhəddində olan neytral obyektlərdə keçid prosesləri göstərilmişdir. Simulinkdə modelləşdirmə aşağıdakı ötürmə funksiyaları əsasında aparılmışdır:

$$W_D(s) = \frac{K}{Ts+1}, \quad W_A(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}, \quad W_R(s) = \frac{K}{(T_1s^2+1)(Ts+1)}.$$

$$K=1, \quad T=1s, \quad T_1=1s.$$



**Şəkil 10.** Dayanıqlı və neytral sistemlərdə keçid prosesləri

Göründüyü kimi, dayanıqlı obyektə fərqli olaraq neytral obyektlərdə müxtəlif təkanlarda (başlangıç şərtlərdə) tarazlıq vəziyyətləri də müxtəlif olur.

Fərz edək ki, açıq (əks əlaqəsiz) ATS-in ötürmə funksiyası məlumdur:

$$W_A(s) = \frac{M_A(s)}{D_A(s)}.$$

Burada  $D_A(s)$  və  $M_A(s)$   $n$  və  $m$  tərtibli polinomlardır,  $n \geq m$ .  $D_A(s)=0$  açıq sistemin **xarakteristik tənliyidir**.

Birölçülü qapalı ATS-in ötürmə funksiyası:

$$W_Q(s) = \frac{W_A(s)}{1+W_A(s)} = \frac{M_A(s)}{D_A(s)+M_A(s)} = \frac{M_A(s)}{D_Q(s)}. \quad (16)$$

Burada  $D_Q(s)$  qapalı sistemin tərtibi  $n$ -ə bərabər olan **xarakteristik polinomudur**.

Açıq sistməi qapalı sistem ilə əlaqələndirmək üçün aşağıdakı köməkçi funksiyadan istifadə edək:

$$\Phi(s) = 1 + W_A(s) = \frac{D_A(s) + M_A(s)}{D_A(s)} = \frac{D_Q(s)}{D_A(s)}. \quad (17)$$

Tezlik oblastına keçmək üçün (17) ifadəsində  $s = j\omega$  əvəzləməsini edək:

$$\Phi(j\omega) = \frac{D_Q(j\omega)}{D_A(j\omega)}. \quad (18)$$

Açıq və qapalı sistemləri əlaqələndirən köməkçi  $\Phi(j\omega)$  funksiyasının  $0 \leq \omega < +\infty$  dəyişdikdə arqumentinin dəyişməsini tapaq. İki kompleks kəmiyyətin **nisbətinin arqumenti** sürət və məxrəcdəki kompleks kəmiyyətlərin arqumentlərinin fərqinə bərabər olduğundan yazmaq olar:

$$\arg \Phi(j\omega) = \arg D_Q(j\omega) - \arg D_A(j\omega). \quad (19)$$

$0 \leq \omega < +\infty$                        $0 \leq \omega < +\infty$                        $0 \leq \omega < +\infty$

Fərz edək ki, qapalı sistemin  $D_Q(s) = 0$  xarakteristik tənliyinin  $\ell$  sayda, açıq sistemin  $D_A(s) = 0$  xarakteristik tənliyinin isə  $m$  sayda sağ kökləri mövcuddur. Onda (19) ifadəsini arqument (9) prinsipinə əsasən aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$\arg \Phi(j\omega) = (n - 2\ell) \frac{\pi}{2} - (n - 2m) \frac{\pi}{2} = (m - \ell)\pi. \quad (20)$$

$0 \leq \omega < +\infty$

$\ell$  və  $m$  qapalı və açıq sistemlərin qütübləri də adlanır.

**1. Açıq sistem dayanıqlıdır.** Açıq sistem dayanıqlıdırsa, onun  $D_A(s) = 0$  xarakteristik tənliyinin bütün  $n$  sayda kökləri sol köklərdir, yəni sağ köklərin sayı  $m = 0$ .

Qapalı sistemin də dayanıqlı olması üçün analogi olaraq sağ köklərin sayı  $\ell = 0$  olmalıdır.  $m = 0$ ,  $\ell = 0$  qiymətlərini (20) ifadəsində yerinə yazsaq alarıq:

$$\arg \Phi(j\omega) = 0, \quad 0 \leq \omega < +\infty \quad (21)$$

Beləliklə, bu halda qapalı sistemin dayanıqlı olması üçün köməkçi  $\Phi(j\omega)$  funksiyanının argumentinin dəyişməsi sıfıra bərabər olmalıdır. Başqa sözlə  $\Phi(j\omega)$  üçün qurulmuş qodoqraf **koordinat başlanğıcını əhatə etməməlidir**. Bizə açıq sistem lazım olduğundan bu şərti açıq ATS-in AFTX ilə əlaqələndirək. (17) ifadəsinə əsasən yazmaq olar:

$$W_A(j\omega) = \Phi(j\omega) - 1. \quad (22)$$

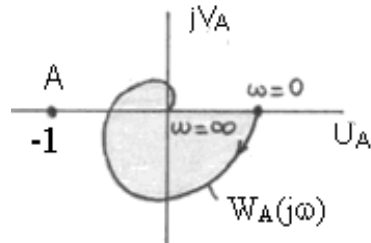
Köməkçi funksiyanı  $\Phi(j\omega) = U_\Phi(\omega) + jV_\Phi(\omega)$  həqiqi və xəyali hissələrin cəmi şəklində yazsaq (4.43) ifadəsinə əsasən:

$$W_A(j\omega) = U_\Phi(\omega) - 1 + jV_\Phi(\omega) = U_A(\omega) + jV_A(\omega).$$

Burada  $U_A(\omega) = U_\Phi(\omega) - 1$ ,  $V_A(\omega) = V_\Phi(\omega)$ . Göründüyü kimi, açıq sistemin AFTX köməkçi  $\Phi(j\omega)$  funksiyanının AFTX-dan yalnız həqiqi hissəyə görə (-1) qədər fərqlənir. Bu səbəbdən köməkçi funksiyanın qodoqrafını həqiqi (absis) ox üzrə vahid qədər sola sürüşdürsək açıq ATS-in AFTX ala bilərik. Beləliklə, bu halda Naykvist kriterisini açıq ATS-ə nəzərən aşağıdakı kimi formalaşdırmaq olar.

**Tərif 1. Açıq ATS dayanıqlıdırsa uyğun qapalı ATS-in dayanıqlı olması üçün açıq sistemin AFTX-si  $A(-1;j0)$  nöqtəsini əhatə etməməlidir.**

Şəkil 11-də dayanıqlı qapalı sistemə uyğun gələn açıq sistemin AFTX-si göstərilmişdir.



**Şəkil 11.** Dayanıqlı ATS-in Naykvist qodoqrafı

**2. Açıq sistem dayanıqsızdır.** Bu halda açıq sistemin  $D_A(s) = 0$  xarakteristik tənliyinin sağ yarımmüstəvidə  $m$  sayda kökü, qapalı sistem üçün isə yenə  $\ell = 0$ .

Bu halda (20) ifadəsinə əsasən köməkçi funksiyasının arqumentinin dəyişməsi:

$$\arg \Phi(j\omega) = m\pi = \frac{m}{2} \cdot 2\pi. \quad (23)$$

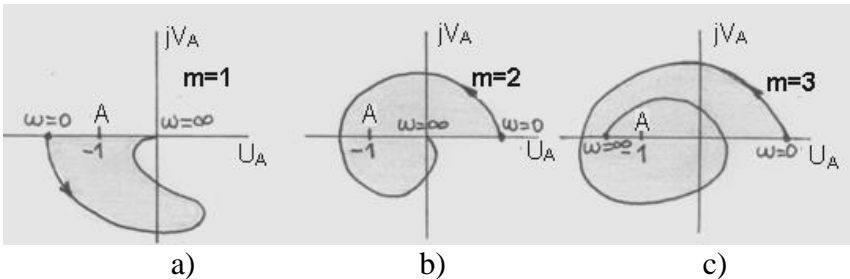
$0 \leq \omega < +\infty$

Bu ifadədən göründüyü kimi, qapalı sistemin dayanıqlı olması üçün köməkçi  $\Phi(j\omega)$  funksiyasının qodoqrafı koordinat başlanğıcını  $m/2$  dəfə əhatə etməlidir.

**Tərif 2. Açıq ATS dayanıqsızdırsa uyğun qapalı ATS-in dayanıqlı olması üçün açıq sistemin AFTX-sı (Naykvist qodoqrafı)  $A(-1, j0)$  nöqtəsini müsbət istiqamətdə (saat qərədinin əksinə)  $m/2$  dəfə əhatə etməlidir.**

Tam dövr  $2\pi$  rad. bərabərdir.

Şəkil 12, a-c –də  $m$ -in müxtəlif qiymətləri üçün dayanıqlı ATS-ə uyğun Naykvist qodoqraflar göstərilmişdir.



**Şəkil 12.** Sağ köklərin müxtəlif qiymətləri üçün Naykvist qodoqrafları

**3. Açıq sistem dayanıqlı sərhəddindədir, yəni neytral sistemdir.**

**3.1. Açıq sistem aperiodik dayanıqlıq sərhəddindədir** (astatik sistem). Bu halda açıq sistemin  $D_A(s) = 0$  xarakteristik tənliyinin kökləri arasında sıfır köklər mövcud olur. Qalan köklər

isə sol köklərdir. Belə sistemin ötürmə funksiyası aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$W_A(s) = \frac{M_A(s)}{D_A(s)} = \frac{M_A(s)}{s^v D_1(s)}. \quad (24)$$

Burada  $v$  ardıcıl qoşulmuş inteqrallayıcı mənzillərin sayını göstərən parametr olub **astatizm dərəcəsi** adlanır. Eyni zamanda  $v$  sifra bərabər köklərin sayıdır.  $D_1(s) = 0$  tənliyinin bütün kökləri sol (dayanıqlı) köklərdir. Sıfır köklər köklər müstəvisinin koordinat başlanğıcında yerləşir.

$D_A(s) = s^v D_1(s) = 0$  tənliyini  $s^v = 0$ ,  $D_1(s) = 0$  şəklində yazsaq aydın görünür ki, bu tənliyin  $v$  sayda sıfır kökləri mövcuddur. İfadə (24) –də  $s = j\omega$  əvəzləməsini edək:

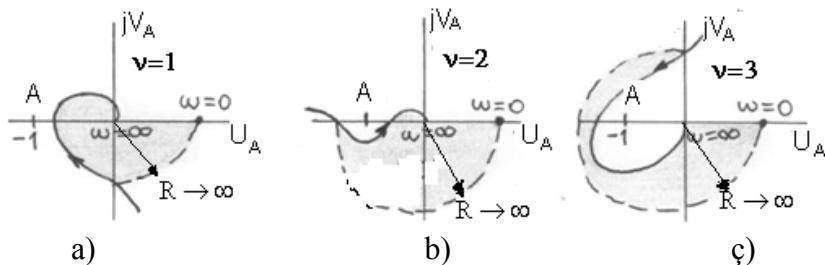
$$W_A(s) = \frac{M_A(j\omega)}{(j\omega)^v D_1(j\omega)}.$$

Bu ifadədən göründüyü kimi  $\omega = 0$  qiymətində  $V_A(0) = \pm\infty$  olduğundan vektorun uzunluğu  $A(0) = |W_A(0)| = \infty$ . Bu səbəbdən  $\omega = 0$  nöqtəsində ikinci növ kəsilməyə malik olan  $W_A(j\omega)$  qodoqrafının formasına görə onun  $A(-1;j0)$  nöqtəsini əhatə edib-etməməyini və deməli dayanıqlığı təyin etmək çətinlik törədir.

Sıfır köklərə kiçik qiymətli mənfi köklər kimi baxsaq  $D_1(s) = 0$  tənliyinin də kökləri mənfi olduğundan (24) astatik sistemə dayanıqlı sistem kimi baxıb 1-çi halı tətbiq etmək olar. Lakin Naykvist qodoqrafını sonsuz radius ilə tamamlamaq lazımdır.

**Tərif 3. Açıq ATS astatikdirsə, yəni koordinat başlanğıcında  $v$  sayda sifra bərabər qütübləri ( $D_A=0$  xarakteristik tənliyinin kökləri) mövcuddursa, uyğun qapalı ATS-in dayanıqlı olması üçün açıq sistemin AFTX-si absis oxunun müsbət hissəsindən başlayıb sonsuz  $R \rightarrow \infty$  radiuslu qovs cızaraq  $A(-1;j0)$  nöqtəsini əhatə etməməlidir.**

Şəkil 13, a-c-də  $v$  astatizm dərəcəsinin müxtəlif qiymətləri üçün dayanıqlı hallar göstərilmişdir.



**Şəkil 13.** Astatik hala uyğun dayanıqlı ATS-in Naykvist qodoqrafları

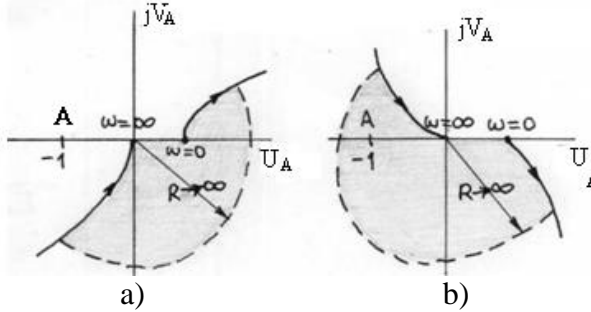
**3.2. Açıq sistem rəqsi dayanıqlı sərhəddindədir** (konservativ sistem). Bu halda açıq sistemin  $D_A(s) = 0$  xarakteristik tənliyin kökləri icərisində sırf xəyali  $s_{1,2} = \pm j\beta$  köklər mövcud olur. Qalan köklər isə sol köklərdir. Belə sistemin ötürmə funksiyası:

$$W_A(s) = \frac{M_A(s)}{(Ts^2 + 1)D_1(s)}.$$

Sırf xəyali köklər  $Ts^2 + 1 = 0$  tənliyinin həllindən tapılır:  $s = \pm j(1/T)$ . Sırf xəyali köklərə həqiqi hissəsi kiçik olan sol kök kimi baxsaq konservativ sistemə 1-ci halı (dayanıqlı) tətbiq etmək olar. Lakin konservativ halda Naykvist qodoqrafını kəsilmə  $\omega_k$  nöqtəsində ayrılan budaqlar arasında saat əqrəbi istiqamətində  $R \rightarrow \infty$  çevrəsi ilə **qapamaq lazımdır**. Bundan sonra qapalı ATS-in dayanıqlı olması üçün  $A(-1;j0)$  nöqtəsi qapalı sektordan kənar qalmalıdır. Buşqa sözlə Naykvist qodoqrafı  $A(-1;j0)$  nöqtəsini əhatə etməməlidir.

**Tərif 4.** Açıq sistem konservativdirsə, yəni sırf xəyali qütübləri mövcuddursa, uyğun qapalı ATS-in dayanıqlı olması üçün açıq sistemin AFTX-sini kəsilmə nöqtəsində sonsuz radiuslu çevrə ilə saat əqrəbi istiqamətində qapandıqdan sonar o  $A(-1;j0)$  nöqtəsini əhatə etməməlidir.

Şəkil 14, a-da dayanıqlı, b-də isə dayanıqsız qapalı ATS üçün Nykvist qodoqrafları göstərilmişdir.



Şəkil 14. Konservativ hala uyğun Nykvist qodoqrafı

## § 4. Ümumiləşdirilmiş Nykvist dayanıqlıq kriterisi

Mürəkkəb qodoqraflar üçün yuxarıda baxdığımız üç halı əhatə edən ümumiləşdirilmiş Nykvist dayanıqlıq kriterisi də mövcuddur:

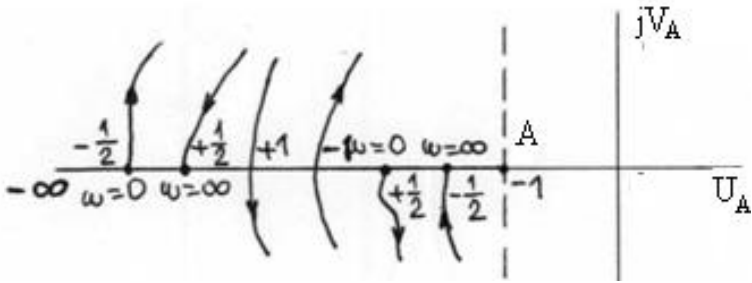
**Tərif 5. Qapalı ATS-in dayanıqlı olması üçün uyğun açıq sistemin AFTX-si (Nykvist qodoqrafı) həqiqi (absis) oxun ( $-\infty; -1$ ) parçasından müsbət və mənfi istiqamətdə keçidlərinin cəmi  $m/2$  ədədinə bərabər olmalıdır.**

$m$  – əvvəldə olduğu kimi açıq ATS-in sağ qütblərinin sayıdır. Yuxarıdan aşağıya keçidlər müsbət, əksinə mənfi qəbul olunur. Bundan başqa qodoqraf  $\omega = 0$  qiymətində göstərilən parçadan başlayırsa və ya  $\omega = \infty$  qiymətində bu parçada dayanırsa belə hallar yarımkeçid ( $1/2$ ) kimi qəbul olunur.

Dayanıqlı və neytral (dayanıqlıq sərhəddində olan) açıq sistemlər üçün  $m = 0$  olduğundan keçidlərin cəmi  $0/2 = 0$  olmalıdır. Yəni qodoqraf  $(-\infty; -1)$  parçasını kəsməməlidir.

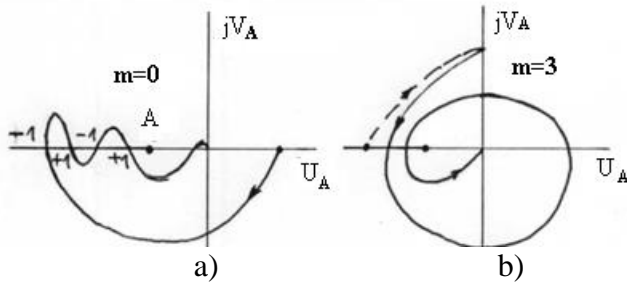
Şəkil 15 mümkün keçidlər göstərilmişdir.





**Şəkil 15.** Ümumiləşdirilmiş Nykvist kriterisindən istifadə etmək üçün keçidlərin tipləri

Şəkil 16, a, b-də uyğun olaraq dayanıqlı ( $m=0$ ) və dayanıqsız astatik ( $s_1 = 0$ ,  $m = 3$ ) açıq sistemlər üçün Nykvist qodoqrafları göstərilmişdir.



**Şəkil 16.** Ümumiləşdirilmiş Nykvist kriterisinə aid

Şəkil 16, a-da  $(-\infty; -1)$  intervalında  $+$  keçidlərin sayı,  $-$  keçidlərin sayına bərabər olduğundan cəm  $+2 - 2 = 0$ .  $m = 0$  olduğundan cəm  $m/2 = 0/2 = 0$  olmalıdır. Bu şərt ödənildiyindən qapalı ATS dayanıqlıdır.

Şəkil 16, b-də keçidlərin sayı  $2 - 1/2 = 3/2$ .  $m = 3$  olduğundan kriterinin şərti bu halda da ödənilir. Deməli uyğun qapalı ATS dayanıqlıdır.

Beləliklə, Nykvist kriterisindən istifadə etmək üçün:

1. Açıq ATS-in  $W_A(s)$  ötürmə funksiyası məlum olmalıdır.

2. Açıq ATS-in yuxarıda göstərilən 3 haldan (dayanıqlı, dayanıqsız, neytral) hansına aid olması məlum olmalıdır. Bu məqsədlə açıq sistemin  $D_A(s) = 0$  ( $W_A$  ötürmə funksiyasının məxrəcindəki ifadə) xarakteristik tənliyinin köklərini Matlabda **roots**[  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ] və ya **pole**( $W_A$ ) funksiyasının köməyi ilə tapmaq kifayətdir.

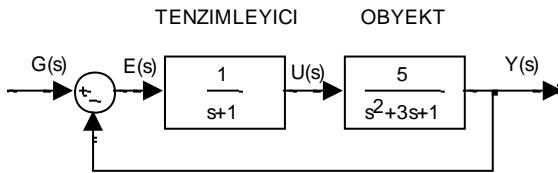
3. Ümumiləşdirilmiş Naykvist kriterisindən istifadə etdikdə yalnız  $D_A(s) = 0$  xarakteristik tənliyin sağ kökləri m-in sayını bilmək kifayətdir.

#### 4.1. Naykvist kriterisinin Matlab-da realizasiyası

Matlabda dayanıqlığı Naykvist kriterisinin köməyi ilə təyin etmək üçün **nyquist**( $W_A$ ) funksiyasından istifadə olunur. Xüsusi menyudan istifadə etməklə, qapalı ATS-in dayanıqlı olub-olmaması və dayanıqlıq ehtiyatları haqqında məlumat almaq mümkündür.

##### 1. Açıq ATS dayanıqlıdır.

Şəkil 17-də göstərilən ATS-in dayanıqlığını yoxlayaq.



Şəkil 17. Qapalı ATS-in sxemi

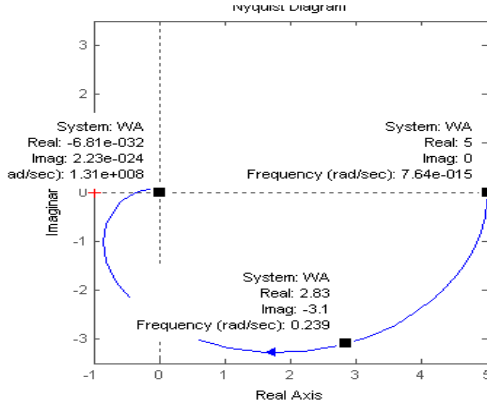
Açıq ATS-in ötürmə funksiyası:

$$W_A(s) = \frac{5}{(s+1)(s^2+3s+1)} .$$

$D_A(s) = 0$  xarakteristik tənliyinin kökləri:  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = -0.38$ ,  $s_3 = -2.62$  mənfi olduğundan (sol köklər) açıq sistem dayanıqlıdır. Deməli baxılan sistem 1-ci hala uyğundur.

Şəkil 18-də müvafiq Matlab proqramı və Nykvist diaqramı göstərilmişdir.

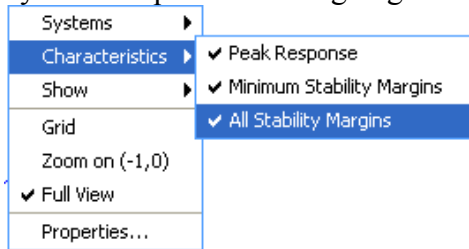
```
>> % MATLAB proqrami
>> % Nykvist kriterisi
>> % Aciq ATS dayanıqlıdır
>> s=tf('s');
>> WA=5/((s+1)*(s^2+3*s+1));
>> nyquist(WA)
```



Şəkil 18. Nykvist diaqramı

Göründüyü kimi, Nykvist hodoqrafı (əyrisi)  $(-1; j0)$  nöqtəsini əhatə etmədiyindən qapalı ATS dayanıqlıdır.

Şəkil 19-da göstərilmiş *menyunun* köməyi ilə **Show/Negative Frequencies** sətirinə sol “click” etməklə mənfi  $\omega$  tezliklərinə uyğun gələn Nykvist diaqramının budağı ləğv edilmişdir.



Şəkil 19. Menyü

Menu Nykvist diaqramının boş sahəsinə sağ “click” etməklə meydana çıxır.

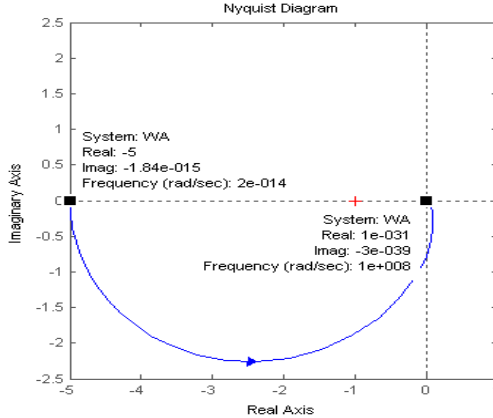
**1. Açıq ATS dayanıqsızdır.** Açıq sistemin ötürmə funksiyası:

$$W_A(s) = \frac{10}{(s+1)(s^3 - 4s^2 + 5s - 2)} .$$

Sağ köklər  $s_2 = s_3 = +1, s_4 = +2$ . Deməli  $m=3$ .

Şəkil 20-də Matlab proqramı və Nykvist hodoqrafı göstərilmişdir.

```
>> % MATLAB proqramı
>> % Nykvist kriterisi
>> % Açıq ATS dayanıqsızdır
>> WA=10/((s+1)*(s^3-4*s^2+5*s-2));
>> nyquist(WA)
```



**Şəkil 20.** Nykvist diaqramı

Göründüyü kimi, Nykvist qodoqrafı  $(-1; j0)$  nöqtəsini müsbət istiqamətdə  $\frac{1}{2}$  dəfə, yəni  $1 \cdot \pi$  rad əhatə edir. Tərifə görə ATS-in dayanıqlı olması üçün  $m/2=3/2=1.5$  dəfə, yəni  $2\pi + \pi=3 \pi$  rad

(tam və yarım) əhatə etməlidir. Deməli, uyğun qapalı ATS dayanıqsızdır.

### 3. Açıq ATS neytraldır.

3.1. Astatik hal (aperiodik dayanıqlıq sərhəddi).

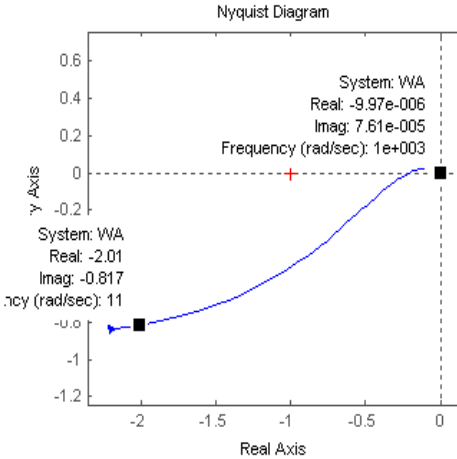
Açıq astatik sistemin ötürmə funksiyası:

$$W_A(s) = \frac{4000(0.2s+1)^2}{s(2.88s+1)^2(0.025s+1)(0.01s+1)}$$

Bu halda astatizm dərəcəsi  $\nu=1$ .

Şəkil 21-də Matlab proqramı və Naykvist diaqramı göstərilmişdir.

```
>> % MATLAB proqramı
>> % Naykvist kriterisi
>> % Açıq ATS astatikdir, mu=1
>> s=tf('s');
>> WA=4000*(0.2*s+1)^2/(s*(2.88*s+1)^2*(0.025*s+1)*(0.01*s+1));
>> N=logspace(1,3,100);
>> nyquist(WA,N)
```



Şəkil 21. Naykvist diaqramı

Göründüyü kimi,  $\nu=1$  qiymətində Naykvist hodoqrafı  $(-1; j0)$  nöqtəsini əhatə etmir. Deməli qapalı ATS dayanıqlıdır.

Qeyd! Naykvist kriterisini **nyquist** ( $W_A$ ) kimi yazdıqda absis və ordinat oxlarında olan miqyas çox böyük olduğundan

diqramının görünüşü başa düşülmür. Bu xüsusiyyəti aradan qaldırmaq məqsədi ilə tezliyi əlverişli diapazonda vermək lazımdır (adətən kiçik interval götürülür). Bu əməliyyat **logspace** ( $n_1$ ,  $n_2$ ,  $N$ ) funksiyasının köməyi ilə yerinə yetirilir. Uyğun tezliklər  $10^{n_1} \div 10^{n_2}$ , rad/s,  $N$  – bölgülərin sayı. Yuxarıdakı proqramda  $n = 1$ ,  $n = 3$ ,  $N = 100$  qəbul edilmişdir. Bu səbəbdən Nykvist diaqramı  $\omega = 10 \div 1000$  rad/s tezlik diapazonunda alınmışdır.

Bundan başqa (-1; 0) intervalında qodoqrafi aydın görmək üçün menyuda olan **Zoom on** (-1; 0) sətirinə sol “click” etmək olar.

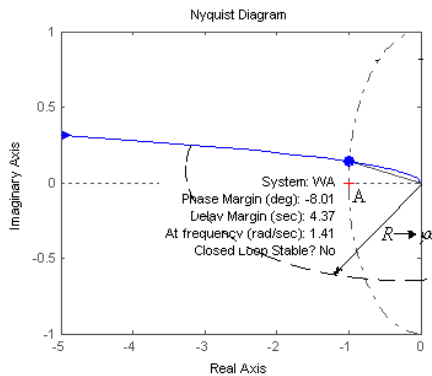
3.1.2. Açıq astatik ATS-in ötürmə funksiyası:

$$W_A(s) = \frac{2}{s^2(0.1s + 1)}$$

Bu halda  $\nu = 2$ .

Şəkil 22-də Matlab proqramı və Nykvist diaqramı göstərilmişdir.

```
>> %MATLAB proqram
>> %Nykvist kriterisi
>> %Aciq ATS astatikdir-mu=2
>> s=tf('s');
>> WA=2/(s^2*(0.1*s+1));
>> nyquist(WA)
```



Şəkil 22. Nykvist diaqramı

Alınmış Nykvist hodoqrafını  $R \rightarrow \infty$  radiuslu çevrə ilə qapasaq  $(-1; j0)$  kritik nöqtəsi əhatə olunacaqdır. Tərifə əsasən bu halda qapalı ATS dayanıqsızdır. Bu nəticəni pəncərədə də görmək olar (*Closed Loop Stable? No*).

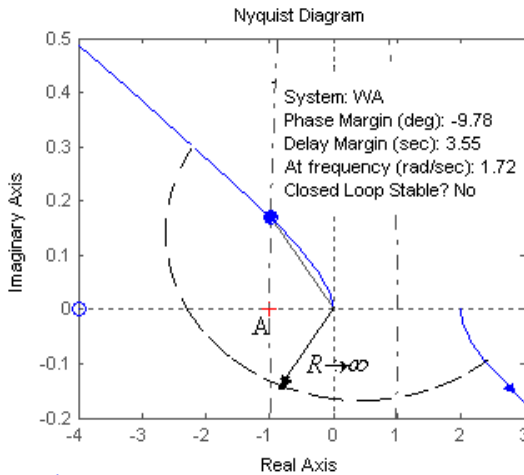
3.2. Konservatif hal (rəqsi dayanıqlıq sərhəddi).

3.2.1. Konservatif açıq ATS-in ötürmə funksiyası:

$$W_A(s) = \frac{2}{(s^2 + 1)(0.1s + 1)}$$

Şəkil 23-də Matlab proqramı və Nykvist diaqramı göstərilmişdir.

```
>> % MATLAB proqramı
>> % Nykvist dayanıqlıq kriterisi
>> % Açıq ATS konservativdir
>> s=tf('s');
>> WA=2/((s^2+1)*(0.1*s+1));
>> nyquist(WA)
```



Şəkil 23. Nykvist diaqramı

Budaqları  $R \rightarrow \infty$  çevrəsi ilə qapasaq kritik  $(-1; j0)$  nöqtəsi qapalı sektorun daxilində qalacaqdır. Deməli uyğun qapalı ATS dayanıqsızdır. Bu nəticəni pəncərədə də görmək olar.

#### 4. Ümumiləşdirilmiş Naykvist kriterisi.

4.1. Açıq sistemin ötürmə funksiyası:

$$W_A(s) = \frac{2}{0.00001s^4 + 0.00125s^3 + 0.0255s^2 + 0.04s - 1}$$

Açıq ATS-in hansı hala uyğun gəldiyini bilmək üçün  $W_A(s)$  ötürmə funksiyasının qütblərini ( $D_A(s)=0$  xarakteristik tənliyinin kökləri) **pole** ( $W_A$ ) funksiyasının köməyi ilə tapaq. Matlab proqramı və nəticə aşağıda göstərilmişdir.

```
>> % MATLAB proqramı
>> s=tf('s');
>> WA=2/(0.00001*s^4+0.00125*s^3+0.0255*s^2+0.04*s-1);
>> pole(WA)

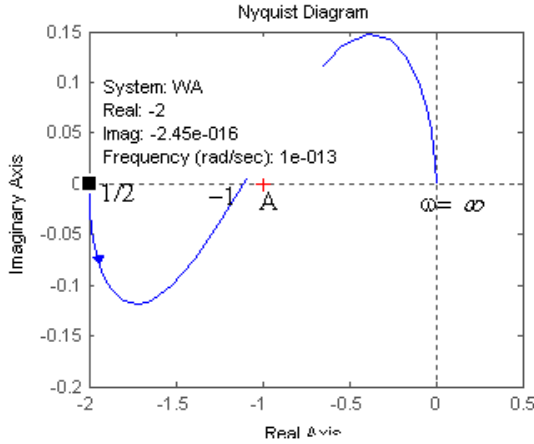
      -100.0000
ans =      -20.0000
          -10.0000
           5.0000
```

Yeganə  $s_4=5$  sağ kök mövcud olduğundan  $m=1$ .

Şəkil 24-də Matlab proqramı və Naykvist diaqramı göstərilmişdir.

```
>> %MATLAB proqramı
>> %Naykvist kriterisi-Umumi hal
>> s=tf('s');
>> WA=2/(0.00001*s^4+0.00125*s^3+0.0255*s^2+0.04*s-1);
>> nyquist(WA)
```





**Şəkil 24.** Naykvist diaqramı

Diaqram menyuda yerləşən **Zoom on**  $(-1; 0)$  sətrinə sol “click” etməklə böyüdülmüşdür.

Göründüyü kimi,  $(\infty; -1)$  intervalında aşağıdan yuxarıya bir keçid (mənfi)  $-1$ , absis oxunun üzərindən başlayan və aşağı istiqamətlənən bir keçid  $(+1/2)$  mövcuddur. Cəmi keçidlərin sayı  $-1+1/2=-1/2$ . Tərifə görə isə  $m/2=+1/2$  keçid olmalıdır. Bu səbəbdən qapalı ATS dayanıqsızdır.

4.2. Açıq ATS-in ötürmə funksiyası:

$$W_A(s) = \frac{40(0.25s+1)}{s(0.5s-1)(0.0004s^2+0.004s+1)}$$

Açıq ATS-in hansı hala uyğun gəldiyini bilmək üçün  $D_A(s)=0$  xarakteristik tənliyinin köklərini **pole** ( $W_A$ ) funksiyasının köməyi ilə təyin edirik.

```

>> %DA(s)=0 xar. tenliyinin kokleri
>> s=tf('s');
>> WA=40*(0.25*s+1)/(s*(0.5*s-1)*(0.0004*s^2+0.004*s+1));
>> Kok=pole(WA)

      0
Kok =  -5.0000 +49.7494i
        -5.0000 -49.7494i
         2.0000

```

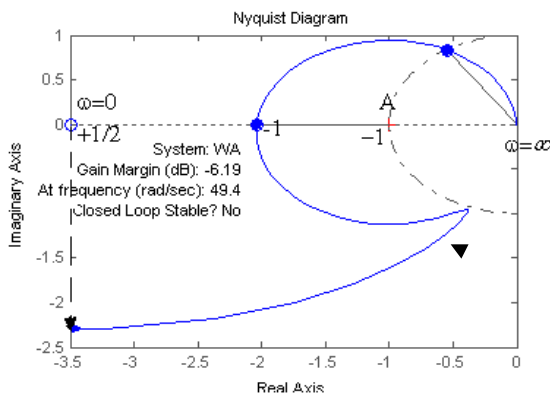
Göründüyü kimi, bir sağ kök  $s_1=2$  olduğundan,  $m=1$ . Bu dayanıqsız (ikinci hal) hala uygundur. Deməli, qapalı ATS-in dayanıqlı olması üçün hodoqrafın  $(-\infty; -1)$  parçasından keçidlərinin cəmi  $m/2=1/2$  olmalıdır.

Şəkil 25-də uyğun Matlab proqramı və Nykvist diaqramı göstərilmişdir.

```

>> %MATLAB proqrami
>> %Nykvist kriterisi
>> %Dayaniqsiz astatik aciq ATS
>> s=tf('s');
>> WA=40*(0.25*s+1)/(s*(0.5*s-1)*(0.0004*s^2+0.004*s+1));
>> nyquist(WA)

```



Şəkil 25. Nykvist diaqramı

$\omega_k = 0$  kəsilmə qiymətində AFTX-nın həqiqi hissəsi ( $-\infty$ ) xəyali hissəsi isə 0-dır. Bu nöqtə absis oxunun ( $-\infty$ ;  $-1$ ) intervalında yerləşdiyindən və hodoqraf aşağı istiqamətləndiyindən keçid  $+1/2$ -dir. ( $-\infty$ ;  $-1$ ) intervalında digər  $-1$  keçidi aydın görünür. Cəmi keçidlər  $+1/2-1=-1/2$  olduğundan qapalı ATS dayanıqsızdır. Bu nəticə pəncərədə də qeyd olunmuşdur (Closed Loop Stable? No).

Açıq ATS:

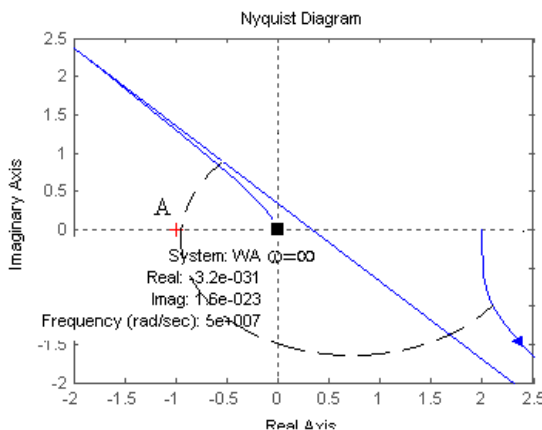
$$W_A(s) = \frac{2}{(s^2 + 1)(s + 1)}.$$

Şəkil 26-də Matlab proqramı və Nykvist diaqramı göstərilmişdir.

```
>> % MATLAB proqramı
>> % Nykvist kriterisi-Umumilesd. hal
>> s=tf('s');
>> WA=2/((s^2+1)*(s+1));
>> Kok=pole(WA)
```

```
-1.0000
Kok = -0.0000 + 1.0000i
      -0.0000 - 1.0000i
```

```
>> nyquist(WA)
```



Şəkil 26. Nykvist diaqramı

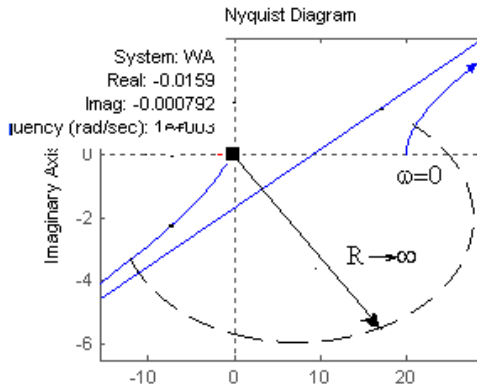
Göründüyü kimi sağ köklər mövcud olmadığından,  $m=0$ . Bu halda dayanıqlı ATS üçün keçidlərin cəmi  $m/2=0$  olmalıdır. Sağ və sol budaqları  $R \rightarrow \infty$  çevrəsi ilə birləşdirsək bu çevrə  $(-\infty; -1)$  parçasını aşağıdan yuxarıya doğru bir dəfə kəsəcəkdir. Bu istiqamətdə keçid  $-1$  olduğundan qapalı ATS **dayanıqsızdır**.

#### 4.4. Açıq ATS:

$$W_A(s) = \frac{20(0.02s+1)}{(0.0025s^2+1)(0.01s+1)}$$

Şəkil 26-da Matlab proqramı və Naykvist hodoqrafı göstərilmişdir.

```
>> * MATLAB proqramı
>> * Naykvist kriterisi-Umumilesd. hal
>> s=tf('s');
>> WA=20*(0.02*s+1)/((0.0025*s^2+1)*(0.01*s+1));
>> Kok=pole(WA)
1.0e+002 *
Kok =
-1.0000
-0.0000 + 0.2000i
-0.0000 - 0.2000i
>> N=logspace(-5,3,200);
>> nyquist(WA,N)
```



Şəkil 26. Naykvist diaqramı

Bu halda sağ kök mövcud deyil,  $m=0$ . Qapalı ATS-in dayanıqlı olması üçün  $(-\infty; -1)$  parçasında keçidlərin cəmi  $m/2=0/2=0$  olmalıdır. Sağ və sol budaqları  $R \rightarrow \infty$  çevrəsi ilə tamamlasaq alınmış əyri  $(-\infty; -1)$  parçasını kəsməyəcəkdir. Yəni keçidlərin cəmi 0-dır. Bu səbəbdən qapalı ATS **dayanıqlıdır**.

Bundan başqa baxılan hal neytral hala uyğun olduğundan əvvəldə verilmiş tərifinə də ödəyir.

## § 5. Dayanıqlıq ehtiyatları

İstənilən ATS müəyyən dayanıqlıq ehtiyatlarına malik olmalıdır. Bunlara olan tələbat idarəetmə obyektinin xüsusiyyətlərindən asılıdır. Məsələn, atom reaktorunun və uçuş aparatlarının dayanıqlıq ehtiyatları çox yüksək olmalıdır.

Dayanıqlıq ehtiyatlarını tezlik xarakteristikaları əsasında hesablamaq daha əlverişlidir.

İki tip dayanıqlıq ehtiyatından istifadə olunur.

1. **Modula görə dayanıqlıq ehtiyatı**,  $G_m = 1/A(\omega_{cg})$ , dB.

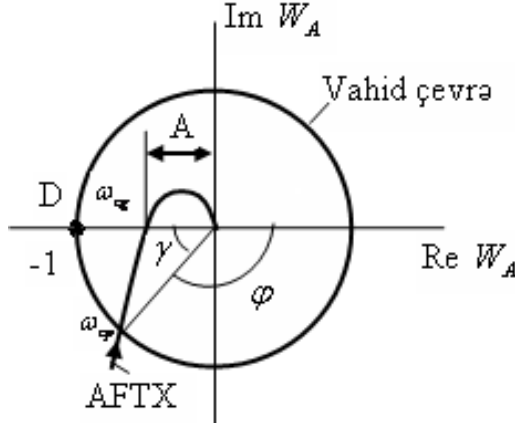
2. **Fazaya görə dayanıqlıq ehtiyatı**,  $\gamma = 180^\circ - \varphi(\omega_{cp})$ , dərəcə.

*Modula görə dayanıqlıq ehtiyatı  $G_m$  - faza sürüşməsi  $\varphi = -180^\circ$  (absis oxunun mənfi hissəsi) üçün təyin olunur və sistem dayanıqlıq sərhəddinə çatana qədər, yəni Naykvist hodoqrafının  $D(-1; j0)$  nöqtəsindən keçənə qədər, gücləndirmə əmsalının neçə dəfə artırmaq mümkün olduğunu göstərir.*

*Fazaya görə dayanıqlıq ehtiyatı  $\gamma - A(\omega_{cp}) = 1$  olduğu kəsmə  $\omega_{cp}$  tezliyi üçün (hodoqrafın vahid çevrəni kəsmə nöqtəsinə uyğun gələn tezlik) təyin olunur və sistemin dayanıqlıq sərhəddinə çatana qədər (yəni  $D(-1; j0)$  nöqtəsinə) nə qədər mənfi faza sürüşməsi ala bilməsinin mümkün olduğunu göstərir.*

Dayanıqlıq ehtiyatlarını Naykvist hodoqrafının (əyrisi) köməyi ilə asanlıqla təhlil etmək mümkündür. Yada salaq ki, Naykvist hodoqrafı açıq ATS-in AFTX xarakteristikasıdır.

Şəkil 27-də Naykvist hodoqrafı göstərilmişdir.



**Şəkil 27.** Naykvist hodoqrafı

Absis oxunun mənfi hissəsində yerləşən  $D(-1; j0)$  nöqtəsi kritik nöqtədir. Naykvist əyrisi  $D$  nöqtəsindən sola keçdikdə sistemin dayanıqlığı pozulur.  $D(-1; j0)$  nöqtəsi dayanıqlıq sərhəddini müəyyən edir.

Şəkildə:

-  $A$  – amplitud-tezlik xarakteristikasının (ATX) qiyməti;

-  $\varphi$  - faza tezlik (FTX) qiyməti;

- tezlik  $\omega_{cg}$ ,  $rad$  – Naykvist hodoqrafının həqiqi oxu (absis oxu) kəsmə nöqtəsinə uyğun gələn tezlik,  $\varphi(\omega_{cg}) = -180^\circ$ .

- tezlik  $\omega_{cp}$  - Naykvist hodoqrafının vahid çevrəni kəsmə nöqtəsinə uyğun gələn tezlikdir,  $A(\omega_{cp}) = 1$ .  $\omega_{cp}$  - kəsmə tezliyi adlanır .

$G_m(\omega_{cg}) > 1 (A(\omega_{cg}) < 1)$  olarsa qapalı ATS dayanıqlı,  $G_m(\omega_{cg}) < 1 (A(\omega_{cg}) > 1)$  olarsa qapalı ATS dayanıqsız olur.

Aşağıdakı xüsusi hallar da nəzərə alınmalıdır:

1. Əgər Naykvist əyrisi həqiqi oxun mənfi hissəsi ilə kəsişmə nöqtəsi yoxdursa modula görə dayanıqlıq ehtiyatı (**margin**) sonsuzdur.

2. Əgər Naykvist əyrisi həqiqi oxun mənfi hissəsini  $(-1; j0)$  və  $(0; j0)$  nöqtələri arasında çoxdəfəli kəsirsə, onda  $D(-1; j0)$  nöqtəsinə ən yaxın olan nöqtə modula görə dayanıqlıq ehtiyatı  $G_m$  -ni təyin edir.

3. Əgər Naykvist əyrisi ilə *vahid çevrənin* kəsişmə nöqtəsi mövcud deyilsə, onda fazaya görə dayanıqlıq ehtiyatı sonsuzdur,  $\gamma = \infty$ .

4. Əgər Naykvist əyrisi *vahid çevrəni* 3-cü kvadrantında (rübədə) çoxdəfəli kəsirsə, onda mənfi həqiqi oxa ən yaxın nöqtə fazaya görə  $\gamma$  dayanıqlıq ehtiyatını təyin edir.

Dayanıqlıq ehtiyatlarını hesablamaq üçün Matlabda **margin** (.) funksiyasından istifadə olunur. Uyğun sintaksis:

$$[G_m, \gamma, \omega_{cg}, \omega_{cp}] = \text{margin}(W_A);$$

$W_A$  - açıq ATS-in ötürmə funksiyasıdır.

Dayanıq ehtiyatlarını qrafoanalitik təyin etmək üçün *nyquist* ( $W_A$ ), *bode* ( $W_A$ ) və *nichols* ( $W_A$ ) funksiyalarından istifadə olunur.

## 5.1. MATLABda realizasiya

Açıq ATS-in ötürmə funksiyası:

$$W_A = \frac{2}{s^3 + 1.5s^2 + 3s + 1}.$$

Şəkil 28-də Matlab proqramı, Naykvist (a), Bode (b) və Nikols (c) diaqramları göstərilmişdir.

```

>> % ATLAB programı
>> % ATS-in dayanıqlıq ehtiyatlari
>> s=tf('s');
>> WA=2/(s^3+1.5*s^2+3*s+1);
>> [Gm,Pm,Wg,Wp]=margin(WA),nyquist(WA),figure,bode(WA),...
figure,nichols(WA)

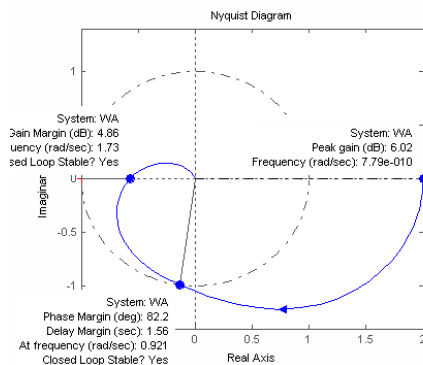
```

Gm = 1.7500

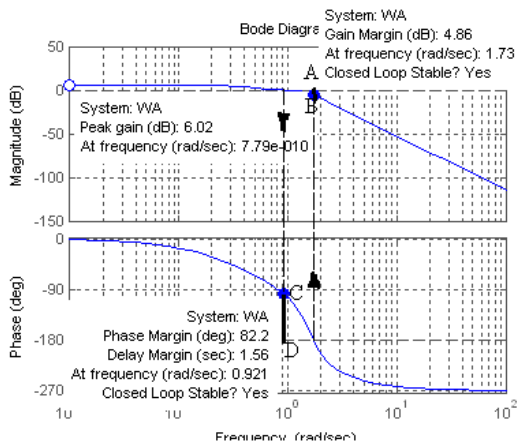
Pm = 82.2098

Wg = 1.7321

Wp = 0.9205

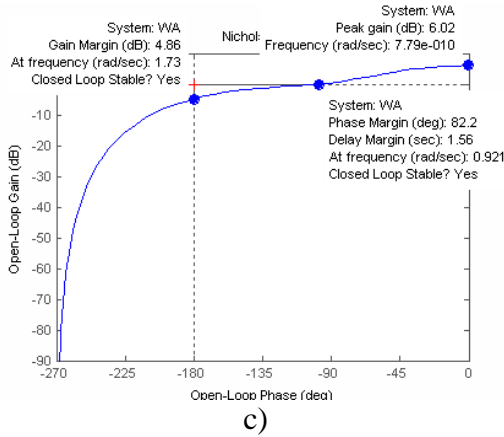


a)



b)

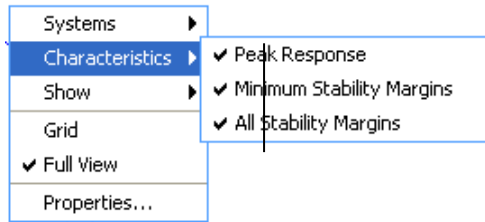




**Şəkil 28.** Tezlik diaqramları

Şəkiləki vacib nöqtələrin parametrləri şəkil 29-da göstərilən **Menyu** vasitəsi ilə alınmışdır. **Menyu** diaqramın boş sahəsinə sağ “click” etməklə üzə çıxır.

**Şəkil 29.** Menyü



Naykvist diaqramında menyuda *show/Negative Frequencies* sətirinə sol “click” etməklə mənfi  $\omega$  tezliklərinə uyğun gələn qol ləğv edilmişdir.

Diaqramlara əsasən aşağıdakı göstəriciləri əldə etmək mümkündür:

1. Naykvist diaqramı:

- **gain margin** (*dB*) – modula görə dayanıqlıq ehtiyatı  $G_m$ (*dB*);
- **at frequency** (*rad/sec*) – uyğun  $\omega_{cg}$  tezliyi (rad/san);

- **phase margin** (*deg*) – fazaya görə dayanıqlıq ehtiyatı  $\gamma$  (dərəcə);

- **at frequency** (*rad/sec*) – uyğun kəsmə  $\omega_{cp}$  tezliyi (*rad/san*);

- **delay margin** (*sec*) - kritik gecikmə (san);

$\tau_k = \gamma / \omega_{cp}$ ,  $\gamma - rad$ .  $\tau > \tau_k$  olduqda sistemin dayanıqlığı pozulur!

- **peak gain** (*dB*) - ən böyük (max) gücləndirmə (*dB*);

- **closed loop stable? Yes** – qapalı kontur (ATS) dayanıqlıdır? Hə.

2. Bode diaqramı: - eyni göstəricilər. AB-  $G_m(dB)$ , CD-  $\gamma$  (dərəcə);

3. Nikols diaqramı: - eyni göstəricilər.

Proqram  $G_m$ -i adi vahiddə hesablayır. Tapılmış  $G_m=1.75$  qiymətini loqorifmik vahidə çevirsək alarıq:

$$L = 20 \lg(A) = 20 \lg(1.75) = 4.8608 \text{ dB}.$$

Cədvəl 2-də yuxarıdakı göstəricilər əks olunmuşdur.

Cədvəl 2

### Modelləşdirmənin nəticələri

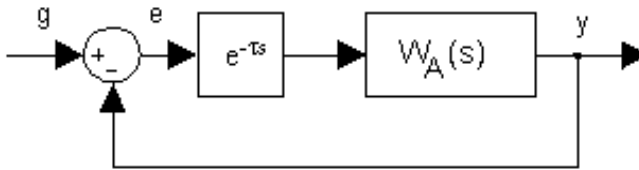
	$G_m$	$\omega_{cg}$	$\gamma^0$	$\omega_{cp}$	$G_{max}$	$\omega_{max}$	$\tau_k$
Proqram	1.75	1.7321	82.2098	0.920 5	-	-	-
Naykvist	4.86	1.73	82.2	0.921	6.02	$7.79 \cdot 10^{-10}$	1.56
Bode	4.86	1.73	82.2	0.921	6.02	$7.79 \cdot 10^{-10}$	1.56
Nikols	4.86	1.73	82.2	0.921	6.02	$7.79 \cdot 10^{-10}$	1.56

Göründüyü kimi Naykvist, Bode və Nikols diaqramlarına əsasən alınmış göstəricilər proqram ilə hesablanmış qiymətlərə çox yaxındır.

## § 6. Gecikməyə malik olan sistemlərin dayanıqlığı

Baxdığımız halda gecikmə dedikdə siqnalın ötürücü kanalda ləngiməsi nəzərdə tutulur. Belə gecikmə **xalis** və ya **nəqliyyat gecikməsi** adlanır. Adətən gecikmə **idarə kanalında baş verir**. Gecikmənin mövcudluğu rəqsliliyi artırır, dayanıqlıq ehtiyatlarını aşağı salır və s.

Şəkil 30-də birbaşa kanalda gecikməsi olan qapalı ATS-in sxemi göstərilmişdir.



Şəkil 30. Gecikməyə malik olan qapalı ATS-in sxemi

Bu halda sxemə əsasən qapalı ATS-in dayanıqlığını təyin etmək üçün bizə lazım olan açıq ATS-in ötürmə funksiyası:

$$W_{A\tau}(s) = W_A(s)e^{-Ts}. \quad (25)$$

Burada  $W_\tau = e^{-Ts}$  - gecikmə manqasının ötürmə funksiyası,  $\tau = \text{const}$  - xalis gecikmə, s.

$W_A(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$  - şəkildə təsvir etsək, (25) ifadəsini belə yazmaq olar:

$$W_{A\tau}(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} e^{-j\tau\omega} = A(\omega)e^{j[\varphi(\omega)-\tau\omega]}. \quad (26)$$

Bu ifadədən görüldüyü kimi, gecikmə açıq ATS-in ATX-ni deyil, yalnız FTX-ni dəyişərək onu saat əqrəbi istiqamətində  $\tau\omega$  rad. sürüşdürür.

Həndəsi mənada bu o deməkdir ki, Naykvist qodoqrafını qurmaq üçün  $A(\omega_i)$  vektorun uzunluğu olduğundan onu dəyişməyib yalnız fazasını (bucağını)  $\tau\omega_i$  rad sürüşdürmək

lazımdır. Deməli, qrafoanalitik üsuldən istifadə etdikdə əvvəlcə gecikməni nəzərə almadan  $W_A(j\omega)$  üçün Naykvist qodoqrafı qurmaq, sonra isə müxtəlif  $\omega_i$ -lər üçün  $A(\omega_i)$  vektorlarını  $\tau\omega_i$  qədər sürüşdürmək lazımdır.

Gecikməni nəzərə alan Naykvist qodoqrafı bilavasitə də qurmaq olar. Bu məqsədlə (25) ifadəsində

$$W_A(j\omega) = U_A(\omega) + jV_A(\omega)$$

şəklində yazıb Eyler düsturuna əsasən  $e^{-j\tau\omega} = \cos(\tau\omega) - j\sin(\tau\omega)$  nəzərə alsaq alarıq:

$$W_{A\tau}(j\omega) = U_\tau(\omega) + jV_\tau(\omega). \quad (27)$$

Burada

$$U_\tau(\omega) = U_A(\omega)\cos(\omega\tau) + V_A(\omega)\sin(\omega\tau), \quad (28)$$

$$V_\tau(\omega) = -U_A(\omega)\sin(\omega\tau) + V_A(\omega)\cos(\omega\tau).$$

Tezliyə  $\omega \in (0, +\infty)$  intervalında qiymətlər verib (28) ifadəsinə əsasən həqiqi  $U_\tau(\omega)$  və xəyali  $V_\tau(\omega)$  hissələri hesablayaraq Naykvist qodoqrafını qurub əvvəlki qaydalara əsasən gecikməyə malik qapalı ATS-in dayanıqlığını təyin etmək olar.

## 6.1. MATLABda realizasiya

Matlabda **nyquist**( $W_{A\tau}$ ) funksiyasının köməyi ilə Naykvist qodoqrafının qurulması avtomatlaşdırılmışdır.

Fərz edək ki, açıq ATS-in ötürmə funksiyası:

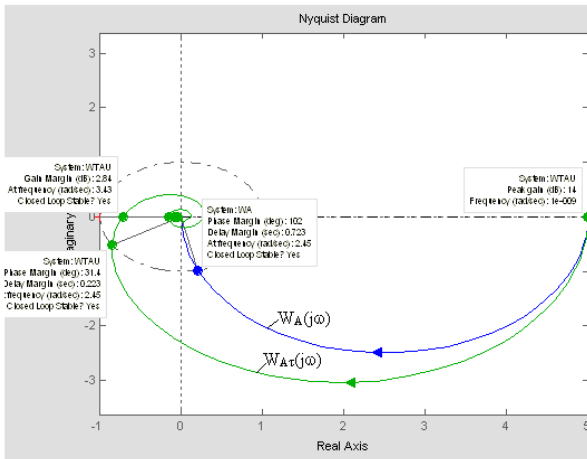
$$W_A(s) = \frac{5}{2s+1}.$$

Gecikməni  $\tau = 0.5$  s nəzərə alsaq:

$$W_{A\tau}(s) = W_A(s)e^{-0.5s}.$$

Şəkil 31-də Matlab proqramı gecikməsiz  $W_A(j\omega)$  və gecikmə nəzərə alınmaqla  $W_{A\tau}(j\omega)$  Nykvist qodoqrafları göstərilmişdir.

```
>> % MATLAB proqramı
>> % Nykvist dayan. kriterisi
>> % Gecikməyə malik ATS-in dayanıqlığı,tau=0.5 s
>> WA=tf(5,[2 1]); % tau=0
>> WTAU=tf(5,[2 1],'ioDelay',0.5); % tau=0.5 s
>> nyquist(WA),hold on,nyquist(WTAU)
```



**Şəkil 31.** Gecikməyə malik ATS-in Nykvist diaqramı

Göründüyü kimi, gecikmənin mövcudluğu dayanıqlıq ehtiyatlarını əhəmiyyətli dərəcədə azaltmışdır:

$$G_m = \infty, \quad \gamma = 102^\circ; \quad G_{m\tau} = 2.84, \quad \gamma_\tau = 31.4^\circ.$$

Kritik gecikmə  $\tau_k = 0.723$  s. Əgər  $\tau = 0.5$  s deyil  $\tau > \tau_k$  götürsədik qapalı ATS-i dayanıqsız olacaqdır. Maksimal gücləndirmə  $G = 14$  dB tezliyin  $\omega = 1 \cdot 10^{-9} \approx 0$  rad/s qiymətində alınmışdır.

**Kritik gecikmə.** Gecikmə ATS-in keyfiyyətini və dayanıqlıq ehtiyatlarını pisləşdirir. Gecikmənin  $\tau$  qiyməti artıqca Naykvist qodoqrafı kritik  $A(-1;j0)$  nöqtəsinə yaxınlaşır və müəyyən qiymətdən sonra onu aşır. Bu halda ATS dayanıqsız hala düşür.

**Tərif. Qodoqrafın  $A(-1;j0)$  nöqtəsindən keçməsinə uyğun gələn gecikmə kritik (böhran) gecikmə adlanır.**  $\tau > \tau_k$  qiymətlərində qapalı ATS dayanıqsız olur. Bu səbəbdən kritik gecikmənin qiymətini və onunla bilavasitə əlaqədar olan fazaya görə  $\gamma$  dayanıqlıq ehtiyatını bilmək çox vacibdir.

Bu vaxt üç hal ola bilər.

**1. Naykvist qodoqrafı vahid çevrəni kəsmir.** Bu halda sistem  $\tau$ -nun istənilən qiymətində dayanıqlıdır, yəni  $\tau_k = \infty$ .

**2. Naykvist kriterisi vahid çevrəni bir nöqtədə kəsir.** Kəsmə nöqtəsinə uyğun gələn tezlik  $\omega_c$ , rad/s. **kəsmə tezliyi adlanır.**

Kritik gecikməni tapaq. Fərz edək ki, əsas kanalda  $\tau$  xalis gecikməsi mövcuddur. Onda

$$W_{A\tau}(s) = W_A(s)e^{-\tau s}.$$

$s = j\omega$  əvəzləməsi etsək alarıq:

$$W_{A\tau}(j\omega) = W_A(j\omega)e^{-j\tau\omega} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}e^{-j\tau\omega} = A(\omega)e^{j[\varphi(\omega) - \tau\omega]}. \quad (29)$$

Vahid çevrə ilə  $\omega_c$  kəsişmə nöqtəsinə uyğun vektorun uzunluğu  $A(\omega_c) = 1$  olduğundan  $\omega_c$  tezliyini aşağıdakı tənlikdən tapmaq olar:

$$A^2(\omega) = U_A^2(\omega_c) + V_A^2(\omega_c) = 1. \quad (30)$$

Digər tərəfdən  $W_{A\tau}(j\omega)$  qodoqrafının  $A(-1;j0)$  nöqtəsindən keçmə vəziyyətinə uyğun gələn faza  $(-\pi)$  olduğundan şəklə əsasən:

$$-[\varphi(\omega_c) + \gamma_c] = -\pi.$$

(29) ifadəsinə əsasən  $\gamma_c = \tau_k\omega_c$  olduğundan:

$$[\varphi(\omega_c) + \tau_k\omega_c] = \pi + 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Buradan kritik gecikmə:

$$\tau_k = \frac{\pi(1+2n) - \varphi(\omega_c)}{\omega_c}. \quad (31)$$

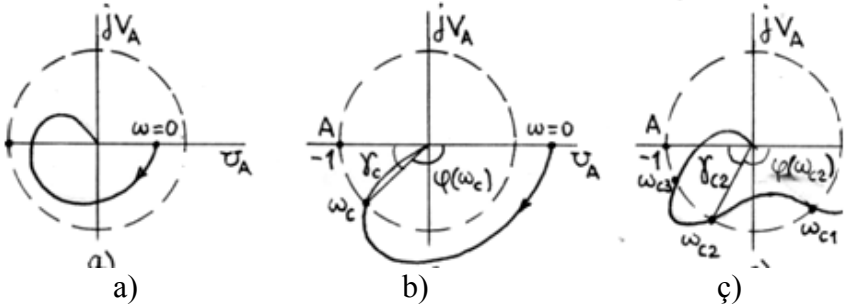
$n = 0$  qiymətində  $\tau_k = \gamma_c / \omega_c$ .

$$(31) \text{ ifadəsində} \quad \varphi(\omega_c) = \text{arctg} \left( \frac{V_A(\omega_c)}{U_A(\omega_c)} \right).$$

**3. Naykvist qodoqrafı vahid çevrəni bir-neçə  $\omega_{ci}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  tezliyində kəsir.**

Bu halda  $\tau_{ki}$  gecikmələri (31) düsturuna əsasən  $\omega_{ci}$  tezlikləri üçün hesablanır.

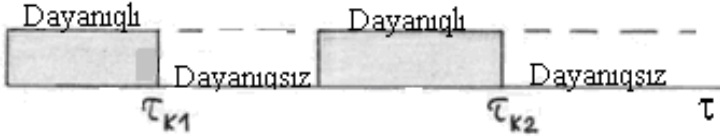
Şəkil 32-də yuxarıdakı üç hala uyğun Naykvist diaqramları göstərilmişdir.



**Şəkil 32.** Müxtəlif Naykvist diaqramları

Əgər  $\omega_{ci}$  kəsmə nöqtələri aşağı yarımmüstəvidədirsə  $n = 0$ , yuxarı yarımmüstəvidə olarsa  $n = 1$ , yenə aşağı keçərsə  $n = 2$  və s. qəbul etmək lazımdır. Gecikmə vaxtı  $\tau$  artıqsa qodoqraf deformasiya edərək müəyyən zaman intervallarında  $A(-1; j0)$  nöqtəsini əhatə edəcək və ya etməyəcək. Yəni dayanıqsız və dayanıqlı intervallar növbələşəcəkdir.

Şəkil 33-da belə növbələşmələr göstərilmişdir.



**Şəkil 33.** Dayanıqlı və dayanıqsız intervallarının növbələşməsi

**Misal 4.** Açıq ATS-in ötürmə funksiyası aşağıdakı şəkildə verilmişdir:

$$W_A(s) = \frac{K}{Ts+1}.$$

Kritik gücükməni tapaq.

Bu halda 
$$U_A = \frac{K}{T^2\omega^2 + 1}, \quad V_A = -\frac{KT\omega}{T^2\omega^2 + 1}.$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg(T\omega).$$

(30) tənliyindən

$$\omega_c = \frac{1}{T} \sqrt{K^2 - 1}.$$

$n = 0$  qəbul edib (31) ifadəsinə əsasən:

$$\tau_k = \frac{1}{T} \sqrt{K^2 - 1} \left( \pi + \arctg \left( \sqrt{K^2 - 1} \right) \right).$$

Parametrlərin  $K = 10$ ,  $T = 1$  s qiymətlərində  $\tau_k = 0.46$  s. Beləliklə, qapalı ATS-in dayanıqlı olması üçün  $0 \leq \tau < 0.46$  s. olmalıdır.



## Bölmə 3

# SİSTEMİN PARAMETRLƏRİNİN DAYANIQLIĞA TƏSİRİ

Əvvəldə baxdığımız dayanıqlıq kriteriləri sistemin parametrlərinin verilmiş qiymətlərində onun dayanıqlı olub-olmamasını təyin etməyə imkan verirdi. Lakin sistemin fəaliyyəti zamanı onun (əsasən obyektin) bəzi parametrləri dəyişə bilər. Məsələn, gücləndirmə əmsalı, zaman sabitləri, gecikmə, sönmə əmsalı və s. Təbii ki, bu dəyişmə sistemin dayanıqlığına təsir edəcəkdir. Bu səbəbdən parametrlərin elə dəyişmə oblastını tapmaq tələb olunur ki, burada sistem öz dayanıqlığını saxlasın. Bu oblast **dayanıqlıq oblastı** adlanır. Əgər bir parametrin dayanıqlığa təsiri tədqiq edilsə, onda söhbət **dayanıqlıq intervalından** gedir.

Dayanıqlıq oblastını təyin etmək üçün əsasən aşağıdakı üsullardan istifadə olunur:

1. **Köklər qodoqrafı üsulu.** Parametrlər dəyişdikdə xarakteristik tənliyin köklərinin köklər müstəvisində yerdəyişmə trayektoriyasının tənliyinə əsaslanır.

2. **D-bölmə üsulu.** Parametrlər fəzasında (iki parametr üçün – müstəvisində) dayanıqlıq sərhəddinin qurulması və sol (dayanıqlı) köklərin yerləşdiyi oblastın təyin olunmasına əsaslanır.

3. **Cəbri bərabərsizliklərin həllinə əsaslanan üsul.** Bu halda Hurvis cəbri dayanıqlıq kriterisindən istifadə olunur.

## § 1. Köklər qodoqrafı üsulu

Əvvəldə deyildiyi kimi *köklər qodoqrafı* – sistemin bir parametri 0-dan  $\infty$ -ə qədər dəyişdikdə xarakteristik tənliyin köklərinin *s*-müstəvidə (köklər müstəvisi) cızdığı trayektoriyalardır.

Köklər üsulundan (§11) məlum olduğu kimi qapalı sistemin dayanıqlı olması üçün xarakteristik  $D(s)=0$  tənliyinin bütün kökləri  $s$ -müstəvisinin sol tərəfində yerləşməlidir. Köklər qodoqrafını müşahidə edərək dəyişən parametrlərin bu şərti ödəyən dəyişmə intervalını təyin etmək olar.

Bir  $K$  parametrlərinə görə köklər qodoqrafını qurmaq üçün xarakteristik tənliyi aşağıdakı şəkllə gətirmək lazımdır:

$$D(s) = 1 + KW_A = 1 + K \frac{p(s)}{q(s)}.$$

Analitik üsulları tətbiq etməklə köklər qodoqrafını əl ilə qurmaq olar. Lakin biz burada Matlab-da olan **rlocus** və **rlocfind** funksiyalarından istifadə edəcəyik.

$K$  parametrlərinin elə qiymətlərini seçmək (**rlocfind** funksiyasının köməyi ilə) lazımdır ki, (əgər belə qiymət mövcuddursa, yəni qapalı ATS struktur dayanıqsız deyilsə)  $D(s) = 0$  xarakteristik tənliyinin bütün kökləri sol yarımmüstəvidə qalsın. Xarakteristik tənliyin köklərinin sayı  $q(s) = 0$  və  $p(s) = 0$  polinomlarının köklərinin cəminə bərabər olub «**pole**» adlanır.  $q(s)$  polinomunun kökləri  $x$ ,  $p(s) = 0$  isə  $\bullet$  ilə işarə olunur. Bu köklər  $K$ -dan asılı olmadığından yerini dəyişmir.  $x$ -lar isə  $K \rightarrow \infty$  halında ya  $\bullet$  köklərinə və ya  $\infty$ -ğa yaxınlaşırlar.

**Misal 1.** Misal 5-də verilmiş ATS-ə baxaq. Bu halda xarakteristik tənlik

$$D(s) = 1 + W_A = 1 + K \frac{\tau s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s - 1)}.$$

Zaman sabitlərinin qiymətlərini nəzərə alsaq:

$$D(s) = 1 + K \frac{0.1s + 1}{0.025s^3 + 0.175s^2 + 0.05s - 1}.$$

Şəkil 1-də Matlab proqramını və köklər qodoqrafı göstərilmişdir.

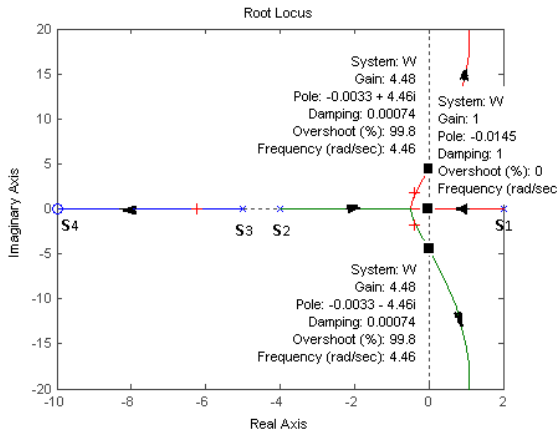
```

>> % MATLAB proqrami
>> % Kokler qodoqrafinin qurulmasi
>> p=[0.1 1];q=[0.025 0.175 0.05 -1];
>> W=tf(p,q);
>> rlocus(W),rlocfind(W)
Select a point in the graphics window

```

```
selected_point = -0.2038 - 1.8012i
```

```
ans = 1.5379
```



**Şəkil 1.** Köklər qodoqrafı

Göründüyü kimi,  $q(s) = 0$  polinomunun üç kökündən biri  $s_3$   $p(s) = 0$ -in yegənə  $s_4$  kökünə yığılır.  $K$ -nın həd qiymətlərini qodoqrafin xəyali ox ilə (dayanıqlıq sərhəddi) kəsişmə nöqtələrinə **sol klik** etməklə təqribi təyin etmək olar:  $1 < K < 4.57$ .

Həqiqi  $s_1$  və  $s_2$  kökləri  $K = 1$  qiymətindən 130nə kompleks qoşma köklərə çevrilərək sonsuzluğa gedirlər.

**rlocfind** funksiyasının köməyi ilə ilk anda ekranda meydana çıxmış çarpaz xətlərin kəsişmə nöqtəsinə klik etməklə  $K = 1.5379$  qiyməti seçilmişdir. Köklərin uyğun qiyməti trayektoriyaların üzərində  $+$  ilə işarə edilmişdir.

## § 2. D-bölmə üsulu

Fərz edək ki, qapalı ATS-in və ya ayrılıqda götürülmüş obyektin xarakteristik tənliyi aşağıdakı şəkildə verilmişdir:

$$D(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad a_0 = 1. \quad (1)$$

$a_i$  parametrləri dəyişdikdə  $s_i$  həqiqi köklərindən biri və ya bir cüt kompleks qoşma  $s = \alpha \pm j\omega$  kökü dayanıqlıq sərhəddi olan xəyali oxun üzərinə düşür. Xəyali oxun üzərində yerləşən köklər sıfır və ya sıfır xəyali  $s = \pm j\omega$  köklər olduğundan bu köklər ( $\omega = 0$  olduqda həqiqi  $s = 0$  sıfır kök) (1) tənliyini ödəməlidir. Onda

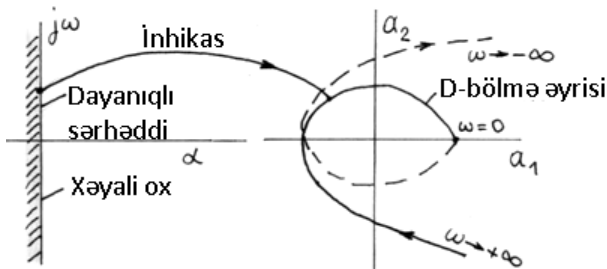
$$D(j\omega) = (j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2)$$

Bu ifadə  $n-1$  ölçülü parametrlər fəzasında xəyali  $\omega$  hissəsinin verilmiş qiymətində bir nöqtəyə uyğun gəlir. Xəyali oxun üzərində olan bütün kökləri nəzərə almaq üçün  $\omega$ -ni  $-\infty$ -dan  $+\infty$ -da qədər dəyişdirsək **D-bölmə hipersəthini** (iki  $a_1, a_2$  - parametri halında D-bölmə əyrisini) alarıq.

**D-bölmə əyrisi parametrlər müstəvisində dayanıqlıq sərhəddini ifadə edir.** D-bölmə əyrisi oxlarında  $a_1, a_2, \dots, a_n$  qeyd olunan parametrlər fəzasında qurulur.

D-bölmə üsulunun əsasını köklər müstəvisində dayanıqlıq sərhəddi olan xəyali oxun parametrlər müstəvisinə **inhikas etdirilməsi** təşkil edir.

Şəkil 2-də belə inhikas sxematik göstərilmişdir.



Şəkil 2. D-bölmə üsuluna aid

D-bölmə əyrisi parametrlər müstəvisini bir neçə oblasta bölür. Bunların hansının dayanıqlıq oblastı olmasını təyin etmək üçün əlavə tədqiqatlar aparmaq lazımdır:

1. D-bölmə əyrisini xüsusi qayda ilə ştrixləyərək dayanıqlığa namizəd oblast təyin edilir.

2. Belə oblastlar bir neçə olarsa, hər bir oblastdan götürülmüş bir nöqtədə dayanıqlıq yoxlanılır (məsələn, Hurvis kriterisinin köməyi ilə və həqiqi dayanıqlıq oblastı təyin olunur.

D-bölmə üsulu qrafoanalitik olduğundan bu üsuldən bir və ya iki parametərə görə dayanıqlıq oblastını təyin etmək üçün istifadə olunur. Bu halda D-bölmə yərisi müstəvidə qurulur.

**Bir parametərə görə D-bölmə.** Bu halda bir parametrenin dayanıqlığa təsiri araşdırılır. Bu parametri  $\nu$  ilə işarə edək. Fərz edək ki, bu parametir xarakteristik tənliyə xətti şəkildə daxildir:

$$D(s) = P(s) + \nu Q(s). \quad (3)$$

(3) ifadəsinə əsasən D-bölmə əyrisinin tənliyi:

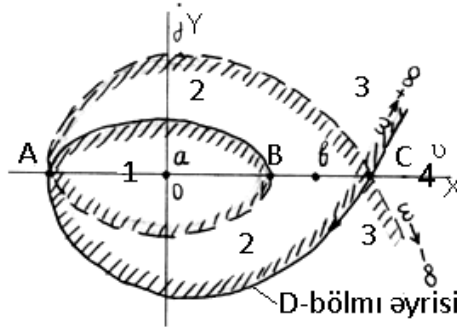
$$D(j\omega) = P(j\omega) + \nu Q(j\omega).$$

Buradan axtarılan parametir:

$$\nu = -\frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} = X(\omega) + jY(\omega), \quad -\infty < \omega < +\infty. \quad (4)$$

Parametir  $\nu$  həqiqi ədəd olduğundan kompleks kəmiyyətlərin bərabərliyi qaydasına əsasən  $\nu = X(\omega)$ . D-bölmə əyrisi  $\omega$ -ni  $-\infty$ -dan  $+\infty$ -ğa qədər dəyişdirərək  $(X, Y)$  müstəvisində qurulur.

Şəkil 3-də mümkün D-bölmə əyrisi göstərilmişdir.



**Şəkil 3.** Bir parametərə görə D-bölmə əyrisi

Göründüyü kimi, D-bölmə əyrisi müstəvini dörd oblasta ayırır.

**Ştrixləmə qaydası.** Köklər müstəvisinin xəyali oxunu  $\omega$ -nın artma istiqamətində **soldan** ştrixləsək dayanıqlı sistemin xarakteristik tənliyinin kökləri, sol tərəfdə qalacaqlar. D-bölmə əyrisi də analoji olaraq  $\omega$ -nın artma istiqamətində sol tərəfdən ştrixlənilir. Dayanıqlığa namizəd oblastlar ştrixləri daxilə yönələn oblastlardır (şəkil 3-də 1 və 2 oblastları).

**Dayanıqlıq oblastının təyini.** Bu oblastların hansının əsil dayanıqlıq oblastı olmasını təyin etmək üçün hər birinin daxilində yerləşən (sadəlik üçün, absis oxunun üzərində yerləşən)  $a$  və  $b$  nəzərat nöqtələrində dayanıqlığı yoxlamaq lazımdır. Bu məqsədlə bu nöqtələrin absisinə uyğun gələn  $v$  parametrinin qiymətini (3) xarakteristik tənliyində yerinə yazıb dayanıqlığı köklər və ya Hurvis üsulu ilə yoxlamaq lazımdır.

Əgər sistem  $a$  nöqtəsində dayanıqlı alınmışsa, onda  $v$ -nin dəyişmə intervalı (yəni, dayanıqlıq oblastı)  $\overline{AB}$  parçasıdır.

**Misal 2.** Qapalı ATS-in xarakteristik tənliyi aşağıdakı şəkildə verilmişdir:

$$(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1) + K = 0. \quad (5)$$

Burada  $K=v$  – axtarılan parametrdir. Bu halda

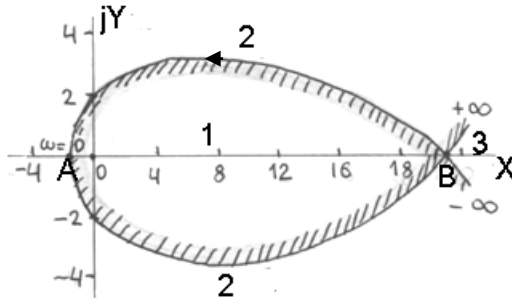
$$P(s) = (T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1), \quad Q(s) = 1.$$

Açıq sistemin K gücləndirmə əmsalı üçün dayanıqlıq intervalını təyin etmək tələb olunur, digər parametrlər (zaman sabitləri)  $T_1 = 0.5$  s,  $T_2 = 0.1$ ,  $T_3 = 1$  s. verilmişdir.

$s = j\omega$  əvəzləməsini (4.59)-da yerinə yazıb (4.58)-ə K-nı tapaq:

$$\begin{aligned} K &= -(0.5j\omega + 1)(0.1j\omega + 1)(j\omega + 1) = \\ &= (0.05\omega^2 - 1) + j(0.05\omega^3 - 1.6\omega) = X(\omega) + jY(\omega). \end{aligned}$$

$\omega$ -ya  $-20 \leq \omega \leq +20$  intervalında qiymətlər verərək şəkil 4-də göstərilən D-bölmə əyrisini qururuq.



**Şəkil 4.** Bir parametrlə görə D-bölmə əyrisi

D-bölmə əyrisi  $\omega$ -nın artma istiqamətində sol tərəfdən ştrixlənmişdir. Ştrixləri daxilə yönəlmiş yeganə oblast 1 oblastıdır. Burada K-nın dəyişmə intervalı  $-1 < K < 19.8$ .

Göstərilən oblastın doğrudan da dayanıqlıq oblastı olmasını yoxlayaq. Nəzərət nöqtəsi kimi koordinat başlanğıcını götürək. Burada  $K = 0$  qiymətini (5) xarakteristik tənliyində yerinə yazaq:

$$(0.5s + 1)(0.1s + 1)(s + 1) = 0.$$

Köklərin təyin edilməsi asan olduğundan dayanıqlığı yoxlamaq üçün köklər üsulundan istifadə etmək əlverişlidir. Köklər  $s_1 = -2$ ,  $s_2 = -10$ ,  $s_3 = -1$ . Hər üç kök sol kök olduğundan qapalı ATS  $K = 0$

nöqtəsində dayanıqlıdır. Deməli, ATS bütün  $-1 < K < 19.8$  intervalında da dayanıqlıdır.

Fiziki olaraq  $K > 0$  müsbət kəmiyyət olduğundan real dayanıqlıq intervalı  $0 < K < 19.8$ .

D-bölmə əyrisini Matlabda qurmaq əlverişlidir.

Şəkil 5-də uyğun proqram və D-bölmə əyrisi göstərilmişdir.

```
>> % MATLAB proqramı
>> % Dayanıqlıq oblast. təyini
>> % D-bölme usulu
>> w=-6:0.5:6; % Tezlik intervalı və addım
>> s=j.*w; % s=jw evezləməsi
>> T1=0.5;T2=0.1;T3=1; % Zaman sabitləri
>> P=(T1*s+1).*(T2*s+1).*(T3*s+1);
>> Q=1;
>> k=-P./Q;
>> X=real(k. '); % Həqiqi hissə
>> Y=imag(k. '); % Xeyli hissə
>> N=[w',X,Y] % Cap
```

	N =	
$\omega$	X	Y
-6.0000	22.4000	-1.2000
-5.5000	18.6625	0.4812
-5.0000	15.2500	1.7500
-4.5000	12.1625	2.6438
-4.0000	9.4000	3.2000
-3.5000	6.9625	3.4562
-3.0000	4.8500	3.4500
-2.5000	3.0625	3.2188
-2.0000	1.6000	2.8000
-1.5000	0.4625	2.2312
-1.0000	-0.3500	1.5500
-0.5000	-0.8375	0.7937



```

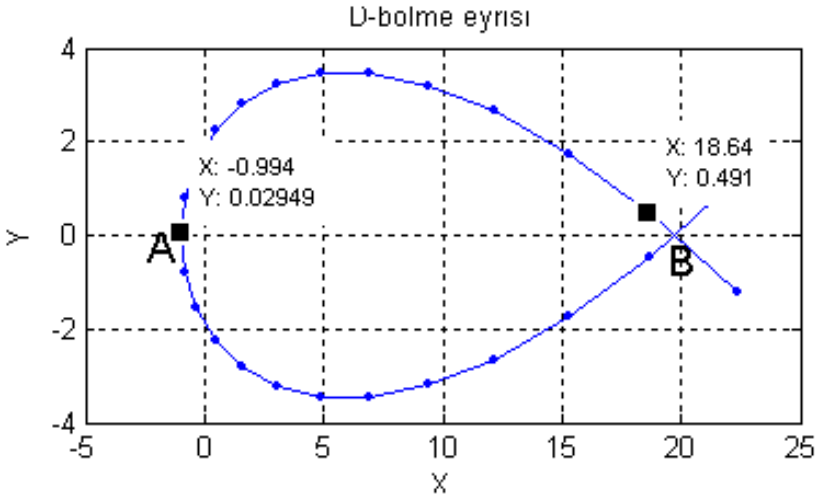
0 -1.0000 0
0.5000 -0.8375 -0.7937
1.0000 -0.3500 -1.5500
1.5000 0.4625 -2.2312
2.0000 1.6000 -2.8000
2.5000 3.0625 -3.2188
3.0000 4.8500 -3.4500
3.5000 6.9625 -3.4562
4.0000 9.4000 -3.2000
4.5000 12.1625 -2.6438
5.0000 15.2500 -1.7500
5.5000 18.6625 -0.4812
6.0000 22.4000 1.2000

```

```

>> plot(X,Y,'-'),grid,title('D-bolme eyrisi'),
>> xlabel('X'),ylabel('Y')

```



**Şekil 5.** D-bölmə əyrisinin qurulmasının Matlab proqramı

### § 3. Dayanıqlıq oblastının bərabərsizliklər sisteminin həlli əsasında təyini

Hurvis kriterisində dayanıqlıq şərtləri bərabərsizliklər şəklində olduğundan bu bərabərsizliklər sistemini həll edərək dayanıqlıq oblastını qurmaq olar. Bu halda dəyişən parametrlər qapalı ATS-in xarakteristik tənliyinə qeyri-xətti şəkildə də daxil ola bilər. Bərabərsizliklər sisteminin kompyüterdə həll proqramını əldə etmək üçün İnternetdən istifadə etmək olar. Bu əqsədlə, məsələn, **Yahoo, Matlab, LMI** əmrini daxil etmək olar.

Fərz edək ki, qapalı ATS-in xarakteristik polinomu sadələşdirildikdən sonra aşağıdakı şəklə gətirilmişdir:

$$D(s) = a_0(k)s^n + a_1(k)s^{n-1} + \dots + a_n(k). \quad (6)$$

Burada  $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)^T$  – dəyişən parametrlər vektorudur.

Bərabərsizliklər sistemi dayanıqlığın zəruri  $a_i > 0, i=1, \dots, n$ , və Hurvis kriterisinə əsasən  $H > 0$  şərtini ödəyən kafi  $F_j(a_0(k), \dots) > 0, j = 1, \dots, \ell$ , şərtlərindən təşkil olunur:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_0(k) > 0, \\ z_2 &= a_1(k) > 0, \\ &\dots\dots\dots \\ z_n &= a_n(k) > 0, \\ z_{n+1} &= F_1(a_0(k), a_1(k), \dots) > 0, \\ z_{n+2} &= F_2(a_0(k), a_1(k), \dots) > 0, \\ &\dots\dots\dots \\ z_{n+\ell} &= F_\ell(a_0(k), a_1(k), \dots) > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Dayanıqlıq oblastının sərhədlərini qurmaq üçün bərabərsizlikləri bərabərlik ilə əvəz edib  $k$ -nın dəyişmə  $\underline{k} \leq k \leq \bar{k}$  intervalında **sıfır səviyyə xətlərini** qurmaq lazımdır. Əyrilərin kəsişməsi nəticəsində D-bölmə üsulunda olduğu kimi bir-necə oblast alınır. Həqiqi oblastı təyin etmək üçün D-bölmə üsulunda olduğu kimi hər-bir oblastdan bir nöqtə  $a^*$  götürüb sadə üsullardan birinin köməyi ilə, məsələn, köklər üsulu-  $roots(a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$  ilə bu nöqtədə dayanıqlığı yoxlamaq lazımdır. Dayanıqlığın ödənilməsi oblast hıçığı oblastdır.

Səviyyə xətlərini qurmaq üçün **contour**(x,y,z,[h h]) Matlab funksiyasından istifadə etmək olar. Burada h səviyyə xəttinə uyğun qiymət olub baxılan məsələdə sıfır bərabərdir:  $h=0$ .

### 3.1. Bir parametərə görə dayanıqlıq oblastının tiyini

**Misal 3 .** Əvvəlki misala baxaq:

$$D(s) = (T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1) + k = 0.$$

Mötərizlələri açıdıqdan sonra (4.60) ifadəsi:

$$D(s) = a_0s + a_1s + a_2s + a_3.$$

$$a_0 = T_1T_2T_3,$$

$$a_1 = T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3,$$

$$a_2 = T_1 + T_2 + T_3,$$

$$a_3 = 1 + k,$$

$$T_1 = 0.5s, T_2 = 0.1s, T_3 = 1s.$$

Axtarılan parametri  $k = x$  işarə edək. Hurvis kriterisinə əsasən  $n=3$  halında dayanıqlığın kafi şərti:  $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$ .  $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$  olduğundan (4.61) sistemi:

$$z_1 = 1 + x > 0,$$

$$z_2 = F_1 = \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

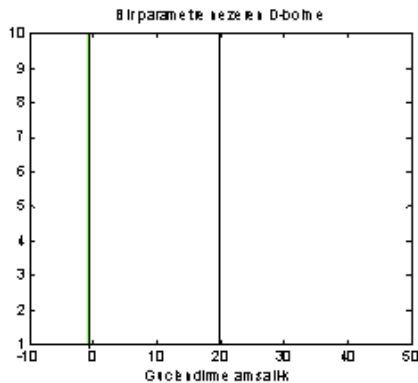
Bu sistem:  $1+x > 0$ ,  $0.99-0.05x > 0$ . Buradan:  $x > -1$ ,  $x < 19.8$ .

Və ya  $-1 < k < 19.8$ .

İndi **contour**(x,y,z[0 0]) funksiyasından istifadə edək.

Şəkil 6 -da Matlab proqramı və dayanıqlıq oblastı (bir parametr halında- intervalı ) göstərilmişdir.

```
>> % Bir parametre nezeren dayanıqlıq oblastinin teyini
% Melum parametrlerin qiymeti
T1=0.5;T2=0.1;T3=1;
% Emsallar
a0=T1*T2*T3;
a1=T1*T2+T1*T3+T2*T3;
a2=T1+T2+T3;
% Axtarilan parametrlerin qiymetler toru
[x,y]=meshgrid(-10:0.1:50,1:0.1:10);
>> a3=1+x;
% Funksiyalar
z1=1+x;|
z2=a1*a2-a0*a3;
contour(x,y,z1,[0 0]);
>> hold on ,contour(x,y,z2,[0 0]);
>> xlabel('Guclendirmə əmsali-k');
>> title('Bir parametre nezeren D-bolme');
```



**Şəkil 6.** Bir parametərə görə dayanıqlıq oblastının qurulması

*contour(.)* fuksiyasında  $z$  ikiölçülü massiv olduğundan  $y$  fiktiv dəyişəni əlavə olunmuşdur. Şəkildən görüldüyü kimi, aötarılan dayanıqlıq intervalı  $-1 < k < 19.8$  iki vertikal xətlə ayrılmışdır.

### 3.2. İki parametərə görə dayanıqlıq oblastının qurulması

**Misal 4.** Fərz edək ki, qapalı ATS-in xarakteristik polinomu aşağıdakı şəkildə verilmişdir:

$$D(s) = Ts^4 + (2T + 1)s^3 + (2T + 2)s^2 + 2s + k.$$

İki- zaman sabiti  $T=x$  və gücləndirmə əmsalı  $k=y$  görə dayanıqlıq oblastının qurulması tələb olunur.

Bu halda:

$$a_0 = T,$$

$$a_1 = 2T + 1,$$

$$a_2 = 2T + 2,$$

$$a_3 = 2,$$

$$a_4 = k.$$

Parametrlər  $T > 0$ ,  $k > 0$  olduğundan zəruri  $a_i > 0$  şərtlərinin hamısı ödənilir. Bu səbəbdən zəruri şərtlər üçün  $z_i$  funksiyalarından istifadə etməmək olar.  $T$  və  $k$  parametrlərini müsbət intervalda daxil etmək kifayətdir, məsələn, 0-10 intervalında.

$n=4$  olduğundan Hurvis kriterisinə görə zəruri şərt:

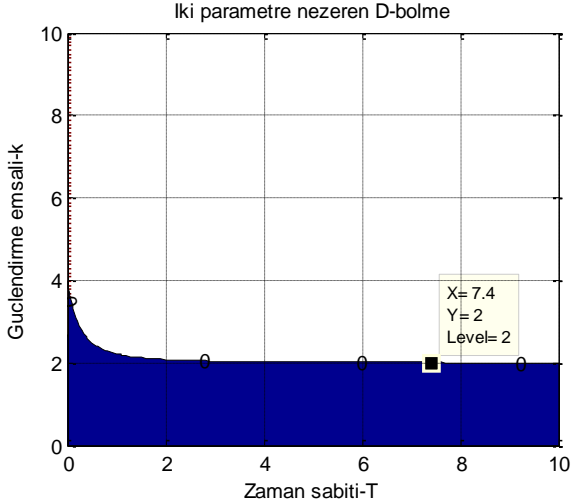
$$z = F = \Delta_3 = a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0.$$

Şəkil 7– də Matlab proqramı və dayanıqlıq oblastı göstərilmişdir.

```

>> % Iki parametre nezeren dayanikliq oblastinin teyi
>> [x,y]=meshgrid(0:0.1:10,0:0.1:10);
>> % Emsallar
>> a0=x;
>> a1=2*x+1;
>> a2=2*x+2;
>> a3=2;
>> a4=y;
>> % Funksiyalar
>> z1=a0;
>> z2=a4;
>> z3=a3*(a1.*a2-a0*a3)-a1.^2.*a4;
>> contour(x,y,z1,[0 0]);
>>
>> hold on ,contour(x,y,z2,[0 0]);
>> hold on ,[c,h]=contourf(x,y,z3,[0 0]);
>> set(h,'showtext','on'); % Seviyyenin (serheddin) qiymet:
>> %cap olunmasi (; isaresini legv etmekle)
>> title('Iki parametre nezeren D-bolme')grid; %Tor
>> title('Iki parametre nezeren D-bolme');grid; %Tor
>> xlabel('Zaman sabiti-T');
>> ylabel('Guclendirme emsali-k');

```



**Şəkil 7.** İki parametrə görə dayanıqlıq oblastının qurulması

Rənglənmiş dayanıqlıq oblastına əsasən parametrlər  $0 < T < \infty$  ,  $0 < k < 4$  intervalında dəyişə bilər.

## § 4. Biləvasitə bərabərsizliklər sisteminin həllinə əsaslanan üsul

Fərz edək ki, qapalı sistemin (və ya obyektin) xarakteristik polinomu aşağıdakı şəkildə verilmişdir:

$$D(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n.$$

Hurvis dayanıqlıq kriterisinə əsasən bu ifadə ilə yazılan sistemin dayanıqlı olması üçün  $H$  matrisi müsbət müəyyən matris olmalıdır:  $H > 0$ . Əvvəldə qeyd olunduğu kimi (§4.5.1) bu şərtin ödənilməsi üçün  $H$  matrisinin diaqonal təyinediciləri sıfırdan böyük olmalıdır:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \dots, \Delta_n = |H| \Delta_{n-1}.$$

Bu ifadə cəbri bərabərsizliklər sistemini təşkil edir.  
 $n \leq 4$  üçün dayanıqlıq şərti bir bərabərsizliyə gətirilə bilər.  
 Məsələn,  $n=4$  halında bu bərabərsizlik:

$$\Delta_4 = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0, \quad a_i > 0, \quad i = \overline{0,4}.$$

Qeyri xətti cəbri bərabərsizliklər sistemini həll edə bilsək dayanıqlıq oblastını təyin edə bilərik. Lakin «birqiymətli» nəticə almaq üçün bəzi  $a_i$  parametrlərinin qiyməti verilməlidir. Bu tələbat adətən praktikada özünü doğruldur. Belə ki, əksər hallarda bir və ya iki parametərə görə dayanıqlıq oblastını təyin etmək kifayət edir.

**Misal 5.** Qapalı ATS-in xarakteristik tənliyi:

$$D(s) = 1 + W_A = 0, \quad W_A = W_T W_{ob}.$$

Tənzimləyici: 
$$W_T = \frac{s+a}{s+1}, \quad a > 0.$$

Obyekti: 
$$W_{ob} = \frac{K}{s(s+2)(s+5)}, \quad K > 0.$$

Onda xarakteristik tənlik:

$$D(s) = 1 + \frac{K(s+a)}{s(s+1)(s+2)(s+5)}.$$

Buradan:

$$D(s) = s(s+1)(s+2)(s+5) + K(s+a) = 0$$

və ya 
$$D(s) = s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (K+10)s + Ka = 0.$$

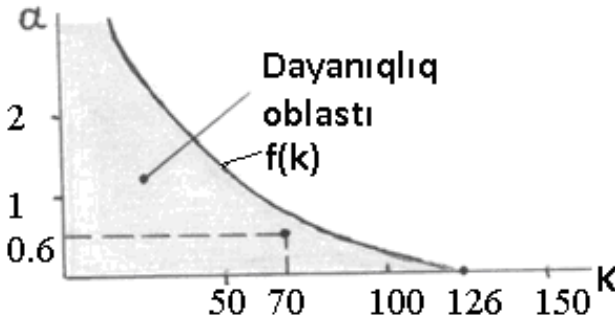
Burada:  $a_0 = 1, a_1 = 8, a_2 = 17, a_3 = K+10, a_4 = Ka.$   
 $n = 4$  üçün Hurvis kriterisi,  $\Delta_3 > 0.$



$$-(K + 10)^2 + 136(K + 10) - 64Ka > 0.$$

Bu bərabərsizliyi analitik yolla həll etməyib parametrlərin həd qiymətlərindən istifadə edək.

1.  $a = 0$  olanda  $0 < K < 126$ .
  2.  $K = 0$  olanda  $0 < a < \infty$ .
  3. Sərhəd əyrisi  $a = (-K^2 + 116K + 1260)/64K = f(K)$ .
- Şəkil 8-də iki parametrə görə dayanıqlıq oblastı göstərilmişdir.



**Şəkil 8.** İki parametrə görə dayanıqlıq oblastı

Xətti dəyişən  $g = At$  tapşırıq signalı halında qərarlaşmış (statik) xəta:

$$\Delta_s = A/K_v,$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s W_T W_{ob} = Ka/10.$$

Beləliklə:

$$\Delta_s = \frac{10A}{Ka}.$$

Göründüyü kimi, statik xəta  $Ka$  hasilindən asılıdır.  $Ka = 42$  götürsək  $\Delta_s = 23,8\%$  almaq olar. Əgər bu xəta qənaətbəxşdirsə  $K$  və  $a$ -nın  $Ka = 42$  təmin edən elə qiymətlərini seçmək lazımdır ki, bu nöqtə dayanıqlıq sərhəddindən «uzaqda» yerləşsin. Məsələn,  $K = 70$ ,  $a = 0,6$ .

**Misal 6.** Ötürmə funksiyası aşağıda verilmiş açıq ATS-in gücləndirmə əmsalının həd qiymətini tapın:

$$W_A = \frac{K(\tau s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s - 1)}.$$

Zaman sabitləri:  $T_1 = 0.2$  s,  $T_2 = 0.25$  s,  $T_3 = 0.5$  s,  $\tau = 0.1$  s.

Qapalı ATS-in ötürmə funksiyası:

$$W_Q = \frac{W_A}{1 + W_A}.$$

Qapalı ATS-in xarakteristik polinomu:

$$D(s) = T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_3 + T_2 T_3 - T_1 T_2) s^2 + (T_3 - T_1 - T_2 + K\tau) s + (K-1)$$

və ya konkret qiymətlərdə:

$$D(s) = 0.025s^3 + 0.175s^2 + (0.1K + 0.05)s + (K-1) = a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3.$$

Dayanıqsızlığın zəruri şərtinə əsasən:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0.$$

Hurvis kriterisinə əsasən  $n = 3$  halında:

$$\Delta_3 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Beləliklə,  $K$ -ni təyin etmək üçün üç bərabərsizlikdən ibarət bərabərsizliklər sistemi alırıq:

$$0.1K + 0.05 > 0 \Rightarrow K > -0.5,$$

$$K - 1 > 0, \Rightarrow K > 1,$$

$$0.175(0.1K + 0.05) - 0.025(K-1) > 0 \Rightarrow K < 4.5.$$

$K$  müsbət kəmiyyət olduğundan  $1 < K < 4.5$  intervalında qapalı ATS dayanıqlı olacaqdır.

## § 5. Parametrik məhdudiyətlər olduqda dayanıqlığın təyini. Xaritonov teoremi

Əksər praktiki hallarda sistemin parametrlərinin yalnız hədd qiymətləri məlum olur. Bu hala uyğun xarakteristik tənlik aşağıdakı şəkildə verilir:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Xaritonovun *robast dayanıqlıq teoreminə* əsasən (8) sistemi o vaxt dayanıqlıdır ki, aşağıdakı əmsallara malik olan **dörd sayda** ən “təhlükəli” polinomlar dayanıqlı olsun:

$$1. (\bar{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \underline{a}_5, \underline{a}_6, \bar{a}_7, \dots), \quad (9)$$

$$2. (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \bar{a}_4, \underline{a}_5, \underline{a}_6, \underline{a}_7, \dots), \quad (10)$$

$$3. (\underline{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \bar{a}_5, \bar{a}_6, \underline{a}_7, \dots), \quad (11)$$

$$4. (\underline{a}_0, \underline{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5, \bar{a}_6, \bar{a}_7, \dots), \quad (12)$$

$n=3$  halında yalnız bir  $D(s) = \bar{a}_0 s^n + \underline{a}_1 s^{n-1} + \underline{a}_2 s + \bar{a}_3$  polinomunu yoxlamaq (məsələn, köklər üsulu və ya Hurvis dayanıqlıq kriterisinin köməyi ilə) kifayətdir.

$n=4$  olduqda iki: (9) və (10),  $n=5$  halı üçün üç: (9), (10) və (11),  $n \geq 6$  halı üçün isə bütün dörd: (9)-(12) polinomlarını dayanıqlığa yoxlamaq lazımdır.

**Misal 7.** Açıq ATS-in ötürmə funksiyası:

$$W_A(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Parametrlərin nominal qiyməti:  $k=4$ ,  $T_1=1$  s.,  $T_2=0.5$  s.

Parametrlər  $3 \leq k \leq 5$ ,  $0.6 \leq T_1 \leq 1.5$ ,  $0.2 \leq T_2 \leq 0.7$  intervalında dəyişərsə qapalı ATS –in dayanıqlığını yoxlamaq tələb olunur.

Qapalı ATS-in ötürmə funksiyası:

$$W_Q(s) = \frac{W_A}{1 + W_A} = \frac{k}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}.$$

Burada  $a_0 = T_1 T_2$ ,  $a_1 = T_1 + T_2$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = k$ . Parametrlərin dəyişmə intervalı

$$0.12 \leq a_0 \leq 1.05, 0.8 \leq a_1 \leq 2.2, a_2 = 1, 3 \leq a_3 \leq 5. n=3$$

olduğundan

$$D(s) = \bar{a}_0 s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \bar{a}_2 s + \bar{a}_3 = 1.05s^3 + 0.8s^2 + 1 \cdot s + 5 = 0$$

xarakteristik tənliyi üçün Hurvis dayanıqlıq  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$  şərtini yoxlamaq kifayətdir. Bu şərt ödənilmədiyindən, yəni  $-4.45 < 0$  olduğundan qapalı ATS parametrlərin verilmiş dəyişmə intervalında dayanıqsız rejimə düşə bilər.

## § 6. Struktur dayanıqsızlıq

**Tərif. Əgər sistemin parametrlərinin qiymətini (işarəsini yox!) dəyişməklə onu dayanıqlı hala gətirmək mümkün deyilsə, belə sistemlər struktur dayanıqsız sistemlər adlanır.**

Struktur dayanıqsız sistemləri dayanıqlı etmək üçün sistemə yeni manqalar və əlaqələr daxil etmək, yəni ATS-in strukturunu dəyişmək lazımdır.

Fərz edək ki, birölçülü açıq ATS-in ötürmə funksiyası:

$$W_A(s) = \frac{M_A(s)}{D_A(s)}.$$

Uyğun qapalı ATS-in ötürmə funksiyası:

$$W_Q(s) = \frac{W_A}{1 + W_A} = \frac{M_A(s)}{D_A(s) + M_A(s)} = \frac{M(s)}{D(s)}. \quad (13)$$

Rus alimi M.A.Ayzerman 1965-ci ildə birölçülü ATS-in struktur dayanıqsızlıq şərtlərini təklif etmişdir.

*Əgər  $m \geq v + \ell - 1$  və cədvəl 4.4-də verilmiş şərtlərdən biri pozularsa, birölçülü ATS struktur dayanıqsızdır.*

#### Cədvəl 4 Struktur dayanıqsızlığı yoxlamaq üçün bərabərsizliklər

f	$m = 0$	$m > 0$ , cüt	$m > 0$ , tək
Cüt	$n + m > 4r$	$n + m > 4r - 1$	$n + m > 4r - 2$
Tək	$n + m > 4r$	$n + m > 4r$	$n + m > 4r + 1$

Burada:

- $n$  və  $m$  - uyğun olaraq açıq ATS-in ötürmə funksiyasındakı məxrəc  $D_A(s)$  və sürətdəki  $M_A(s)$  polinomlarının tərtibi;
- $v$ ,  $\ell$  -  $D(s)$  polinomunun sıfır və müsbət köklərinin sayı;
- $f$  -  $D(s)$  polinomunun müsbət və ya sıfır həqiqi hissələri olan kompleks köklərinin sayı;
- $r - f/2$  kəsrinin tam hissəsi.

Bu metodika  $M_A(s) = 0$  tənliyinin sağ kökləri (yəni müsbət həqiqi hissəyə malik olan köklər) olmayan halı əhatə edir. Başqa sözlə, açıq ATS **minimal** – **fazalı** bənd olmalıdır.

Xüsusi hallar:

1. Əgər açıq ATS-in ötürmə funksiyasının sürəti  $M_A = K$  olarsa, onda uyğun qapalı sistemin dayanıqlı olması üçün  $m = 0$  olduğundan aşağıdakı bərabərsizliklərin ödənilməsi kifayətdir:

$$v + \ell \leq 1, n > 4r. \quad (14.4.64)$$

2. Əgər  $M_A = K(\tau s + 1)$  olarsa, qapalı sistemin dayanıqlı olması üçün aşağıdakı şərtlər ödənilməlidir:

$$\begin{cases} v + \ell \leq 2, n > 4r - 3, f \text{ cüt olanda,} \\ v + \ell \leq 2, n > 4r, f \text{ tek olanda.} \end{cases}$$

3. Əgər  $M_A = K(b_0s^2 + b_1s + 1)$  olarsa, qapalı ATS-in dayanıqlı olması üçün aşağıdakı şərtlər ödənilməlidir:

$$\begin{cases} \nu + \ell \leq 3, & n > 4r - 2, & f \text{ cüt olanda,} \\ \nu + \ell \leq 3, & n > 4r - 1, & f \text{ tek olanda.} \end{cases}$$

**Misal 8.** Gücləndirici  $W_1=K$ , interqallayıcı – ətalətli  $W_2=1/[s(T_1s+1)]$  və konservativ  $W_3=1/(T_2^2s^2 + 1)$  manqaların ardıcıl birləşməsindən ibarət olan birölçülü ATS-in dayanıqlığını yoxlayaq.

Açıq ATS-in ötürmə funksiyası:

$$W_A = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2^2s^2 + 1)} = \frac{M_A(s)}{D_A(s)}.$$

$M_A = K$  olduğundan 1-ci xüsusi haldan istifadə edək.  $D_A(s)$  polinomu 4-cü tərtib olub bir sıfır bir mənfi həqiqi və iki sıfır xəyali köklərə malikdir. Deməli:  $n = 4$ ,  $\nu = 1$ ,  $\ell = 0$ ,  $f = 2$  cüt. Buradan  $r = f/2 = 1$ . (4.64) şərtlərinə əsasən:  $1 \leq 2$ ,  $4 > 4$ . İkinci şərt ödənilmədiyindən qapalı ATS struktur dayanıqsızdır.

Alınmış nəticəni yoxlamaq üçün (13) ifadəsinə əsasən qapalı ATS-in xarakteristik tənliyini tapaq:

$$D(s) = T_1T_2^2s^4 + T_2^2s^3 + s + K = 0.$$

$n = 4$  halında Hurvis kriteisinə əsasən dayanıqlıq şərti:

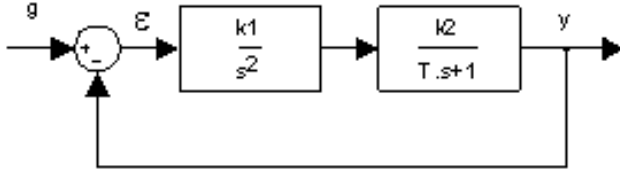
$$T_2^2T_1 > T_1T_2^2 + (T_2^2)^2K$$

və ya  $T_2^4K < 0$ .

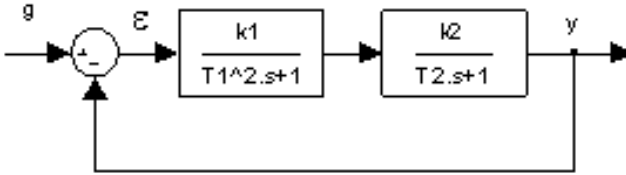
Açıq ATS-in gücləndirmə əmsalı  $K > 0$  olduğundan onun qiymətini dəyişməklə alınmış bərabərsizliyi təmin etmək mümkün deyil. Deməli, tərifə əsasən qapalı ATS həqiqətən struktur dayanıqsızdır.

**Misal 9.** Şəkil 9,avə b-də göstərilən qapalı ATS-lərin struktur dayanıqsız olmasını  $D(s)=0$  xarakteristik tənliyi təhlil etməklə

aydınlaşdırın.



a)



b)

**Şəkil 9.** Struktur dayanıqsız ATS-lər

İfadə (13)-a əsasən 1-ci ATS-in xarakteristik tənliyi:

$$D(s) = Ts^3 + s^2 + k_1k_2 = 0.$$

s-in əmsalı sıfır olduğundan dayanıqlığın zəruri şərti ödənilmir və deməli sistem struktur dayanıqsızdır.

2-ci ATS üçün:

$$D(s) = T_1^2T_2s^3 + T_1^2s^2 + T_2s + k_1k_2 + 1 = 0.$$

Bu halda dayanıqlığın zəruri şərti ödənilir. Bu səbəbdən əlavə tədqiqat aparmaq lazımdır. n = 3 halında Hurvis dayanıqlıq şərti:

$$a_1a_2 - a_0a_3 = T_1^2T_2 - T_1^2T_2(k_1k_2 + 1) > 0$$

və ya  $T_1^2T_2k_1k_2 > 0$ .

Parametrlər müsbət kəmiyyət olduğundan bu şərti onların istənilən qiymətlərində təmin etmək mümkün deyil. Bu ziddiyət ikinci ATS-in də struktur dayanıqsız olduğunu göstərir.

## Çalışmalar

**1. Hurvis və Raus kriterilərinin** köməyi ilə aşağıdakı xarakteristik polinoma malik olan obyektlərin dayanıqlığını tədqiq edin:

1.  $s^2 + 5s + 2$
2.  $s^3 + 4s^2 + 6s + 6$
3.  $s^3 + 2s^2 - 4s + 20$
4.  $s^3 + 9s^2 + 26s + 24$
5.  $s^4 + s^3 + 2s^2 + 10s + 8$

Matlab programından istifadə edin

6.  $0.006s^5 + 0.16s^4 + 1.25s^3 + 5s^2 + 50s + 300$
7.  $s^6 + 9s^5 + 31.26s^4 + 61.25s^3 + 67.75s^2 + 14.75s + 15$

Əlavə olaraq **roots(p)** funksiyasının köməyi ilə kökləri tapın.

Cavab:  $s_1 = -3$ ,  $s_2 = -4$ ,  $s_{3,4} = -1 \pm 2j$ ,  $s_{5,6} = \pm 0.5j$ .

Sistem rəqsi dayanıqlıq sərhəddindədir. Niyə?

**2. Aşağıdakı obyektlərin** dayanıqlığını **köklər üsulu** ilə təyin edin:

1.  $dx/dt = Ax$ ,

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -16 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matlabda A matrisini daxil etdikdən sonra **p = poly(A)** və **roots(p)** funksiyalarından istifadə edin.

Cavab:  $s_1 = -5.086$ ,  $s_2 = -2.428$ ,  $s_3 = -0.486$ . Obyekt dayanıqlıdır.

2. Açıq sistemin ötürmə funksiyası:

$$W_A = \frac{20}{(s+1)(s+3)(s+6)}.$$

3. Qapalı ATS-in xarakteristik tənliyi:

$$D(s) = s^4 + 9.5s^3 + 30.5s^2 + 37s + 12$$



### 3. Parametrlərin dayanıqlığa təsiri:

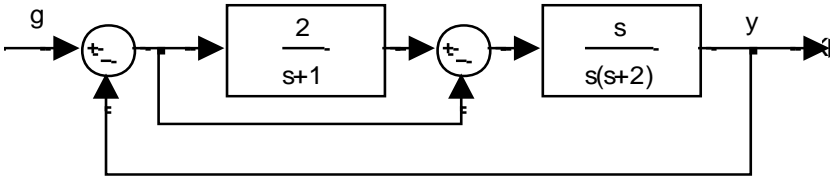
1. Qapalı sistemin xarakteristik tənliyi:

$$s^3 + 3Ks^2 + (2 + K)s + 5 = 0$$

K parametrlərinin sistemin dayanıqlığını təmin edən dəyişmə intervalını üç üsuldən biri ilə təyin edin.

Cavab:  $K > 0.63$ .

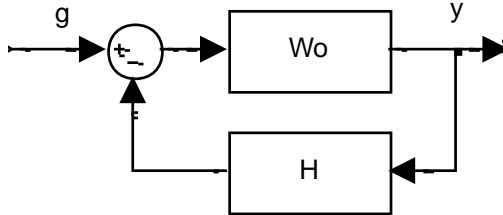
2. Şəkil 1-də göstərilən ATS-in dayanıqlığını təmin edən K parametrlərinin dəyişmə intervalını tapın.



Şəkil 1

Cavab:  $0 < K < 1.5$ .

4. Şəkil 2-də göstərilmiş ATS-in dayanıqlığını təmin edən K parametrlərinin dəyişmə intervalını contour(.) funksiyasının köməyi ilə Matlab proqramından istifadə edərək təyin edin.



Şəkil 2

$$W_0 = \frac{K(s+40)}{s(s+10)}, \quad H = \frac{1}{s+20}$$

4. Açıq ATS-in ötürmə funksiyası

$$W_A = \frac{K(s^2 - s + 2)}{s^2 + 2s + 1}.$$

Matlabın köməyi ilə  $K = 1, 2$  və  $5$  qiymətlərində qapalı ATS-in  $D(s)$  xarakteristik tənliyinin köklərini tapın.  $K$ -nın hansı qiymətində qapalı ATS dayanıqlıdır? Aşağıdakı fraqmentdən istifadə edin:

```
>>K = [1 2 5];
>> for i = 1:3
D = [d K(i)];
% d – D-nin əmsalları
p = (:,i) = roots(D)
end
```

#### 4. Tezlik dayanıqlıq kriteriləri

1. Açıq ATS-in  $W_A$  ötürmə funksiyaları:

a)  $\frac{s+2}{s(s+1)}$ ,    b)  $\frac{1}{s(s+1)} e^{-0.5s}$ ,    c)  $\frac{1}{s^2+4}$ ,

q)  $\frac{4}{s(s^2+s+1)}$ ,    d)  $\frac{s^2+4}{(s+1)^3}$ ,    e)  $\frac{8}{(s-1)(s+2)(s-3)}$

1.1. Hər bir hal üçün qapalı ATS-in xarakteristik polinomunu tapıb Matlabın köməyi ilə Mixaylov qodoqrafını qurun. Dayanıqlığı təyin edin.

1.2. Naykvist diaqramını qurub dayanıqlığı və dayanıqlıq ehtiyatlarını təyin edin.

2. Açıq ATS-in ötürmə funksiyası:

$$W_A = \frac{8(s+\alpha)}{s}.$$

$\alpha \in [0, \infty)$  intervalında qapalı ATS-in qütüblərinin dəyişməsini köklər qodoqrafının köməyi ilə təyin edib, dayanıqlıq haqqında nəticə çıxarın.

## İstifadə olunan Matlab funksiyaları

<b>det</b>	– matrisin determinantının hesablanması.
<b>eig</b>	– matrisin xarakteristik ədədlərinin təyini.
<b>lyap</b>	– Lyapunov cəbri matris tənliyinin həlli.
<b>pole</b>	– ötürmə funksiyasının qütüblərinin (xarakteristik tənliyinin kökləri) təyini.
<b>roots</b>	– polinomun (xarakteristik tənliyin) köklərinin təyini.
<b>pzmap</b>	– ötürmə funksiyasının qütüb və sıfırlarının köklər müstəvisində yerləşmə sxemi.
<b>int</b>	– inteqralın hesablanması.
<b>lsim</b>	– diferensial tənliyin həlli.
<b>limit</b>	– funksiyanın son qiymətinin hesablanması.
<b>step</b>	– keçid xarakteristikasının qurulması.
<b>impulse</b>	– çəki xarakteristikasının qurulması.
<b>nyquist</b>	– amplitud-faz tezlik xarakteristikasının (AFTX) qurulması.
<b>margin</b>	– dayanıqlıq ehtiyatlarının hesablanması.
<b>bode</b>	– loqoritmik ATX və FTX-nin qurulması.
<b>nichols</b>	– Nikols diaqramının qurulması.
<b>rlocus</b>	– köklər hodoqrafının qurulması.
<b>contour</b>	– səviyyə xətlərinin qurulması

## Əsas anlayışlar və təriflər

- 1. Dayanıqlıq** – xarici qüvvələrin təsiri kəsildikdən sonra dinamik obyektin (sistemin) öz əvvəlki tarazlıq vəziyyətinə qayıda bilmək xüsusiyyəti.
- 2. Praktiki dayanıqlı obyekt** – giriş signalının kiçik dəyişməsinə məhdud reaksiya göstərən obyekt.
- 3. Dayanıqlığın təyini** – nəzəri tədqiqatlarda obyektin dayanıqlığı onun hərəkəti xarakterizə edən bircins tənliyinin sifra bərabər olmayan başlanğıc şərtlərində həlli əsasında təyin olunur. Diferensial tənlik və ya ötürmə funksiyasından istifadə olunur.
- 4. Tarazlıq vəziyyəti** – obyektin diferensial tənliyində törəmələrin (sürət, təcil,...) sifra bərabər olduğu nöqtə. Tarazlıq vəziyyəti üç tip olur: dayanıqlı, dayanıqsız və neytral tarazlıq vəziyyəti.
- 5. Dinamik obyekt** – girişinə signal verdikdə çıxışında keçid prosesi baş verən obyekt.
- 6. Dayanıqlıq sərhəddi (Neytral obyektlər)** – üç tip olur: aperiodik və rəqsi dayanıqlıq sərhəddi. Hər iki halda obyektin xarakteristik tənliyin kökləri içərisində həqiqi hissələri sifra bərabər olan köklər mövcud olur. Digərləri isə dayanıqlı (yəni  $\text{Re}(s_i) < 0$ ) köklərdir. Birinci halda sıfır kök (köklər), ikinci halda isə sırf xəyali köklər uyğun gəlir. Belə köklər köklər müstəvisində ( $s$ -müstəvisi) dayanıqlıq sərhəddi olan ordinat oxunda yerləşir.
- 7. Lyapunovun birinci üsulu** – başlanğıc vəziyyətləri müxtəlif olan iki trayektoriyanın (bircins differensial tənliyin müxtəlif başlanğıc şərtlərdə və girişlər sıfır olduqda həlli) zaman artdıqca biri-birinə sonsuz yaxınlaşmasına əsaslanır.
- 8. Lyapunovun ikinci (birbaşa) üsulu** – müsbət müəyyən energetik funksiyanın (Lyapunov funksiyası) törəməsinin (sürətinin) obyektin trayektoriyası üzrə mənfi olmasına (azalmasına) əsaslanır.

**9. Qlobal dayanıqlıq**- obyektin istənilən başlanğıc vəziyyətdən dayanıqlı olması, yəni tarazlıq vəziyyətinə gələ bilməsi.

**10. Asimptotik dayanıqlıq**- obyektin tarazlıq vəziyyətinə sonsuz vaxta çatması.

**11. Dayanıqlığın zəruri şərti** – obyektin xarakteristik tənliyinin bütün əmsalları müsbət kəmiyyət olmalıdır.

**12. Köklər üsulu** – obyektin dayanıqlı olması üçün xarakteristik tənliyin bütün köklərinin həqiqi hissələri sıfırdan böyük olmalıdır, yəni sol köklər olmalıdır.

**13. Dayanıqlıq kriteriləri** – obyektin differensial tənliyini bilavasitə həll etmədən əmsallar arasındakı münasibətlərin və ya tezlik xarakteristikalarının  $(1;j0)$  nöqtəsinə əsasən vəziyyətinin təhlilinə əsaslanan qaydalar.

**14. Cəbri dayanıqlıq kriteriləri** – Hurvis və Raus kriteriləri. Hurvis kriterisi xarakteristik tənliyin əmsallarından tərtib olunmuş bərabərsizliklər sisteminin yoxlanılmasına əsaslanır. Raus cədvəlinin birinci sütunundakı elementlərin işarəsinin dəyişmələrinin sayı sağ (dayanıqsız) köklərin sayına bərabərdir.

**15. Hurvis matrisi** – xarakteristik ədədlərinin həqiqi hissələri sıfırdan kiçik olan matris. Uyğun xarakteristik tənliyin kökləri sol köklərdir.

**16. Silvestr şərti** – matrisin müsbət müəyyən (mənfi müəyyən) olması üçün onun diaqonal minorları sıfırdan böyük (kiçik) olmalıdır.

**17. Tezlik dayanıqlıq kriteriləri** – qrafoanalitik kriterilər olub kompleks dəyişənlər nəzəriyyəsindən məlum olan arqument prinsipinə əsaslanır. Bu prinsip  $\omega$  tezliyinin  $0 < \omega < +\infty$  intervalda dəyişdikdə kompleks polinomun arqumentinin (bucağının) dəyişməsinin onun sol və sağ köklərinin sayı arasındakı asılılığı müəyyən edir. Mixaylov kriterisində bu kompleks polinom qapalı ATS-in xarakteristik polinomu,

Naykvist kriterisində isə açıq ATS-in ötürmə funksiyasından bir vahid fərqlənən köməkçi funksiyadır.

**18. Dayanıqlıq ehtiyatları** – iki növ dayanıqlıq ehtiyatından istifadə olunur: Modula görə dayanıqlıq ehtiyatı; fazaya görə dayanıqlıq ehtiyatı.

**19. Modula görə dayanıqlıq ehtiyatı** – sistemin dayanıqlıq sərhəddinə çatana qədər gücləndirmə əmsalının neçə dəfə artırmaq mümkün olduğunu xarakterizə edir.

**20. Fazaya görə dayanıqlıq ehtiyatı** – sistemin dayanıqlıq sərhəddinə çatana qədər nə qədər mənfi faza gecikməsi ala biləcəyinin mümkün olduğunu xarakterizə edir;

**21. Kritik gecikmə** – sistemin dayanıqlıq sərhəddinə çatana qədər idarə kanalında siqnalın ləngiməsinin nə qədər artırıla bilməsinin mümkün-lüyünü xarakterizə edir.

**22. Dayanıqlıq oblasti** – sistemin dayanıqlılığının təmin olunduğu parametrlərin dəyişmə oblasti;

**23. Struktur dayanıqsızlıq** – parametrlərinin qiymətini (işarəsini yox!) dəyişməklə dayanıqlı hala gətirmək mümkün olmayan sistem.

## Ədəbiyyat

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М-Л., Гостехиздат, 1950.
2. Abdullayev Ə.Ə. Avtomatik tənzimləmə. Dərs vəsaiti, 2-ci nəşr. Bakı: Maarif, 1972, 472 s.
3. Əliyev R.Ə. Avtomatik idarəetmə. Ali texniki məktəblər üçün dərslik. Bakı, Maarif, 1993, 622 s.
4. Əliyev R.Ə. Əliyev R.R. Avtomatik idarəetmə nəzəriyyəsi. Ali texniki məktəblər üçün dərslik. Bakı, Maarif, 2007.
5. Əfəndizadə A.Ə. Avtomatik idarəetmə nəzəriyyəsi. Dərs vəsaiti. Bakı, Maarif, 1981, 350 s.
6. İbrahimov İ.Ə., Xasməmmədov F.İ., Kərimov C.K., abas oğlu X. Avtomatik tənzimləmə nəzəriyyəsinin əsasları və istehsal proseslərinin avtomatlaşdırılması. Dərs vəsaiti, Bakı, Maarif, 1987, 386 s.
7. Автоматизация настройки систем управления / Под ред. В.Я. Ротача. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 272с.
8. Rüstəmov Q.Ə. Avtomatik tənzimləmə nəzəriyyəsi. 1-ci hissə, 2003, 404 s.
9. Rüstəmov Q.Ə. Avtomatik tənzimləmə nəzəriyyəsi. 2-ci hissə, 2006, 532 s.
10. Rüstəmov Q.Ə. Avtomatik tənzimləmə nəzəriyyəsi: Matlab Simulinkdə modelləşdirmə. Bakı, 2012, 750 s.
11. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981 с.37-50.
12. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984, 272 с.
13. Бессекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Гл.ред. физико-математической литературы, 1972, 768

- 14.Брайсон А., Хо Ю.ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972, 554 с.
- 15.Seyidov M.İ., Qardaşova L.A., Səlimov V.H. Kompüter riya ziyyatı. Metodik vəsait, Bakı, “Təhsil” EİM, 2010, 188 s.
- 16.Востриков А.С., Французова Г.А. Теория автоматического регулирования. М.: Современный литератор, 2004, 366 с.
- 17.Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление: Пер с англ. –М.: Машиностроение, 1968. – 764с.
18. Гудвин Г.К., Гребе С.Ф., Сальгадо М.Э. Проектирование систем управления. М.: Бином, Лаборатория знаний, 2004, с.151-157.
19. Дегтярев Ю.И. Методы оптимизации. М.: Сов.радио, 1980.
- 20.Декарло Р.А., Жак С.Х., Меттьюз Г.П. Управление с переменной структурой нелинейными многомерными системами. Обзор// ТИИЭР, т.76, №3, 1988.
21. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. М.: лаборатория базовых знаний, 2004, с.308-348.
22. Дьяконов В.П. MATLAB R2006/2007/2008 + Simulink 5/6/7. Основы применения. Изд.2, М.: 2006, СОЛОН-Пресс, 800 с.
23. Дьяконов В.П. Simulink 5/6/7.Самоучитель. М.: ДМК Пресс, 2008, 784 с.
24. Дебни Дж. Simulink 4. Секреты мастерства. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2007, 403 с.
25. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973, с.401- 405.
26. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1978, с.175.
27. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965, с.175-200.



28. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977.
29. Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные автоматические системы. Справочник материал. Уч. пособие для вузов. – 2-е изд. – М.: Машиностроение, 1982. – 502с.
30. Математические основы теории автоматического регулирования. Уч. пособие для вузов. Т.1/ В.А.Иванов и др./ Под ред. Б.К. Чемоданова. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 1977. – 366 с.
31. Əlizadə A.N., Namazov M.B., Aslanov M.S. Matlab tətbiqi programlar paketi və simvolları riyaziyyat. Dərs vəsaiti. Bakı, 2005, 280 s.
32. Рей У. Методы управления технологическими процессами: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 368с.
33. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами: Пер с англ. – М.: Радио и связь, 1982. – 392с.
34. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712с.
35. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение: Пер с англ. В.С. Бочкова и др.; Под ед. Ю.И. Тончиева. – М.: Машиностроение, 1972. – 544с.
36. Теория автоматического управления. Уч. для вузов ,1-часть, /Н.А.Бабаков, А.А.Воронов и др.; Под ред А.А. Воронова. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 1986. – 367с.
37. Ту Ю. Современная теория управления: Пер с англ. Я.Н.Гибадулина / Под ред. В.В. Солодовникова. – М.:Машиностроение, 1971. – 472с.
38. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. Уч. для вузов. Из. 4-е –М.: Машиностроение, 1978. – 736с.
39. Петров Б.Н. О применение условий инвариантности: Труды Всесоюзного совещания по

теории автоматического регулирования. Т.2. М. – Л. Из-во АН СССР, 1955. с. 241-246.

40. Петров Б.Н. Принцип инвариантности и условия его применения при расчете линейных и нелинейных систем: Труды I Межд.-го Конгресса ИФАК. –М.: Из-во АН СССР, 1961. с. 259- 271.

41. Чаки Ф. Современная теория управления. – М.: Мир, 1975.

42. Щипанов Г.В. Теория и методы проектирования регуляторов. // Автоматика и телемеханика, 1939, №1. с. 49-66.

43. Poncelet J.V. Mecanique industrielle. – Bruxelles: Meline, Cons et C<sup>o</sup>, 1839. 596p

44. Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. Н.Д.Егупова. –М.: Из-во МГТУ, 2000. –736с.

45. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. –М.: Наука, 1970. –620с.

46. Митришкин Ю.В. Линейные модели управляемых динамических систем: Терминалогия. Ч. 1. Уч. пособие.М.: Изд.-во МГТУ, 2008, 220 с.

47. Ануфриев И.Е. Самоучитель Matlab 5.3/6.x.- СПб.:БХВ-Петербург, 2004, 736с.

48. Половко А.М., Бугусов П.Н. Matlab для студентов.- СПб.:БХВ-Петербург, 2005, 320 с.

49. Поршнева С.В. Matlab 7. Основы работы и программирование. Учебник. М.: ООО «Бином Пресс», 2006, 320 с.

50. Дьяконов В.П. Аброменко И.В. Matlab. Система символьной математики. И.:Нолидж, 1999, 640 с.

51. Медведев В.С., Потемкин В.Г. Control System Toolbox. Matlab 5 для студентов.М.: Диалог, МИФИ, 1999.

52. Using the Control System Toolbox with Matlab: Computation, Visualization, Programming.-The Math Works. Inc., 2001.

53. Методические указания к использованию пакета Matlab + Simulink в курсах изучения дисциплин, предусматривающих моделирование динамических систем с помощью ЭВМ. Краматорск: ДГМА, 2004.

54. Zusammenfassung und Kurzbeschreibung Aeler Matlab- Befehle Version 2007 A. (mövçud olan Matlab+ Simulink funksiyaları).

55. Паасонен В.И. Инструмент научных исследований Matlab. Уч. пособие. Новосибир. ун.-т, Новосибирск, 2000, 61 с.

56. Simulink: Model-Based and System- Based Design.- The Math Works Inc., 2001.

57. Черных И.В. Simulink: Инструмент моделирования динамических систем. 2008, 736 с.

58. Бороденко В.А. Исследование систем управления в среде Matlab. Павлодар: Кереку, 2011, 318 с.

59. Соколов Ю.Н. Компьютерный анализ и проектирование систем управления. Ч. 4. Статистическая динамика. Уч. пособие. «Харьк. Авиаци. ин.-т» 2008.

60. Xue D., Chen Y.Q. Atherton D.P. Linear Feedback Control. Analysis and Design with Matlab. Siam, Society for industrial and Applied Mathematics Philadelphia, 2007, pp.354.

**Rüstəmov Qəzənfər Ərəstun oğlu**  
**Məmmədova Afaq Tofiq qızı**

# **Sistemlərin dayanıqlığı:**

**Matlab/Simulinkdə modelləşdirmə.Dərs**  
**vəsaiti. Bakı, AzTu, 2015,- 162 s.**

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin  
28.04.2015 – ci il tarixli 489 sayılı əmri ilə ali  
Məktəb tələbələri üçün dərs vəsaiti kimi  
təsdiq edilmişdir

---

AzTU-nun mətbəəsi-2015