

**M.H.Həmidov, M.M.Abduləzizov,
A.E.Hüseynova**

ELEKTROTEKNIKADAN XÜSUSİ MƏSƏLƏLƏR

**orta ixtisas məktəbləri üçün
dərs vəsaiti**

BAKİ – 2012

Elmi redaktor: Azərbaycan Dövlət Neft Akademiyasının
«Elektrotexnika və elektrik təchizatı»
kafedrasının müdiri, f.-r.e.d,
professor **Rəna Kazımzadə**

Rəyçi: 1. Azərbaycan Texniki Univertisesinin
«Elektrotexnika və elektrik avadanlığı»
kafedrasının müdiri, t.e.d.,
professor **Teyqubad Qurbanov**

2. Azərbaycan Dövlət Neft Akademiyasının
«Elektrotexnika və elektrik təchizatı»
kafedrasının dosenti, t.e.n. **Cavid Əsgərov**

**MUSTAFA HƏMİDOV, MEHMAN
ABDULƏZİZOV, AYNUR HÜSEYNOVA.
ELEKTROTEKHNİKADAN XÜSUSİ MƏSƏLƏLƏR.
Dərs vəsaiti, Bakı, ADNA, 2012-ci il, 98 səh.**

Dərs vəsaitində kompleks dəyişənli funksiyaların köməkliyi ilə mürəkkəb dəyişən cərəyan dövrlərinin hesablanması, kompleks dəyişənli kəmiyyətlərin köməyi ilə uzun verilmiş xətlərinin, enerji sistemlərinin vektor, topoqrafik və dairəvi diaqramlarının qurulması, elektrik şəbəkə və sistemlərində elektrik enerjisi mənbədən işlədiciyə verilmiş xətləri vasitəsilə ötürüldüyü üçün bu xətlərdə gərginliyin və cərəyanın xətti uzunluğu boyu dəyişmə qanununu aşkar etmək üçün riyaziyyatdan məlum olan teleqraf diferensial tənliklərdən istifadə edilmişdir.

GİRİŞ

Elmin bir çox sahələrində olduğu kimi energetikanın inkişafında da riyaziyyat kursunun böyük əhəmiyyəti vardır. Riyaziyyatın tətbiqi ilə əlaqədar olaraq energetikanın müxtəlif sahələrində elektrik şəbəkə və sistemlərində, sənaye müəssisələrinin elektrik təchizatında, elektrik maşınlarında, elektrik intiqalında, elektrotexnologiyada və başqa sahələrdə qarşıya çıxan bütün məsələlər həll olunmuş və olunmaqdadır.

Energetikanın riyaziyyatla əlaqəsi fizikanın elektrik bölməsindən və elektrotexnikanın nəzəri əsasları kursundan başlanır. Elektrik və maqnit sahələrinin, elektromaqnit sahəsinin təhlili riyaziyyatın sahə nəzəriyyəsinin köməyi ilə aparılır. Burada vektorial sahənin divergensiyası, rotoru, skalyar sahənin qradienti şəklində, elektrik və maqnit sahəsinin diferensial və inteqral tənlikləri ilə ifadə olunur.

Elektrik cərəyanı və maqnit sahəsi arasındakı əlaqə Bio-Savar qanunu, elektromaqnit sahəsi üçün Maksvelin tənlikləri, Faradeyin elektromaqnit induksiya qanunu, elektrik və maqnit dövrlərində keçid proseslərinin klassik və operator metodu vasitəsilə təhlili ali riyaziyyatın energetikaya tətbiqi deməkdir.

Riyaziyyat kursundan məlum olan elementar funksiyalar, sistem tənliklər, kompleks dəyişənli funksiyalar, ədədi, üstlü və triqonometriki sıralar, operator hesablama metodu, Laplas çevirməsi, Furiye sırası və inteqralı və s. bir çox riyazi teoremlər bütün energetika ixtisas fənlərində geniş istifadə olunur.

Adları çəkilən riyaziyyat bölmələri sabit və dəyişən cərəyanlı, sadə və mürəkkəb dövrlərin hesablanma metodlarında geniş tətbiq edilir.

Kompleks dəyişənli funksiyaların köməkliyi ilə mürəkkəb dəyişən cərəyan dövrlərinin hesablanması həddindən çox sadələşir.

Kompleks dəyişənli kəmiyyətlərin köməyi ilə uzun verilmiş xətlərinin, enerji sistemlərinin vektor, topoqrafik və dairəvi diaqramları qurulur ki, bu da sistemin işləmə rejiminə sistemə nəzarət etməyə imkan verir.

Elektrik şəbəkə və sistemlərində elektrik enerjisi mənbədən işlədiciyə verilmiş xətləri vasitəsilə ötürüldüyü üçün bu xətlərdə gərginliyin və cərəyanın xəttin uzunluğu boyu dəyişmə qanununu aşkar etmək üçün riyaziyyatdan məlum olan teleqraf diferensial tənliklərdən istifadə edilir.

Məlumdur ki, belə tənliklər xüsusi törəməli diferensial tənliklər olub, hər bir fiziki prosesin özünə uyğun olaraq həll edilir.

Qeyd etmək lazımdır ki, elektrik dövrlərində hər hansı bir dəyişiklik baş verərsə, dövrə mənbəyə qoşularkən dövrənin müəyyən bir hissəsində

müqavimətin, induktivliyin və yaxud da tutumun qiyməti ani dəyişdirilmiş olarsa, bu dövrənin ayrı-ayrı elementlərində və ya qollarında cərəyanın və gərginliyin qiyməti ani olaraq öz qərarlaşmış qiymətini almır. Onların qərarlaşmış qiymətlərinə dövrədə dəyişiklik baş verdikdən sonra çatması üçün müəyyən vaxt keçir ki, buna da **keçid prosesi** adı verilir.

Keçid proseslərinin təyini iki üsulla: klassik və operator üsulları ilə təyin edilir.

Klassik metoda keçid prosesinin təyini üçün hər bir elementin dövrəsinə xas olan diferensial tənlik yazılır. Bu tənliyin tərtib dərəcəsinə, xətti və ya qeyri-xətti əmsallı olmasına uyğun olaraq həlli verilir və bu həldən keçid prosesi təhlil edilir.

Diferensial tənliklərin həlli, məlumdur ki, tərtibin dərəcəsinə uyğun gələn inteqral sabitlərini təyin etmək üçün başlanğıc şərtlərin köməkliyi ilə yeni sistem tənliklər tərtib edilir və bunlardan inteqral sabitləri təyin edilir.

Diferensial tənliyin tərtibi artdıqca uyğun olaraq inteqral sabitlərinin sayı artır. Bu halda inteqral sabitlərinin təyini qarşıya qoyulan məsələnin həllini çətinləşdirir.

Yuxarıda göstərilən çatışmamazlığı aradan qaldırmaq üçün operator hesablama metodundan istifadə olunur. Burada inteqral sabitləri təyin edilmədən keçid prosesi hesablanı bilər. Operator hesablama metodunda Karson, Laplas və Xevusayd ayırma teoremindən və sairə istifadə

olunur ki, bu da funksiyanın təsvirini və buna uyğun olaraq orijinalını tapmaqla keçid prosesinin təhlilinə imkan verir.

Təsvirdən orijinala keçid ya cədvəl formulalarına əsasən və ya da ayrılma teoremi vasitəsilə əldə edilir.

Klassik və operator metodundan başqa üçüncü metod Duyamel inteqralı metodudur. Bu metodla elektrik dövrəsinə gərginlik impuls şəklində təsir edərkən keçid prosesi hesablanır.

Göstərilənlərdən başqa müxtəlif formalı gərginliklərə uyğun keçid prosesləri Furiye çevirməsi vasitəsilə də təhlil edilir.

Müasir texnikanın tələbinə uyğun olaraq müxtəlif formada avtomatik idarə qurğuları elektrik veriliş xətləri, radorabitə və sairə qurğular layihə olunarkən sxemin (tələbətə uyğun olaraq) və elektrik dövrlərinin parametrlərinin seçilməsi elektrik dövrlərinin sintezinin əsas məsələsi hesab edilir. Burada verilmiş tezlik funksiyasına əsasən passiv dövrənin sxemi tərtib edilir.

Riyaziyyatın ehtimal nəzəriyyəsi bölməsi son illərdə enerji sistemlərinin rejimlərini analiz etməkdə geniş tətbiq edilir.

Elektrik sistemlərində fasiləsiz olaraq bir neçə parametr eyni vaxtda təsir edir. Bu da elektrik sistemlərinin işləmə xarakteristikasının riyazi ifadəsini çox mürəkkəbləşdirir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqi ilə enerji sistemlərində aşağıdakı problem məsələlər həll oluna bilər:

1. Elektrik enerji qəbuledicilərində (işlədicilərdə) iqtisadi göstəricilərlə əlaqədar olaraq elektrik şəbəkə sistemində gərginlik tənzimlənmə məsələləri həll olunarkən gərginliyin keyfiyyətinin miqdarı qiymətləndirilməsi;
2. Tezliyin dəyişdirilməsinin keyfiyyətinin qiymətləndirilməsi və elektrik şəbəkələrində güclərin bir-birinə ötürülməsi məsələləri;
3. Elektrik şəbəkə və sistemlərinin işləməsinin etibarlılığının analizi;
4. Stasionar rejimdə elektrik sistemlərinin dinamikasını xarakterizə edən aktiv yüklərin və ekvivalent parametrlərin ehtimallıq xarak-teristikalarının statistik metodla təyini;
5. Sistemlərarası zəif rabitə olan hal üçün paralel işləyən sistemlərin etibarlılığının hesablanma metodları;
6. Elektrik verilişlərində ehtiyat etibarlılığının ehtimal metodlar vasitəsilə təyini;
7. Şəhər elektrik şəbəkələrinin layihəsində ehtimal nəzəriyyəsinin və statistik metodların tətbiqi;
8. Qəza hallarında enerji sistemlərinin avtomatik idarəsi məsələlərində ehtimal

nəzəriyyəsinin və statistik metodların tətbiqi və sairə.

Kompleks dəyişənli kəmiyyətlər

Kompleks ədədlər və onların üzərində əməllərdən məlumdur ki,

$$Z = x + jy$$

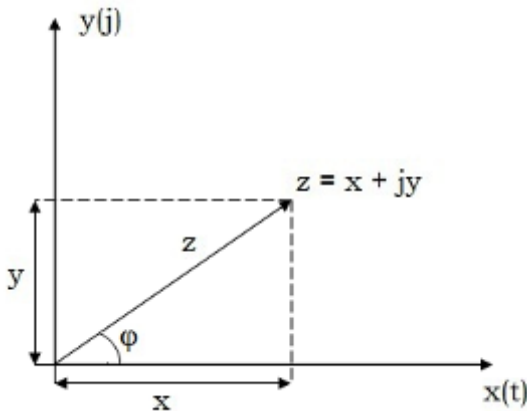
şəklində olan ədədlər **kompleks ədədlər** adlanır. Buruda x və y Z -in uyğun olaraq həqiqi və xəyali hissəsidir.

Həqiqi hissə $x = \operatorname{Re} Z = R(Z)$

Xəyali hissə $y = \operatorname{Im} Z = I(Z)$

İki müxtəlif kompleks ədədlərin $x_1 + jy_1$ və $x_2 + jy_2$ bir-birinə bərabər olması üçün $x_1 = x_2$ və $y_1 = y_2$ olmalıdır.

Müstəvi üzərində nöqtənin vəziyyətini polyar koordinatlarda göstərmək olar (şək. 1)



Şək. 1

$$\begin{aligned}
 r &= |Z| & \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \\
 x &= r \cos \varphi & Z &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 y &= r \sin \varphi & \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}
 \end{aligned}$$

Kompleks kəmiyyətlər cəbri, triqonometrik və üstlü formada ifadə oluna bilər:

Cəbri formada

$$Z = x + j y$$

Triqonometrik forma

$$\begin{aligned}
 Z &= r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = \\
 &= r \cos \varphi + j r \sin \varphi
 \end{aligned}$$

Üstlü formada isə

$$Z = r e^{j\varphi}$$

Göstərilən formaların hər ədəd üçü qarşılıqlı əvəz olunandırlar, yəni

$$\begin{aligned}
 Z &= x + j y = r \cos \varphi + \\
 &+ j r \sin \varphi = r e^{j\varphi}
 \end{aligned}$$

deməkdir.

Buradan görünür ki,

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

deməkdir. Buna Eyler formulası deyilir.

İki kompleks ədədlərin həqiqi hissələri bir-birinə bərabər və xəyali hissələrinin mütləq

qiymətləri bərabər olub işarələri əks olarsa, belə kompleks ədədlər *qoşma kompleks ədədlər* adlanır. Yəni:

$$Z = x + jy \quad \text{və} \quad \bar{Z} = x - jy$$

Burada

$$|Z| = |\bar{Z}| \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

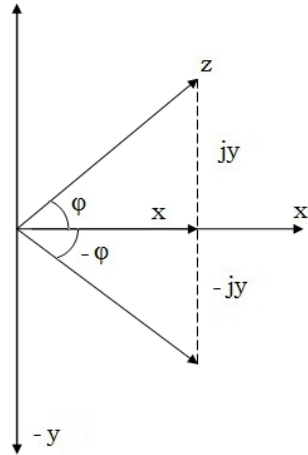
$$\operatorname{tg}\varphi_1 \neq -\operatorname{tg}\varphi_1 \quad \text{və} \quad \text{ya} \quad -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \neq \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$$

Sonuncu ifadədən belə nəticəyə gəlmək olar ki, sağ tərəfin qiymətlər çoxluğu sol tərəfin qiymətlər çoxluğuna uyğun gəlir.

İki qoşma kompleks ədəd həqiqi oxa nəzərən simmetrik yerləşmiş iki nöqtənin təsvirini verir (şək. 2).

Başqa ədədlər üzərində olduğu kimi, kompleks ədədlər üzərində də toplama, çıxma, vurma, bölmə, kök alma əməliyyatları aparılır.

Toplamada həqiqi ədədlər ayrı, xəyali ədədlər isə ayrıca toplanır



Şək. 2

$$Z_1 = x_1 + jy_1; \quad Z_2 = x_2 + jy_2$$

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= x_1 + j y_1 + x_2 + j y_2 = \\ &= x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

iki qoşma kompleks ədədin cəmi həqiqi ədəddir.

$$Z = x + j y \quad \bar{Z} = x - j y$$

$$Z + \bar{Z} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

və yaxud

$$Z + \bar{Z} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

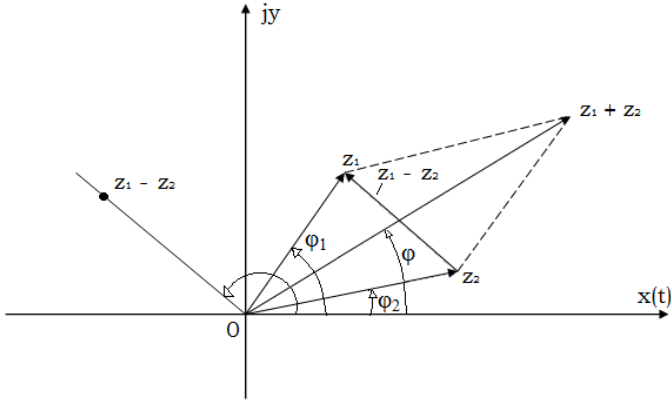
Kompleks ədədlərin çıxılmasında həqiqi hissələr ayrı və xəyali hissələr ayrı-ayrılıqda çıxılır

$$Z_1 - Z_2 = x_1 + j y_1 - (x_2 + j y_2) = x_1 - x_2 + j(y_1 - y_2)$$

İki qoşma kompleks ədədin fərqi ikiqat

$$x + iy - (x - iy) = 2iy$$

xəyali ədədə bərabərdir (şəkl. 3).



Şək. 3

Məlumdur ki, hər bir kompleks ədədin modulu vektorun uzunluğu deməkdir. Buna uyğun olaraq aşağıdakı bərabərsizliklər ödənilməlidir:

$$|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$$

Ümumi şəkildə

$$|Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n| \leq |Z_1| + |Z_2| + |Z_3| + \dots + |Z_n|$$

Burada bərabərsizlik işarəsi ancaq $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n$ olduqda təmin edilir.

Şəkil 3-dən görüldüyü kimi iki kompleks ədədin fərqiinin modulu iki nöqtə arasındakı məsafə deməkdir

$$|Z_1 - Z_2| = \rho$$

və bu da özlüyündə radiusu r və mərkəzi Z_1 nöqtəsində olan çevrə əmələ gətirir.

$|Z_1 - Z_2| < \rho$ bərabərsizliyi çevrə daxilindəki nöqtələr çoxluğunu təyin edir.

$|Z_1 - Z_2| > \rho$ bərabərsizliyi isə çevrə xaricində yerləşən nöqtələr çoxluğunu göstərir.

İki kompleks ədədin hasili, çoxhədlilərin hasili kimi açılır

$$Z_1 Z_2 = (x_1 + j y_1)(x_2 + j y_2) = x_1 x_2 + j x_1 y_2 + j x_2 y_1 + j^2 y_1 y_2 +$$

$j^2 = -1$ olduğunu nəzərə alaraq, yəni

$$\begin{aligned} j \cdot j &= 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right) \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \cos^2 \frac{\pi}{2} + j \cos \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} + j^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} = \\ &= \cos^2 \frac{\pi}{2} + j \left(\cos \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \right) + j^2 - j^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} = \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right)^2 = (e^{j\pi})^2 = e^{j2\pi} = \cos 2\pi + j \sin 2\pi = 1 \\ Z_1 \cdot Z_2 &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + j(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

İki qoşma kompleks ədədin hasili həqiqi ədəd olub

$$Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2$$

Burada

$$\begin{aligned} |Z_1 \cdot Z_2| &= |Z_1| \cdot |Z_2| \\ \arg Z_1 \cdot Z_2 &= \arg Z_1 + \arg Z_2 \end{aligned}$$

şerti arqumentin bütün qiymətlərində ödənilir.
Kompleks kəmiyyətlərin bölünməsində

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{x_1 + j y_1}{x_2 + j y_2} = \frac{(x_1 + j y_1)(x_2 - j y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2 + j(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

Kompleks kəmiyyətlərin bölünməsində

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \quad \arctg \varphi = \arctg \varphi_1 - \arctg \varphi_2$$

Kompleks kəmiyyətləri qüvvətə yüksəltdikdə

$$\begin{aligned} Z^n &= (x + j y)^n = [r(\cos \varphi + j \sin \varphi)]^n = [r e^{j\varphi}]^n = \\ &= r^n e^{jn\varphi} = r^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi) \end{aligned}$$

modulu

$$|Z^n| = |Z|^n \quad \arg |Z^n| = n \arg Z$$

Kompleks qiymətlərdən kök alsaq

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{x + jy} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + j \sin \varphi)} = \\ &= \sqrt[n]{r} e^{j\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{j\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + j \sin \frac{\varphi}{n} \right) \\ \omega &= \rho \left(\cos \frac{\varphi}{n} + j \sin \frac{\varphi}{n} \right) \quad \rho = \sqrt[n]{r}\end{aligned}$$

Əgər $\omega = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$ əvəzləməsi aparsaq

$$\begin{aligned}n\theta &= \varphi + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \theta &= \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \\ \omega &= \sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} = \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)\end{aligned}$$

olar.

Qeyd etmək lazımdır ki, sonuncu tənliklər o səbəbdən alına bilər ki, bərabər kompleks kəmiyyətlərdə modul ola bilər, ancaq argument isə 2π qədər fərqlənə bilər və tənliyə daxil olan k bütün tam qiymətlər ala bilər

$$k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

Kompleks kəmiyyətlərin loqarifması $Z = e^{\omega}$ funksiyasına baxaq. Hər tərəfdən natural loqarifma alsaq

$$\begin{aligned}\omega &= \ln Z = \ln(x + jy) = \ln r e^{j\varphi} = \\ \ln r + \ln e^{j\varphi} &= \ln r + j\varphi = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \\ + j \operatorname{arctg} \frac{y}{x} &= n \sqrt{x^2 + y^2} + j(\varphi + 2\pi k)\end{aligned}$$

Elektrik dövrlərinin hesablanmasında çox vaxt triqonometrik k funksiyaları üstlü funksiyalarla və ya əksinə əvəzləmə aparmaq lazım gəlir. Bunun üçün

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

və

$$e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \sin \varphi$$

alırıq.

Kompleks kəmiyyətlərin diferensialı

$Z = r e^{j\varphi} = \rho e^{j\varphi}$ ifadəsini arqumentə görə diferensiallasaq:

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{d\varphi} &= j\rho e^{j\varphi} = \rho e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\varphi} = \rho e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = \\ &= \rho \left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \right] = \\ &= \rho(\sin \varphi + j \cos \varphi)\end{aligned}$$

alırıq.

Buradan görünür ki, kompleks kəmiyyətin diferensialı şəkildə göstərilən Z parçasını $\frac{\pi}{2}$ bucağı qədər döndərir.

$Z = \rho e^{j\varphi}$ ifadəsini arqumentə görə inteqrallasaq:

$$\begin{aligned} \int \rho e^{j\varphi} d\varphi &= \frac{\rho}{j} e^{j\varphi} = -j\rho e^{j\varphi} = \\ &= \rho e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\varphi} = \rho e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$

Alınan ifadədən görünür ki, kompleks kəmiyyətin inteqralı Z parçasının $-\frac{\pi}{2}$ bucağı qədər dönməsini göstərir.

Kompleks arqumentlərin köməyiylə aşağıdakı tənliklərin düzgün olduğunu isbat edirik

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi &= 1 \\ \left(\frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} \right)^2 + \left(\frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2j} \right)^2 &= 1 \\ -\frac{e^{j2\varphi} - 2 + e^{-j2\varphi}}{4} + \frac{e^{j2\varphi} + 2 + e^{-j2\varphi}}{4} &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Sonuncu ifadədən görünür ki, elektrik dövrəsinin istənilən düyün nöqtəsində cərəyanların kompleks qiymətlərinin cəbri cəmi sıfırdır.

Eyni qayda ilə gərginlik düşgünlərinin toplanmasına baxaq. Asan müqayisə aparmaq üçün yenədə ardıcıl qoşulmuş R , L dövrəsini götürək:

$$e = u_R + u_L = iR + L \frac{di}{dt}$$

Buradan görünür ki, cərəyanın kompleks formasını bilməkdən başqa onun diferensialını və inteqralını da bilmək lazımdır.

$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ -sə onun diferensialı

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= I_m \omega \cos(\omega t + \varphi) = I_m \omega \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \int idt &= \int I_m \sin(\omega t + \varphi) dt = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) = \\ &= -\frac{I_m}{\omega} \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\begin{aligned} I_m \left[I_m \omega e^{j\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \right] &= \omega I_m \left[j \dot{I}_m e^{j\omega t} \right] + \\ + I_m \left[\frac{-I_m}{\omega} e^{j\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \right] &= \frac{1}{\omega} I_m \left[-j \dot{I}_m e^{j\omega t} \right] \end{aligned}$$

Diferensiallamada $j \dot{I}_m = I_m \omega e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\varphi} = j I_m \omega e^{j\varphi}$

İntegrallamada $-j \dot{I}_m = -\frac{I_m}{\omega} e^{j\varphi} = \frac{I_m}{j\omega} e^{j\varphi}$.

Beləliklə, alırıq ki, sinusoidal funksiyanın kompleks formasının diferensialı onu göstərir ki, vektor ω dəfə az qiymətini artırır və saat əqrəbinin əksinə olaraq 90° dönmüş olur.

Eyni qayda üzrə sinusoidal funksiyanın kompleks formasının inteqralı vektorun amplitudasının ω dəfə azaldır və onu vektorun fırlanma istiqamətinin əksinə 90° -ə döndərir.

Nəzərdə tutduğumuz dövrə üçün elektrik hərəkət qüvvəsini $e = E_m \sin \omega t$ qəbul etsək:

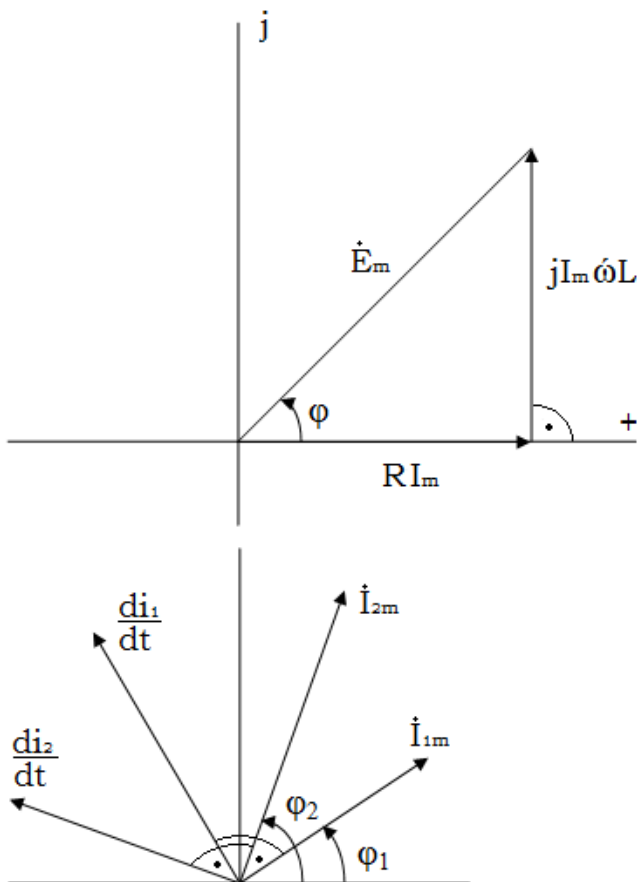
$$I_m \left[\dot{E}_m e^{j\omega t} \right] = I_m \left[R \dot{I}_m e^{j\omega t} \right] + I_m \left[L j \dot{I}_m e^{j\omega t} \right]$$

$$I_m \left[\dot{E}_m e^{j\omega t} \right] = I_m \left[R \dot{I}_m e^{j\omega t} + j I_m \omega L e^{j\omega t} \right]$$

$$\dot{E}_m = R \dot{I}_m + j\omega L \dot{I}_m = \dot{I}_m (R + j\omega L)$$

Sonuncu ifadə onu göstərir ki, qapalı dövrdə gərginlik düşgülərinin cəmi, fərqi və ya cəbri cəmi onların kompleks formalarının cəmi, cəbri cəmi və fərqi kimi götürülə bilər ki, bu da Kirxhofun ikinci qanununun kompleks formasıdır. İfadədə göstərilən $R + j\omega L = Z$ dövrənin kompleks müqavimətidir.

Funksiyanın xəyali qiymətlərinə görə alınmış kompleks kəmiyyətlərin müstəvi üzərində təsviri **vektor diaqramı** adlanır.



Şək. 4

burada I_{1m} , I_{2m} – sinusoidal funksiyanın maksimum qiymətləri; φ_1 , φ_2 – uyğun sinusoidal

funksiyaların faza bucaqları; ω – onların bucaq tezliyidir.

Bu iki cərəyanı toplamaq və çıxmaq lazım gələrsə iki metoddan: analitik və qrafiki metodlardan istifadə etmək olar

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 &= I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2) = \\ &= I_{1m} \sin \omega t \cdot \cos \varphi_1 + I_{1m} \cos \omega t \cdot \sin \varphi_1 + \\ &+ I_{2m} \sin \omega t \cdot \cos \varphi_2 + I_{2m} \cos \omega t \cdot \sin \varphi_2 = \\ &= (I_{1m} \cos \varphi_1 + I_{2m} \cos \varphi_2) \sin \omega t + \\ &+ (I_{1m} \sin \varphi_1 + I_{2m} \sin \varphi_2) \cos \omega t = \\ &= a \cdot \sin \omega t + b \cdot \cos \omega t \end{aligned}$$

haradakı

$$a = I_{1m} \cos \varphi_1 + I_{2m} \cos \varphi_2$$

$$b = I_{1m} \sin \varphi_1 + I_{2m} \sin \varphi_2$$

Trigonometrik düsturdan istifadə etsək

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 &= a \sin \omega t + b \cos \omega t = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ A &= \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \end{aligned}$$

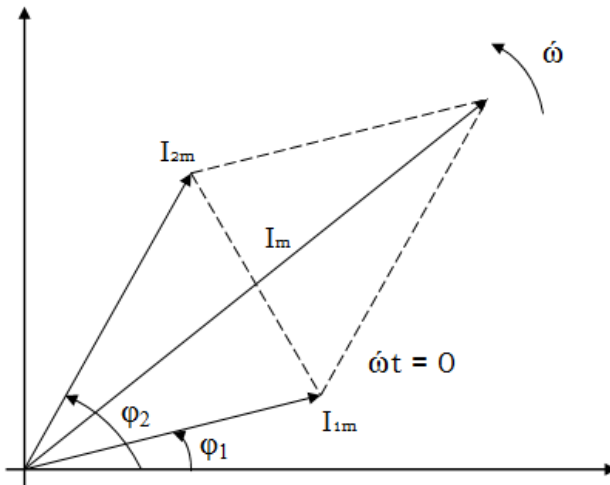
və ya

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(I_{1m} \cos \varphi_1 + I_{2m} \cos \varphi_2)^2 + (I_{1m} \sin \varphi_1 + I_{2m} \sin \varphi_2)^2} = \\ &= \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2I_{1m}I_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{b}{a} = \frac{I_{1m} \sin \varphi_1 + I_{2m} \sin \varphi_2}{I_{1m} \cos \varphi_1 + I_{2m} \cos \varphi_2} \end{aligned}$$

Qrafiki toplamada i_1 və i_2 cərəyanlarını vektor kimi təsvir etmək lazım gəlir. Müstəvi üzərində absis oxuna nəzərən φ_1 bucağı altında I_{1m} və φ_2 bucağı altında isə I_{2m} vektorları istiqamətləndirilir. Vektorların bu vəziyyəti $\omega t = 0$ qiymətilə uyğun götürülür.

ωt -in sıfırdan fərqli qiymətlərində hər iki vektor eyni bucaq sürətilə dəyişdiyinə görə onlar arasındakı bucaq həmişə dəyişməz qalır. Buna görə də ωt -dən asılı olaraq hər bir cərəyan vektorunun sonu müstəvi üzərində çevrə cızdığı üçün bunların əvəzləyicisidə çevrə cızmış olacaqdır.

Şək. 5-dən görünür ki, iki vektorun qrafiki toplanmasından alınan əvəzləyici cərəyan vektoru bu vektorlar üzərində qurulmuş paraleloqramın diaqonalına bərabər olur.



Şək. 5

Əvəzləyici vektorun qiyməti kosinuslar teoremasına əsasən təyin edilir:

$$I_m = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2I_{1m}I_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Cərəyan vektorlarını qrafiki çıxmış olsaq

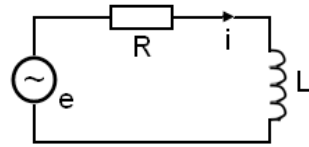
$$I_m = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 - 2I_{1m}I_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

olacaqdır.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{I_{1m} \sin \varphi_1 - I_{2m} \sin \varphi_2}{I_{1m} \cos \varphi_1 - I_{2m} \cos \varphi_2}$$

Elektrik dövrlərində cərəyanların toplanması kimi gərginliklərdə, elektrik hərəkət qüvvələrində, potenciallarda bu qayda üzrə toplanır və çıxılırlar.

Məlum olduğu kimi elektrik dövrəsini hesabla-yarkən verilmiş e.h.q. və dövrənin elementlərinə görə cərəyanı tapmaq məsələsinə çox tez-tez rast gəlmək olur. Bunun üçün yuxarıda göstərilən elementlərdən ibarət ardıcıl dövrə götürək (şək. 6).



Şək. 6

Bu dövrə üçün Kirxhofun ikinci qanununu tətbiq etsək

$$u_R + u_L = e$$

və ya

$$iR + L \frac{di}{dt} = e$$

Qəbul etsək ki, $e = E_m \sin \omega t$ -dir. Buna uyğun

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_m \sin \omega t$$
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_m}{L} \sin \omega t$$

Aldığımız diferensial tənliyi həll etməklə i cə-rəyanını tapa bilərik. Riyaziyyatdan məlumdur ki, dəyişən i kəmiyyətinə görə bu tənlik xətti diferensial tənlik olub

$$y' + p(x)y = q(x)$$

tənliyi ilə eynidir. Bu iki tənliyin müqayisəsindən

$$p(t) = \frac{R}{L}; \quad q(t) = \frac{E_m}{L} \sin \omega t$$

Məlumdur ki, belə tənliyi həll etmək üçün i dəyişənini iki funksiyanın hasili kimi nəzərdə tutub alınan diferensial tənliyi dəyişənlərə ayrıla bilən iki tənlik şəklinə gətirilir. Bu tənliklərdən birincisini tamamilə ixtiyari, ikincisini isə birincisindən asılı elə götürülür ki, hasil şəklinə gətirilmiş funksiyanın hasili yazılmış tənliyi ödəsin

$$i = u \cdot V$$

kimi götürsək

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= u \frac{dV}{dt} + V \frac{du}{dt} \\ u \frac{dV}{dt} + V \frac{du}{dt} + p(t)uV &= q(t) \\ u \left[\frac{dV}{dt} + p(t)V \right] + V \frac{du}{dt} &= q(t)\end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} + p(t)V &= 0 & \frac{dV}{V} &= -p(t)dt \\ V &= e^{-\int p(t)dt}\end{aligned}$$

Sonra isə

$$V \frac{du}{dt} = q(t)$$

ifadəsində V -i nəzərə alsaq

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= q(t)e^{\int p(t)dt} \\ V &= \int q(t)e^{\int p(t)dt} dt + C\end{aligned}$$

Cərəyan isə

$$i = u \cdot V = e^{-\int p(t)dt} \left[\int q(t) e^{\int p(t)dt} dt + C \right]$$

burada $P(t) = \frac{R}{L}$; $q(t) = \frac{E_m}{L} \sin \omega t$ nəzərə alsaq

$$\int \frac{R}{L} dt = \frac{R}{L} t = \frac{t}{L/R} = \frac{t}{\tau} = p t$$

$$\int \frac{E_m}{L} \sin \omega t e^{p t} dt$$

Bu inteqralı hissə-hissə inteqralladıqda

$$z = \sin \omega t$$

$$dz = \omega \cos \omega t dt$$

$$dn = e^{p t} dt \quad n = \frac{1}{p} e^{p t}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_m}{L} \int e^{p t} \sin \omega t dt &= \frac{E_m}{L} \frac{1}{p} e^{p t} \sin \omega t - \\ - \frac{E_m}{L} \int \frac{\omega}{p} \cos \omega t e^{p t} dt &= \frac{E_m}{L} \frac{1}{p} e^{p t} \sin \omega t - \\ &\quad - \frac{E_m}{L} \frac{\omega}{p^2} \cos \omega t - \\ &\quad - \frac{E_m}{L} \frac{\omega^2}{p^2} \int e^{p t} \sin \omega t dt + D \end{aligned}$$

Buradan

$$\int e^{pt} \sin \omega t dt = \frac{E_m e^{pt}}{L} \cdot \frac{p^2}{\omega^2 + p^2} \left[\frac{1}{p} \sin \omega t - \frac{\omega}{p^2} \cos \omega t \right] =$$

$$= \frac{E_m e^{pt}}{L} \cdot \frac{1}{\omega^2 + p^2} [p \sin \omega t - \omega \cos \omega t]$$

Nəticədə

$$i = e^{-pt} \left[\frac{E_m}{L} \cdot \frac{e^{pt}}{\omega^2 + p^2} (p \sin \omega t - \omega \cos \omega t) + D + C \right] =$$

$$= \frac{E_m}{L} \cdot \frac{e^{pt}}{\omega^2 + p^2} (p \sin \omega t - \omega \cos \omega t) - (D + C) e^{-pt} \frac{1}{\omega^2 + p^2} =$$

$$= \frac{E_m}{L} \frac{1}{\omega^2 + p^2} \sqrt{\omega^2 + p^2} \sin(\omega t - \varphi) =$$

$$= \frac{E_m}{L} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + p^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{p}$$

i cərəyanını tapdıqdan sonra ayrı-ayrı müqavi-mətlərdə yaranan gərginlik düşgülləri

$$U_R = iR = R \frac{E_m}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + p^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

$$U_L = L \frac{di}{dt} = \frac{E_m \omega}{\sqrt{\omega^2 + p^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

olacaqdır.

Yuxarıda aparılan hesablamalar sadə dövrlər üçündür. Lakin, elektrik dövrləri mürəkkəbləşdikcə dövrənin düyün nöqtələrində

cərəyanların, konturda isə gərginliklərin ani qiymətlərə görə toplanması böyük riyazi çətinliyin yaranmasına səbəb olur. Belə çətinliyi aradan qaldırmaq üçün kompleks kəmiyyətlərin tətbiqi böyük rol oynayır.

Məlumdur ki, $e^{+j(\omega t + \varphi)}$ ifadəsi Eyler düsturuna əsasən

$$e^{+j(\omega t + \varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)$$

Bu funksiyanın xəyali hissəsi

$$\begin{aligned} I_m [e^{j(\omega t + \varphi)}] &= I_m [\cos(\omega t + \varphi) + \\ &+ j \sin(\omega t + \varphi)] = \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

deməkdir.

Əgər cərəyan sinusoidal qanunla dəyişəndirsə

$$\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t + \varphi) = I_m \left[\dot{I}_m e^{j(\omega t + \varphi)} \right] \\ i &= I_m \left[I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} \right] = I_m \left[\dot{I}_m e^{j\omega t} \right] \end{aligned}$$

burada $\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi}$ cərəyanın kompleks formasıdır.

Yuxarıda göstərdiyimiz

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t) + \varphi_1 \quad \vee \quad i_2 = I_{2m} \sin(\omega t) + \varphi_2$$

cərəyanlarının hər birinin kompleks formasını yazaq:

$$i_1 = I_m \left[\dot{I}_{1m} e^{j\omega t} \right] \quad i_2 = I_m \left[\dot{I}_{2m} e^{j\omega t} \right]$$

$$\dot{I}_{1m} = I_{1m} e^{j\varphi_1} \quad \dot{I}_{2m} = I_{2m} e^{j\varphi_2}$$

Bu iki cərəyanı toplasaq

$$i = i_1 + i_2 = I_m \left[\dot{I}_{1m} e^{j\omega t} \right] + I_m \left[\dot{I}_{2m} e^{j\omega t} \right]$$

Bu iki cərəyanın toplamı ümumi şəkildə

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

olduğu üçün

$$I_m \left[\dot{I}_m e^{j\omega t} \right] = I_m \left[\dot{I}_{1m} e^{j\omega t} \right] + I_m \left[\dot{I}_{2m} e^{j\omega t} \right]$$

alınır və ya da

$$I_m \left[\dot{I}_m e^{j\omega t} \right] = I_m \left[\dot{I}_{1m} e^{j\omega t} + \dot{I}_{2m} e^{j\omega t} \right]$$

İki kompleks kəmiyyətin bərabərliyi qaydasına uyğun olaraq

$$\begin{aligned}\dot{I}_m e^{j\omega t} &= \dot{I}_{1m} e^{j\omega t} + \dot{I}_{2m} e^{j\omega t} \\ \dot{I}_m &= \dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m}\end{aligned}$$

Alınan ifadədən görünür ki, iki və daha çox sinusoidal funksiyaları toplamaq və ya da çıxmaq üçün, onların kompleks formalarını toplamaq və ya çıxmaq kifayətdir.

Cərəyanların toplanması, çıxılması və ya cəbri cəmi elektrik dövrəsinin ancaq düyün nöqtələrində olur. Bu da Kirxhofun birinci qanunudur.

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0 \quad \sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0$$

$$\begin{aligned}bn &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{A}{x_0} \left(-\frac{x_0}{n} \cos nx_0 + \frac{1}{n^2} \sin nx_0 \right) + \right. \\ &\quad \left. + A \left(-\frac{1}{n} \cos n \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \cos nx_0 \right) \right] = \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{A}{x_0} \sin nx_0\end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=1,3,5,7}^{\infty} \frac{4A}{\pi x_0} \sin nx_0 \cdot \sin nx = \\
 &= \frac{4A}{\pi x_0} \left[\sin nx_0 \cdot \sin nx + \frac{1}{9} \sin 3x_0 \cdot \sin 3x + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{25} \sin 5x_0 \cdot \sin 5x + \dots \right]
 \end{aligned}$$

Mailliyin davamiyyətini $\frac{\pi}{2}$ -ə kimi qəbul etsək, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ olsa, trapesiya üçbucaq formalı periodik dəyişən qeyri-sinusoidal funksiya çevrilir

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{8A}{\pi^2} \left[\sin nx - \frac{1}{9} \sin 3x + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{25} \sin 5x - \frac{1}{49} \sin 7x + \dots \right]
 \end{aligned}$$

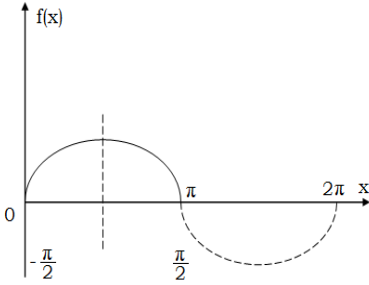
alınır. $x_0=0$ olduqda funksiya düzbucaqlı periodik funksiya şəklində olur.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{8A}{\pi x_t} \left[\sin x_0 \cdot \sin nx + \frac{1}{9} \sin 3x_0 \cdot \sin 3x_0 + \dots \right] = \\
 &= \frac{4A}{\pi} \left[\sin nx + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x \dots \right] \\
 &\quad f(x) = \cos x
 \end{aligned}$$

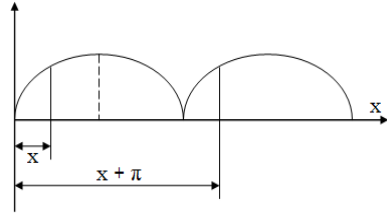
funksiyasının sırasıdır.

Belə funksiyalar, adətən biryarım periodlu və ya da ikiyarımperiodlu düzləndirilmiş elektriki gərginlik və ya cərəyan ola bilər.

Şəkil 7-də göstərilən funksiya ordinat oxuna simmetrik olduğu üçün sıranın tərkibi $\frac{a'}{2'}$ və kosinusoidal harmonikalardan ibarət olacaqdır



Şək. 7



Şək. 8

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cdot \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(1+n)x dx + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(1-n)x dx = \frac{1}{\pi} \frac{2}{1+n} \sin(1+n) \frac{\pi}{2} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \frac{2}{1-n} \sin(1-n) \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$n=0 \text{ olduqda } a_0 = \frac{4}{\pi} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{1+n} \sin(1+n) \frac{2}{\pi} + \frac{2}{1-n} \sin(1-n) \frac{2}{\pi} \right] \cos nx = \\
&= \frac{2}{\pi} + \cos x + \frac{4}{3\pi} \cos 2x - \frac{4}{15\pi} \cos 4x + \frac{4}{35\pi} \cos 6x = \\
&= \frac{2}{\pi} \left[1 + \frac{\pi}{2} \cos x + \frac{2}{3} \cos 2x - \frac{2}{15} \cos 4x + \frac{2}{35} \cos 6x - \dots \right]
\end{aligned}$$

Funksiya şəkil 8-dəki kimi iki yarımpериодlu olarsa

$$\begin{aligned}
f(x) = f(x + \pi) &= \frac{2}{\pi} \left[1 + \frac{\pi}{2} \cos(x + \pi) + \frac{2}{3} \cos(2x + 2\pi) - \right. \\
&\left. - \frac{2}{15} \cos(4x + 4\pi) + \frac{2}{35} \cos(6x + 6\pi) \right] = \frac{2}{\pi} \left[1 + \frac{\pi}{2} \cos x + \right. \\
&\left. + \frac{2}{3} \cos 2x - \frac{2}{15} \cos 4x + \frac{2}{35} \cos 6x - \dots \right]
\end{aligned}$$

Burada $\cos x = 0$ olur.

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \left[1 + \frac{2}{3} \cos 2x + \frac{2}{15} \cos 4x - \frac{2}{35} \cos 6x + \dots \right]$$

Adi diferensial tənliklər və onların energetik məsələlərin həllinə tətbiqi

Riyaziyyat kursundan məlumdur ki, adi diferensial tənliklər bir tərtibli, iki tərtibli və yüksək tərtibli ola bilər.

Məlumdur ki, diferensial tənlik dedikdə, tərkibində dəyişənin özündən başqa, onun məlum

olmayan funksiyasından başqa, dəyişənin törəməsi və diferensialı da olur.

Əgər diferensial tənliyə daxil olan funksiya ancaq bir qeyri-asılı funksiyadan asılı dəyişəndirsə, belə tənlik adi diferensial tənlik hesab edilir. Başqa halda tənliyin tərkibinə dəyişənin xüsusi törəməsi bir neçə kəmiyyətdən asılı daxil olarsa belə tənliklər xüsusi törəməli diferensial tənliklər adlanır.

Tutaq ki, x qeyri-asılı dəyişəndir və y bu dəyişmədən asılı axtarılan funksiyaadır. Beləliklə, diferensial tənliklər ümumi şəkildə

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

göstərilir. Burada n diferensial tənliyin (tərtibidir) dərəcəsidir.

Diferensial tənlikdə $n=1$ olarsa alınan tənlik birtərtibli olur:

$$F(x, y, y') = 0$$

şəklində ifadə edilir.

Bu tənliyi y' -a nəzərən həll olunmuş kimi nəzərdə tutsaq

$$y' = F(x, y)$$

alarlıq və ya da onu aşağıdakı

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

kimi etmək olar.

Hər bir diferensial tənlik müəyyən fiziki prosesə uyğun təyin edilir. Diferensial tənliyin həlli

$$y = f(x)$$

istənilən funksiya ola bilər, o şərtlə ki, bunu tənliyin özündə yerinə yazdıqda eynilik alınsın.

Diferensial tənliklərin həllində belə bir teorem istifadə edilir.

Teorem: Əgər $y' = f(x, y)$ tənliyində $f(x, y)$ funksiyası və onun y -ə görə xüsusi törəməsi $\frac{\partial f}{\partial y}$ müstəvisində hər hansı D oblastında

x_0, y_0 nöqtələrində kəsilməyəndirsə, onda bu tənliyin ancaq vahid həlli vardır ki, bu da

$$x=x_0, y=y_0 \text{ şərtini ödəyir.}$$

$$y = \varphi(x)$$

Xüsusi halda

$$y' = f(x)$$

olarsa

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad y = \int f(x)dx + C$$

alınar. Burada C ixtiyari sabitdir. Ona qiymətlər verməklə, tənliyin müxtəlif formada həllini alırıq ki, bunada diferensial tənliyin xüsusi həlli deyilir.

Sadə diferensial tənliklərdən elələrinə rast gəlmək olur ki, onlar dəyişənlərilə ayrılı bilsinlər. Məsələn,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

tənliyi o vaxt dəyişənlərilə ayrılı bilər ki,

$$M(x, y) = M_1(x) \cdot M_2(y)$$

$$N(x, y) = N_1(x) \cdot N_2(y)$$

kimi ifadə oluna bilsin.

$$M_1(x) \cdot M_2(y)dx + N_1(x) \cdot N_2(y)dy = 0$$

Bu tənliyin hər iki tərəfini $N_1(x) \cdot M_2(y)$ hasilinə bölmüş olsaq

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$$

tənliyini alarıq. Alınan tənliyi inteqrallamaqla y -in x -dən asılılığını təyin edə bilərik

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C$$

Nümunə üçün $x + xy + (y + xy)y' = 0$ tənliyini götürək.

$$\begin{array}{l|l}
 x(1+y) + y(1+x)y' = 0 & x + y = \ln(1+x)(1+y) \frac{C_2}{C_1} \\
 \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \frac{dy}{dx} = 0 & (1+x)(1+y) \frac{C_2}{C_1} = e^{x+y} \\
 \frac{x}{1+x} dx = -\frac{y}{1+y} dy & (1+x)(1+y) = \frac{C_1}{C_2} e^{x+y} \\
 \int \frac{x}{1+x} dx = -\int \frac{y}{1+y} dy & 1+y = \frac{C}{1+x} e^{x+y} \\
 \int \frac{1+x-1}{1+x} dx = -\int \frac{1+y-1}{1+y} dy & \\
 x - \int \frac{1}{1+x} dx + C_1 = -y + \int \frac{1}{1+y} dy &
 \end{array}$$

$$x - \ln(1+x) + \ln C_1 = -y + \ln(1+y) + \ln C_2$$

$$x + y = \ln(1+x)(1+y) + \ln \frac{C_2}{C_1}$$

Bəzən diferensial tənlikdə $\varphi(x, y)$ funksiyası y/x nisbətinə görə təyin edilir, yəni

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Burada $\frac{y}{x} = u$ əvəzləməsi aparılır və tənlik sadə şəkildə gətirilir. Onu da qeyd etmək lazımdır ki, x və y eyni ölçü vahidi ilə ölçülən kəmiyyətlər nəzərdə tutulur. Bu halda tənlik

$$Pdx + Qdy = 0$$

kimi yazılır.

Nümunə üçün

$$yy' = 2y - x \quad u = \frac{y}{x}$$

$$y' = 2 - \frac{x}{y} \quad u' = \frac{y'x - y}{x^2}$$

$$y' = 2 - \frac{1}{u} \quad u'x^2 = y'x - y$$

$$y' = \frac{u'x^2 + y}{x}$$

$$y' = u'x + u$$

$$u'x + u = 2 - \frac{1}{u}$$

$$u'x = 2 - \frac{1}{u} - u$$

$$x \frac{du}{dx} = 2 - \frac{1}{u} - u$$

$$\frac{du}{2 - \frac{1}{u} - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{2 - \frac{1}{u} - u} = \ln x \quad \int \frac{udu}{u(1-u) - (1-u)} = \ln x$$

$$\int \frac{udu}{2u - u^2 - 1} = \ln x \quad \int \frac{udu}{(1-u) \cdot (1-u)} = \ln x$$

Bernulli tənliyi

Bernullinin ümumiləşdirilmiş formada verdiyi xətti diferensial tənlik

$$y' + P(x)y + Q(x)y^m = 0$$

şəklində verilir. Hər iki tərəfi y^m -ə bölsək

$$y^{-m}y' + P(x)y^{1-m} + Q(x) = 0$$

$u = y^{1-m}$ əvəzləməsi aparsaq

$$\begin{aligned} u' &= (1-m)y^m y' \\ y' &= u' y^m \frac{1}{1-m} \\ u' + (1-m)P(x)u + (1-m)Q(x) &= 0 \end{aligned}$$

və yaxud da

$$u' + P_1(x)u + Q_1(x) = 0$$

xətti diferensial tənlik alınır. Belə tənliyin həllini $u = z \cdot q$. İki funksiyanın hasilini kimi nəzərdə tutub z və q ayrılıqda x dəyişənindən asılı nəzərdə tutulur.

$$\begin{aligned} u' &= z'q + q'z \\ z'q + q'z + P_1(x)zq + Q_1(x) &= 0 \\ q[z' + P_1(x)z] + q'z + Q_1(x) &= 0 \\ z' + P_1(x)z &= 0 \\ \frac{dz}{dx} = -P_1(x)z & \quad \frac{dz}{Z} = -P_1(x)dx \\ Z &= e^{-\int P_1(x)dx} \end{aligned}$$

$$q'Z = Q(x)$$

$$Z \frac{dq}{dx} = Q(x) \quad dq = \frac{Q(x)}{Z} dx$$

$$q = \int \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)dx}} dx + C = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C$$

Beləliklə,

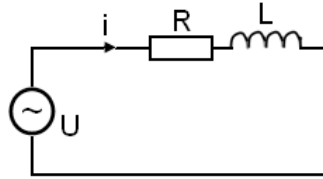
$$u = Zq = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

alınır.

Elektrik dövrələrinin təhlili

Tutaq ki, ardıcıl R, L elementli dəyişən cərəyan dövrəsi verilmişdir (şək. 9).

$$u = u_R + u_L$$



Şək. 9

Öz-özünə induksiya

qanununa görə

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}$$

Om qanununa görə $u_R = iR$. Beləliklə,

$$u = iR + L \frac{di}{dt}$$

alınır. Bu tənliyin hər iki tərəfini L-ə bölsək

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{u}{L}$$

alarıq. Burada $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ qanunu ilə dəyişdiyini qəbul etsək

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{U_m}{L} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

olar. Bu tənliyin i cərəyanına görə həllini vermək üçün

$$i = e^{-\int P(t)dt} \left[\int Q(t) e^{\int P(t)dt} dt + C \right]$$

həllindən $P(t)$ və $Q(t)$ əmsallarının nədən ibarət olduğuna baxaq. Cərəyana görə alınmış diferensial tənliyə görə

$$P(t) = \frac{R}{L}; \quad Q(t) = \frac{U_m}{L} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\begin{aligned}
\int P(t)dt &= \int \frac{R}{L} dt = \frac{R}{L} t \\
\int Q(t)e^{\int P(t)dt} dt &= \int \frac{U_m}{L} e^{\frac{R}{L}t} \sin(\omega t + \varphi_u) dt = \\
&= \frac{U_m}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \sin(\omega t + \varphi_u) dt = \\
&= \frac{U_m}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \frac{e^{j(\omega t + \varphi_u)} - e^{-j(\omega t + \varphi_u)}}{2j} dt = \\
&= \frac{U_m}{L} \int \frac{e^{\frac{R}{L}t + j(\omega t + \varphi_u)}}{2j} dt = \frac{U_m}{L} \int \frac{e^{\frac{R}{L}t - j(\omega t + \varphi_u)}}{2j} dt = \\
&= \frac{U_m}{L} \frac{e^{\frac{R}{L}t + j(\omega t + \varphi_u)}}{2j \left(\frac{R}{L} + j\omega \right)} - \frac{U_m}{L} \frac{e^{\frac{R}{L}t - j(\omega t + \varphi_u)}}{2j \left(\frac{R}{L} - j\omega \right)} + C = \\
&= \frac{U_m}{L} \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\left(\frac{R}{L} \right)^2 + \omega^2} \left[\frac{R}{L} \frac{e^{j(\omega t + \varphi_u)} - e^{-j(\omega t + \varphi_u)}}{2j} - \right. \\
&\quad \left. - j\omega \frac{e^{j(\omega t + \varphi_u)} + e^{-j(\omega t + \varphi_u)}}{2j} \right] + C = \\
&= \frac{U_m e^{\frac{R}{L}t}}{L \left[\left(\frac{R}{L} \right)^2 + \omega^2 \right]} \left[\frac{R}{L} \sin(\omega t + \varphi_u) - \omega \cos(\omega t + \varphi_u) \right] + C = \\
&= \frac{U_m e^{\frac{R}{L}t}}{L \sqrt{\left(\frac{R}{L} \right)^2 + \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) + C
\end{aligned}$$

Beləliklə,

$$i = e^{-\frac{R}{L}t} \left[\frac{U_m e^{\frac{R}{L}t}}{L \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) + C \right] =$$

$$= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) + C e^{-\frac{R}{L}t}$$

$C e^{-\frac{R}{L}t}$ dövrə qoşulduqdan müəyyən zaman sonra sıfırə çevrilir. Nəticədə

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \varphi_n - \varphi)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\frac{R}{L}} = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}$$

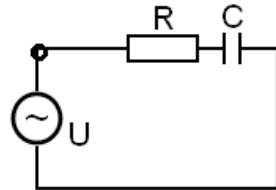
Eyni qayda üzrə RC ardıcıl dövrə təsdiq edilir (şək. 10).

$$u = u_R + u_C = iR + u_C$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \text{ ifadəsindən}$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int idt$$

$$u = \frac{1}{C} \int idt + iR$$



Şək. 10

İnteqraldan azad olmaq üçün tənliyi diferensiallayırıq

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du}{dt}; \quad \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = \frac{1}{R} \frac{du}{dt}$$

$$P(t) = \frac{1}{RC}; \quad Q(t) = \frac{1}{R} \frac{du}{dt}$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

olarsa

$$Q(t) = \frac{U_m}{R} \omega \cos(\omega t + \varphi_u)$$

beləliklə tənlik

$$\frac{di}{dt} + P(t)i = Q(t)$$

və ya bəzi hallarda tənlikləri sadələşdirmək üçün a_0

əvəzinə $\frac{A_0}{2}$ götürülür

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{A_0}{2} 2\pi = A_0 \pi$$

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

sırasının hər iki tərəfini $\cos x$ -ə vurub $-\pi$ və π sərhədlərində inteqrallasaq

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A_0}{2} \cos kx dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cdot \cos kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \cdot \cos kx dx \right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos kx dx = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0$$

$n=k$ olduqda

$$\cos nx \cdot \cos nx = \cos^2 nx = \frac{1}{2} [1 + \cos 2nx]$$

olur. İnteqral isə

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_n}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_n}{2} \cos 2nx dx \right) =$$

$$= \frac{a_n}{2} 2\pi = a_n \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

Periodu $2l$ olan funksiya üçün Furye sırası

Tutaq ki, funksiya $2l$ periodu ilə periodik dəyişəndir. Burada dəyişəni

$$x = l \frac{t}{\pi}$$

qəbul etsək

$$t = \frac{\pi}{l} x$$

$$f\left(\frac{t}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) dt; \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \cos ktdt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \sin ktdt$$

Əvvəlki dəyişənə qayıtsaq

$$x = \frac{l}{\pi} t; \quad t = \frac{\pi}{l} x; \quad dt = \frac{\pi}{l} dx$$

uyğun olaraq

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx$$

sonra isə

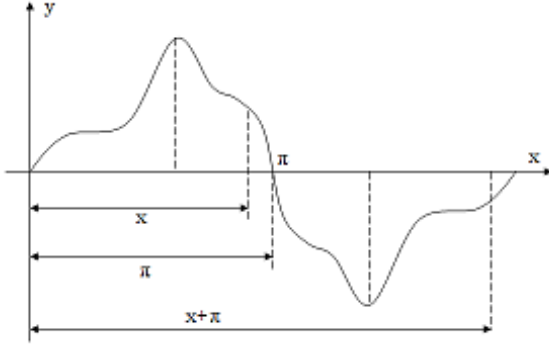
$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right)$$

Sinus və kosinus harmonikaları sıfır çevrilir, n-in tək qiymətlərində isə onlar qalır.

Beləliklə, göstərilən şərt daxilində Furiye sırası ancaq tək harmonikalı sinus və

kosinulardan ibarət olur. Belə funksiya absis oxuna simmetrik alınır (şək.11).

$$2a_0 + 2 \sum_{n=2,4,6}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$$



Şək. 11

Sıranın əmsallarının təyini

Verilmiş Furye sırasında a_0 , a_n və b_n əmsallarını verilmiş qeyri-sinusoidal əyriyə görə təyin etməklə sıranın özünü ala bilərik.

Tutaq ki, sıra $-\pi$ və π intervalında yığılandır. Onda həmin intervalda inteqrallama

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nxdx \right)$$

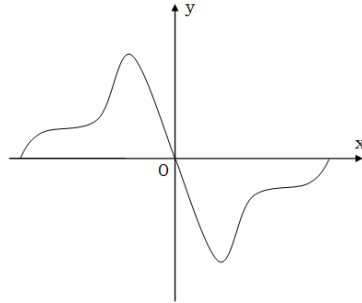
Burada

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx = a_0 2\pi; \quad \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nxdx = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nxdx = 0$$

Beləliklə,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

alınır. Yəni $f(x) = -f(-x)$ şərtində Furye sırasının tərkibində sabit təşkiledici və kosinusoidal harmonikalar harmonikalar sıfıra çevrilir. Sıra ancaq sinusoidal harmonikalardan ibarət olur. Belə funksiya koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olur. Burada n -in tək qiymətlərinə uyğun kosi-nuslar və n -in tək qiymətlərinə uyğun sinuslar qalır. Bu funksiya ko-ordinat başlanğıcına sim-metrikdir (şək. 12).



Şək. 12

$$\begin{aligned}
& a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots + \\
& \quad + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots = \\
& = -a_0 - a_1 \cos x - a_2 \cos 2x - a_3 \cos 3x - \dots + \\
& \quad + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots \\
& 2a_0 + 2a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + 2a_3 \cos 3x + \dots = 0 \\
& \quad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = 0 \\
& f(x) = -f(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx
\end{aligned}$$

Başqa bir şərt

$$\begin{aligned}
& f(x) = -f(x + \pi) \\
& f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\
& -f(x - \pi) = -a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx + n\pi) + b_n \sin(nx + n\pi))
\end{aligned}$$

$n=1, 2, 3, 4$. a_0 – qiymətlərində

$$\begin{aligned}
& \cos(x + \pi) = -\cos x \quad \sin(x + \pi) = -\sin x \\
& \cos(2x + 360^\circ) = \cos 2x \quad \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x
\end{aligned}$$

yəni n -in cüt qiymətlərində funksiyanı xarakterizə edən sıranın tərkibinə daxil olan tək və ya cüt harmonikaların olması onun simmetriklilik şərtlərindən və başqa xüsusi hallardan asılıdır.

Tutaq ki, sırada

$$f(x) = f(-x)$$

şerti ödənilir. Bu halda

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$f(-x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx - b_n \sin nx)$$

Bunların bərabərliyindən

$$2 \sum_{n=1,3,5,7,\dots}^{\infty} b_n \sin nx = 0$$

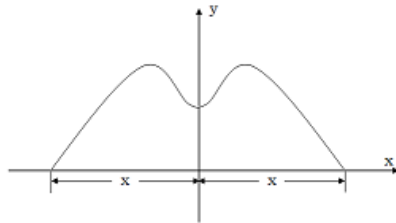
alırıq. n -nin cüt qiymətlərində $\sin nx$ sıfıra çevrilir, yəni $f(x) = f(-x)$ şərtində Furiye sırasının tərkibində sinusoidal harmonikalardan cəmi sıfırı çevrilir. Sıra ancaq sabit təşkilədicidən və kosinusoidal harmonikalardan ibarət olur:

$$f(x) = f(-x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Onuda qeyd etmək lazımdır ki, belə funksiya ordinat oxuna simmetrik alınır (şək.13).

Başqa bir şərtə

baxaq:



Şək. 13

$$f(x) = -f(-x)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$-f(-x) = -a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx - b_n \sin nx)$$

Bunları bərabərləşdirsək $2a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = 0$ alarıq.

Qeyri-sinusoidal funksiyaların tədqiqi

Texnikanın müxtəlif sahələrində, o cümlədən energetik dövrlərində və elektrik mənbələrində qeyri-sinusoidal qanunla dəyişən bir çox kəmiyyətlərə rast gəlmək olur. Qeyri-sinusoidal funksiyalar zamandan asılı olaraq periodik və qeyri-periodik ola bilər. Bütün energetik məsələlərdə periodik qeyri-sinusoidal funksiyalara daha çox rast gəlmək olur. Qeyri-periodik funksiyalara isə avtomatikada və avtomatik tənzim, impuls texnikasında daha çox rast gəlinir.

Hər iki halda, yəni periodik və qeyri-periodik, qeyri-sinusoidal funksiyalar Furye sırası vasitəsilə asanlıqla təhlil olunurlar. Triqonometrik funksiya şəklində göstərilən bu sıra

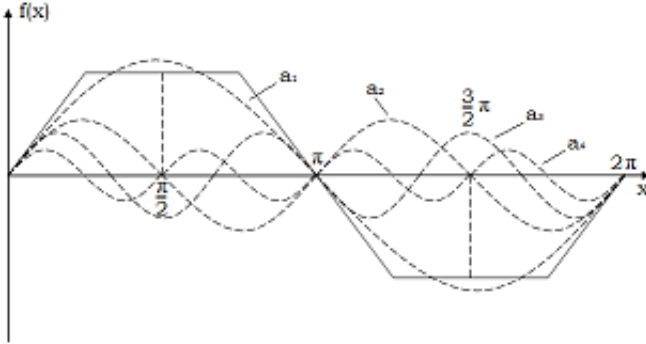
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

kimi yazılır. Bu sıradan görünür ki, $f(x)$ funksiyası qeyri-sinusoidal funksiya olarsa, onu sonsuz sayda

kosinusoidal və sinusoidal funksiyaların cəmi kimi təsvir etmək olar.

Sırada $a_0 - f(x)$ funksiyasının sabit təşkil edicisi, a_n və b_n – uyğun kosinusoidal və sinusoidal harmonikaların maksimum qiymətləri; n – harmoni-kanın nömrəsi; a_n və b_n – eyni zamanda triqono-metrik sıranın əmsallarıdır.

Şəkil 14-də trapesiya formasında qeyri-sinusoidal funksiya verilmişdir.



Şək. 14

Eyni qayda üzrə

$$f(\varepsilon_k) = U(\varepsilon_k, \eta_k) + j\vartheta(\varepsilon_k, \eta_k) \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\Delta z_k = \Delta x_k = j\Delta y_k \quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_k)\Delta z_k &= [U(\varepsilon_k, \eta_k) + j\vartheta(\varepsilon_k, \eta_k)](\Delta x_k + \Delta y_k) = \\ &= U(\varepsilon_k, \eta_k)\Delta x_k - \vartheta(\varepsilon_k, \eta_k)\Delta y_k + \\ &\quad + j[\vartheta(\varepsilon_k, \eta_k)\Delta x_k + U(\varepsilon_k, \eta_k)\Delta y_k] \end{aligned}$$

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\max(\Delta z_k) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [U(\varepsilon_k, \eta_k)\Delta x_k - \vartheta(\varepsilon_k, \eta_k)\Delta y_k] +$$

$$+ j \lim_{\max(\Delta z_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n [\vartheta(\varepsilon_k, \eta_k)\Delta x_k + U(\varepsilon_k, \eta_k)\Delta y_k]$$

$$\int_C f(z)dz = \int_C U(x, y)dx - \vartheta(x, y)dy +$$

$$+ \int_C \vartheta(x, y)dx + U(x, y)dy$$

$$\int_z^{z+dz} f(z)dz = f(z)(z+dz - z) = f(z)dz$$

Beləliklə,

$$\frac{d\phi(z)}{dz} = \frac{f(z)dz}{dz} = f(z)$$

$$\int_z^z f(z)dz = \phi(z) + C$$

Burada $z_v = z_\delta$ nəzərə alsaq

$$\int_{z_v}^{z_\delta} f(z)dz = 0 = \phi(z_v) + C \quad C = -\phi(z_v)$$

$$\int_{z_v}^{z_\delta} f(z)dz = \phi(z) - \phi(z_v)$$

Burada $z = z_c$ götürsək

$$\int_{z_0}^{z_8} f(z)dz = \phi(z_c) - \phi(z_8) = 0$$

deməkdir.

Əlavə.

$$\int f(z)dz = \lim \sum_{k=1}^n f(\varepsilon_k) \Delta z_k$$

burada ε_k – götürülmüş elementar hissədə cari koordinatdır; Δz_k – elementar hissələrin uyğun nöqtələridir.

Bu formulaya görə əyrixətli inteqralın kompleks argumentə görə hesablamaqdan ötəri, inteqralaltı ifadəni həqiqi və xəyali hissələrə ayırmaq kifayətdir.

$$f(z) = U + jV; \quad dz = dx + jdy$$

olduğunu bilərək

$$f(z) = (U + jV)(dx + jdy) = Udx - Vdy + j(Vdx + Udy)$$

alırıq.

$$\int f(z)dz = \int Udx - Vdy + j \int Vdx + Udy$$

Koşi teoremasını isbat etmək üçün L konturu ilə əhatə olunmuş sahəni kiçik sahələrə bölək, bunların uzunluğunu L_k qəbul edək. Hər bir konturu saat əqrəbinin əks istiqamətində dövr etdirsək

$$\oint_L f(z)dz = \sum_k \oint_{(L_k)} f(z)dz$$

L_k konturu içərisində z_k nöqtəsi götürmüş olsaq

$$\frac{f(z) - f(z_k)}{z - z_k} = \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_k) + \alpha \approx f'(z_k)$$

haradakı α – sonsuz kiçik kəmiyyətdir.

$$\oint_{(L_k)} f(z)dz = \oint_{(L_k)} [f(z_k) + f'(z_k)(z - z_k) + \alpha(z - z_k)]dz$$

burada birinci iki kəmiyyətin inteqralı qapalı konturun inteqralı kimi sifıra bərabər olur. Üçüncü hissə isə h^3 -a uyğun gəlir. h – götürülmüş elementar konturun uzunluğuna uyğun kəmiyyətdir. Kvadrat-ların ölçüləri sonsuz kiçildikdə $h \rightarrow 0$.

$$\oint_{(L_k)} f(z)dz = 0$$

olur.

Koşi teoremasının düzgünlüyünü vektorial analizin hesabında yoxlamaq olar.

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = \phi(z)$$

Bu inteqralın törəməsi

$$\frac{d\phi(z)}{dz} = \frac{\phi(z+dz) - \phi(z)}{dz} = \frac{\int_{z_\delta}^{z+dz} f(z)dz - \int_{z_\delta}^z f(z)dz}{dz} = \frac{\int_z^{z+dz} f(z)dz}{dz}$$

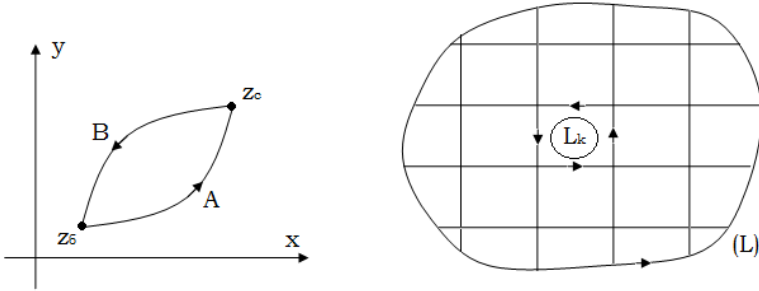
İnteqrallamanı z_C nöqtəsindən z_δ nöqtəsinə doğru aparmış olsaq

$$I = - \int_C^{z_\delta} f(z)dz$$

Məlumdur ki, z_δ , z_C nöqtələrinin müxtəlif xətlərlə (əyrilərlə) birləşdirə bilərik, bunun üçündə hər bir xətt üçün S cəmi müxtəlif olacaqdır.

Bu halda belə demək olar ki, I inteqralı əyrinin formasından asılıdır, yoxsa ki, onun qiyməti ancaq z_δ və z_C nöqtələrindən asılıdır.

Əgər $f(z)$ analitik funksiyadırsa və sahə müxtəlif əyrilərlə sərhədləşdirilibdirsə, bu $f(z)$ bu sahədə sonsuzluğa çevrilmirsə, onda inteqralın qiyməti sonun formasından yox, başlanğıc və son nöqtələrindən asılıdır (şək. 15).



Şək. 15

Bunu isbat etmək üçün qapalı konturu $z_\delta A z_c B z_\delta$, L konturu ilə işarə edək

$$\oint_{(L)} f(z) dz = I$$

Belə ki,

$$I = \int_{z_\delta A z_c} f(z) dz + \int_{z_c B z_\delta} f(z) dz = \int_{z_\delta A z_c} f(z) dz - \int_{z_c B z_\delta} f(z) dz$$

və yaxud da $I=0$.

Analitik funksiyanın inteqralının yolun formasından asılı olmaması Koşi teoreması ilə təsdiq olunur. Qapalı kontur üzrə analitik funksiyanın inteqralı, bu konturun içərisində analitiktir və inteqralıda sıfırdır.

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a_2}{a_1} \sin \varphi \\ I_m a_2 \frac{a_2}{a_1} \sin \varphi - a_1 \sin I_m &= a_3 U_m \\ \sin \varphi \left[\frac{a_2^2 I_m}{a_1} - a_1 I_m \right] &= a_3 U_m \\ \sin \varphi &= \frac{a_3 U_m}{\frac{a_2^2 I_m}{a_1} - a_1 I_m} = \frac{a_1 a_3 U_m}{(a_2^2 - a_1^2) I_m}\end{aligned}$$

Uyğun olaraq

$$\cos \varphi = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3 U_m}{\frac{a_2^2 I_m}{a_1} - a_1 I_m} = \frac{a_1 a_3 U_m}{(a_2^2 - a_1^2) I_m}$$

$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ olduğunu bilərək

$$\left(\frac{a_1 a_3 U_m}{(a_2^2 - a_1^2) I_m} \right)^2 + \left(\frac{a_2 a_3 U_m}{(a_2^2 - a_1^2) I_m} \right)^2 = 1$$

$$I_m^2 = \frac{U_m^2 a_3^2 (a_1^2 + a_2^2)}{(a_2^2 - a_1^2)^2}$$

$$I_m = \frac{a_3 U_m \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_2^2 - a_1^2} = \frac{\omega}{L} \cdot \frac{U_m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \delta^2 \omega^2}}{\delta^2 \omega^2 - (\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

Diferensial tənliklərin köməyi ilə elektrik dövrlərində keçid proseslərinin təyini

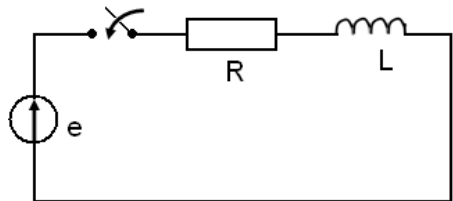
Elektrik dövrlərində passiv elementlərin xarakterindən asılı olaraq dövrənin mənbəyə qoşulması zamanı və yaxud da elementlərdən hər hansı birinin ani dəyişilməsi zamanı, dövrənin qollarından axan cərəyanlar və ayrı-ayrı elementlərin sıxaclarındakı gərginliklər ani olaraq öz nominal qiymətlərini ala bilmir. Cərəyan və gərginliyin, dövrdə baş verən dəyişiklikdən sonra müəyyən zaman keçdikdən sonra öz nominal qiymətinə yaxınlaşması prosesinə **keçid prosesi** adı verilir. Bu prosesi aydınlaşdırmaq üçün nümunə olaraq sadə elektrik dövrlərini götürüb tədqiq edək.

Tutaq ki, elektrik dövrəsi elektrik enerji mənbəyindən və aktiv müqavimətdən ibarətdir. Müqavimət k açarı vasitəsilə mənbəyə qoşulur.

Onu da qeyd etmək lazımdır ki, dövrdə baş verəndəyişiklik **kommütasiya** adlanır. Şəkil 16-da göstərilən dövrdə $t=0$ anında k açarı qapandıqda dövrdən axan cərəyan

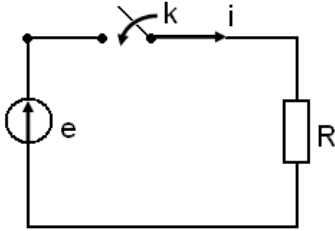
$$i = \frac{e}{R}$$

tənliyi ilə təyin edilir. Bu onu göstərir ki, aktiv müqavimətli dövrə cərəyan və ya gərginlik



Şək. 17

kommunikasiya anında öz nominal qiymətini alır. Burada heç bir keçid prosesi baş vermir.



Şək. 16

Əgər elektrik dövrəsi R və L elementlərindən ibarət olarsa (şək. 17), kommunikasiya anına uyğun tənliklər yazılır

$$e = iR + L \frac{di}{dt}$$

Bu tənlikdə cərəyanı tapmaq üçün onu zamana görə inteqrallamaq lazımdır

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{e}{L}$$

Ümumiyyətlə, qərarlaşmış kəmiyyət (cərəyanı və yaxud da gərginliyi) iki kəmiyyətin cəmi kimi götürülür

$$i(t) = i_q + i_s$$

haradakı i_q – cərəyanın qərarlaşmış qiyməti; i_s – cərəyanın sərbəst qiymətidir.

Göstərilən hər iki kəmiyyətdən birincisi (i_q) keçid prosesi qurtardıqdan sonra, dövredə qərarlaşmış rejimə uyğun təyin edilir; ikincisi isə diferensial tənliyin sərbəst həllindən alınır:

$$\frac{di_s}{dt} + \frac{R}{L}i_s = 0$$

burada $i_s = A \cdot e^{pt}$ şəklində axtaraq

$$\frac{di_s}{dt} = Ape^{pt}$$

alarıq və yaxud da

$$Ape^{pt} + \frac{R}{L} Ae^{-pt} = 0$$

Buradan xarakteristik tənlik

$$p + \frac{R}{L} = 0$$

$p = -\frac{R}{L}$ xarakteristik tənliyin kökü adlanır.

Dövrədə qərarlaşmış cərəyanın qiyməti isə cərəyanın sabit və ya dəyişən olmasından asılı olaraq, keçid prosesi qurtardıqdan sonra təyin edilir:

- sabit cərəyan mənbəyi üçün

$$i_{qr} = \frac{e}{R}$$

- dəyişən cərəyan mənbəyi üçün

$$i_{qr} = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

olur. Sabit cərəyan mənbəyi olduqda

$$i = \frac{e}{R} + Ae^{pt}$$

Dəyişən cərəyan mənbəyi olduqda isə

$$i_{qr} = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \sin(\omega t - \varphi) + Ae^{pt}$$

Hər iki halda A inteqral sabitini təyin etmək üçün başlanğıc şərtlərinə uyğun kommutasiyanın iki qanunundan istifadə edilir. Bu qanunun birincisində göstərilir ki, kommutasiya anında induktivlikdən axan cərəyan, kommutasiyaya qədər ondan axan cərəyana bərabər olur, yəni göstərilən dövrə üçün $t=0$ olduqda

$$i(0) = 0 = \frac{e}{R} + A \quad \text{və ya} \quad A = -\frac{e}{R}$$

yaxud da

$$0 = -\frac{E_m}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \sin \varphi + A$$

$$A = +\frac{E_m}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \sin \varphi$$

alırıq. Beləliklə,

$$i(t) = \frac{e}{r} (1 - e^{-pt})$$

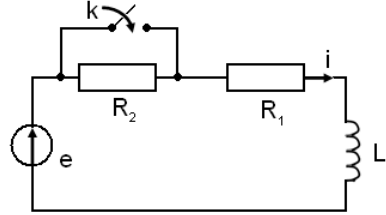
$$i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} [\sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi e^{-pt}]$$

alınır.

RL əvəzində ardıcıl RC dövrəsi götürmüş olsaq, tənliyin həlli zamanı A inteqral sabiti təyin olunarkən kommutasiyanın ikinci qanunundan istifadə olunur. Burada göstərilir ki, kommutasiya anında tutumun sıxaclarındakı gərginlik,

kommutasiyadan qabaq olan gərginliyə bərabər olur.

İndi isə keçid prosesini dövrəyə müqavimət ani olaraq daxil etməklə hesablayaq. Tutaq ki, göstərilən dövrdə kommutasiya zamanı R_2 müqavimətinin ucları qısa qapanılır (şək. 18). Kommutasiya anında



Şək. 18

$$e = iR_1 + L \frac{di}{dt}$$

Bunun həllindən isə

$$i = i_{qr} + i_s = i_{qr} + Ae^{pt}$$

haradakı $p = -\frac{L}{R_1}$ -dir.

Sabit cərəyan mənbəyi üçün

$$i_{qr} = \frac{C}{R_1}$$

keçid cərəyanı isə

$$i = \frac{e}{R_1} + Ae^{pt}$$

olur. Kommutasiyanın birinci qanununa görə $t=0$ olduqda

$$i(0) = \frac{e}{R_1 + R_2}$$

olur.

$$\frac{e}{R_1 + R_2} = \frac{e}{R_1} + A; \quad A = -\frac{e \cdot R_2}{R_1(R_1 + R_2)}$$

Uyğun keçid cərəyanı isə

$$i = \frac{e}{R_1} \left[1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{pt} \right]$$

olur.

Dəyişən cərəyan mənbəyi olduqda

$$i = \frac{E_m}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}} \sin(\omega t - \varphi_2) + Ae^{pt}$$

olur. $t=0$ olduqda $i(0) = \frac{E_m \sin(A - \varphi_1)}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + X_L^2}}$

$$-\frac{E_m \sin \varphi_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + X_L^2}} = -\frac{E_m \sin \varphi_2}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} + A$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega L}{R_1 + R_2}; \quad \varphi_2 = \arctg \frac{\omega L}{R_1}$$

$$A = \frac{E_m \sin \varphi_2}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} - \frac{E_m \sin \varphi_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + X_L^2}}$$

Beləliklə keçid cərəyanı

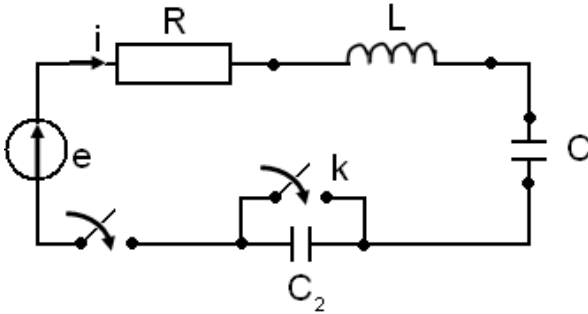
$$i = \frac{E_m}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} \sin(\omega t - \varphi_1) +$$

$$+ \left(\frac{E_m \sin \varphi_2}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} - \frac{E_m \sin \varphi_1 e^{pt}}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + X_L^2}} \right)$$

$$i = \frac{E_m \sin \varphi_2}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} x$$

$$x \left[\sin(\omega t - \varphi_1) + \left(\sin \varphi_2 - \sqrt{\frac{R_1^2 + X_L^2}{(R_1 + R_2)^2 + X_L^2}} \sin \varphi_1 e^{pt} \right) \right]$$

İndii isə üç müxtəlif elementli dövrdə keçid prosesinin təyininə baxaq (şək. 19)



Şək. 19

Kommutasiya anında

$$e = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt$$

İnteqrodiferensial tənliyi alınır. Bunun hər iki tərəfini zamana görə diferensiallamış olsaq

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{de}{dt}$$

olar.

Hər iki tərəfi L -ə bölsək

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} \frac{de}{dt}$$

burada da

$$i = i_{qr} + i_s .$$

Bu dövredə e sabit cərəyan mənbəi olarsa

$$i_{qr} = 0$$

olar. Çünki kondensator sabit cərəyana qarşı sonsuz böyük müqavimət göstərir və eyni zamanda

$$\frac{de}{dt} = 0$$

olur.

Beləliklə, dövredən axan keçid cərəyanı təkə sərbəst cərəyandan ibarət olur. Bu cərəyan

$$i = i_s = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

şəklində axtarılır. Sabit cərəyan halı üçün $t=0$ olduqda

$$i(0) = 0 \quad A_1 + A_2 = 0$$

olur.

$$\frac{di_s}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}$$

$$L \frac{di_s}{dt} = LA_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 L p_2 e^{p_2 t}$$

t=0 olduqda $L \frac{di_s}{dt} = e$

$$LA_1 p_1 + LA_2 p_2 = e$$

$$A_1 = -A_2 = A$$

$$LA p_1 - AL p_2 = e$$

$$A = \frac{e}{L(p_1 - p_2)};$$

$$\begin{aligned} i &= \frac{e}{L(p_1 - p_2)} e^{p_1 t} - \frac{e}{L(p_1 - p_2)} e^{p_2 t} = \\ &= \frac{e}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \end{aligned}$$

$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ olduğunu bilərək

$$i = \frac{e \cdot e^{-\delta t}}{L(p_1 - p_2)} (e^{\Delta t} - e^{-\Delta t}); \quad \Delta = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$\delta = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Əgər

$$\begin{aligned} S^2 - \omega_0^2 > 0 \quad i &= \frac{e \cdot e^{-\delta t}}{L(p_1 - p_2)} (e^{\Delta t} - e^{-\Delta t}) = \\ &= \frac{e \cdot e^{-\delta t} e^{\Delta t}}{L(p_1 - p_2)} (1 - e^{-2\Delta t}) \end{aligned}$$

Əgər

$$\delta^2 - \omega_0^2 = 0 \quad \Delta = 0$$

$$i = \frac{e \cdot e^{-\delta t}}{p_1 - p_2} (e^{\Delta t} - e^{-\Delta t}) = \frac{0}{0}$$

qeyri-müəyyənliyi alınır.

$$p_1 - p_2 = -\delta + \delta = 0$$

$$i = \frac{-e[e^{(\Delta-\delta)t} - e^{-(\Delta-\delta)t}]}{p_1 - p_2} = \frac{e[e^{(\Delta-\delta)t} - e^{-(\Delta-\delta)t}]}{2\Delta} =$$

$$= \frac{e \cdot e^{-\delta t}}{2\Delta} \left[\frac{e^{\Delta t} - e^{-\Delta t}}{\Delta} \right] = \frac{e \cdot e^{-\delta t}}{2} \left[\frac{e^{\Delta t} - e^{-\Delta t}}{1} \right] =$$

$$= \frac{e \cdot e^{-\delta t}}{2} [e^{\Delta t} - e^{-\Delta t}]$$

$$S^2 - \omega_0^2 < 0$$

$$i = \frac{e \cdot e^{-\delta t}}{2j\Delta} (e^{+j\Delta t} - e^{-j\Delta t}) =$$

$$= \frac{e \cdot e^{-\delta t}}{\Delta} \cdot \frac{e^{+j\Delta t} - e^{-j\Delta t}}{2j} = \frac{e \cdot e^{-\delta t}}{\Delta} \sin \Delta t$$

Yuxarıdakı formulalardan istifadə edərək aşağıdakı formulaların doğru olduğunu göstərmək olar.

$$shz_1 + shz_2 = 2sh \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot ch \frac{z_1 - z_2}{2}$$

$$shz_1 - shz_2 = sSh \frac{z_1 - z_2}{2} \cdot ch \frac{z_1 + z_2}{2}$$

$$chz_1 + chz_2 = 2ch \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot ch \frac{z_1 - z_2}{2}$$

$$chz_1 - chz_2 = 2sh \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot sh \frac{z_1 - z_2}{2}$$

Hiperbolik funksiyaların diferensialı və inteqralı isə aşağıdakı kimidir (arqumentin həqiqi qiymətdə) (şək. 20)

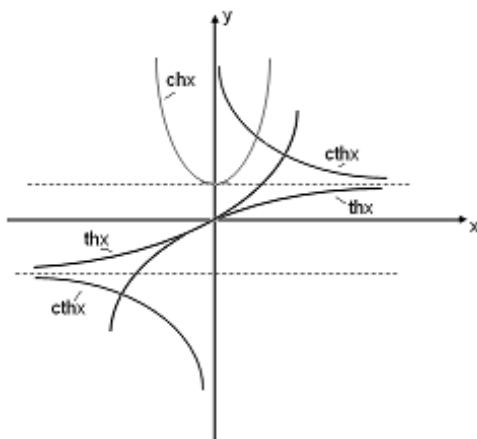
$$\frac{dshx}{dx} = chx \quad \frac{dchx}{dx} = shx$$

$$\frac{dthx}{dx} = \frac{1}{ch^2 x} \quad \frac{dcth x}{dx} = \frac{1}{sh^2 x}$$

$$\int shx dx = chx + C$$

$$\int chx dx = shx + C$$

$$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C \quad \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth x + C$$



Şək. 20

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} - e^{-j(\varphi_1 + \varphi_2)}}{2j} = \frac{\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{2j} \\ & = \frac{e^{j\varphi_1} e^{j\varphi_2} - e^{-j\varphi_1} e^{-j\varphi_2}}{2j} = \frac{(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)}{2j} \\ & \quad - \frac{(\cos \varphi_1 - j \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - j \sin \varphi_2)}{2j} = \\ & = \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + j(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)}{2j} \\ & = \frac{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) - j(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)}{2j} = \\ & = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \end{aligned}$$

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{j[e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}]} = -j \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = j \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}$$

Trigonometrik funksiyaları bilməklə hiperbolik funksiyalara keçmək olar.

$$shz = \frac{\sin jz}{j} = \frac{e^{j(jz)} - e^{-j(jz)}}{2j \cdot j} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$chz = \cos jz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$tgz = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}; \quad tgz = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}$$

$$ch^2 z - sh^2 z = 1$$

$$sh(z_1 \pm z_2) = shz_1 chz_2 \pm chz_1 shz_2$$

$$ch(z_1 \pm z_2) = chz_1 chz_2 \pm shz_1 shz_2$$

$$sh2z = 2shzchz \quad ch2z = ch^2 z + sh^2 z$$

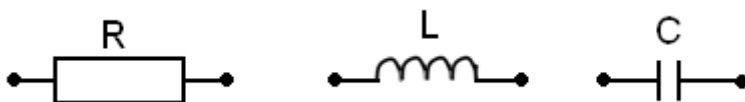
Elektrik dövrəsinin əsas elementləri. Sinusoidal cərəyanlı dövrələrdə kompleks kəmiyyətlərin tətbiqi

Fizika kursunun elektrik bəhsindən məlumdur ki, elektrik dövrələri iki formada ola bilər: a) sabit cərəyan dövrələri; b) dəyişən cərəyan dövrələri.

Sabit cərəyan dövrələrinin sadə və mürəkkəbliyindən asılı olmayaraq Om, Coul və Kirxhof qanunlarının köməyi ilə heç bir riyazi əvəzləmə aparmadan hesablanır. Lakin dəyişən cərəyan dövrələrinin hesablanmasında, sadə və mürəkkəbliyindən asılı olaraq, Om, Coul və Kirxhof qanunlarının tətbiqindən başqa hesabı sadələşdirməkdən ötəri əlavə riyazi əvəzləmə metodlarından istifadə olunur. Dəyişən cərəyan

dövrələrində, dövrənin hər bir elementindən axan cərəyan, bu cərəyanı yaradan mənbələrin elektrik hərəkət qüvvəsi sinusoidal qanunla dəyişən nəzərdə tutularsa, dövrənin elementlərinin növündən asılı olaraq həmin sinusoidal funksiya diferensiallana və inteqrallana bilər.

Fizika kursundan məlumdur ki, elektrik dövrəsinin passiv elementləri aktiv müqavimət R , Omik müqavimət r , induktivlik L və tutum C -dən ibarətdir.



Şək. 21

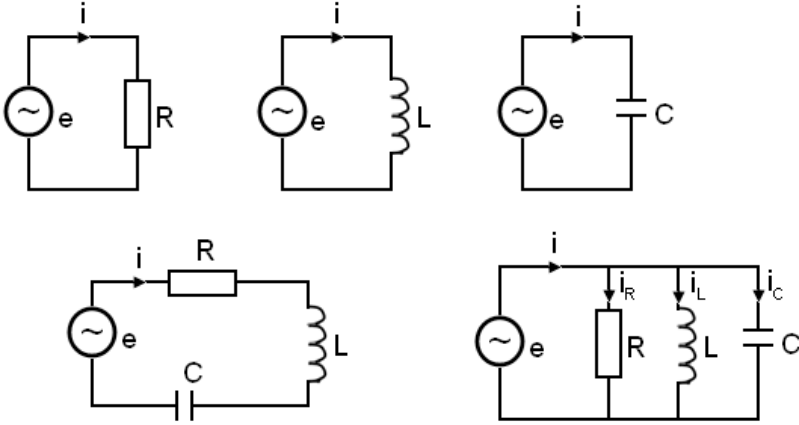
Bu elementlərin xüsusiyyətlərinə uyğun olaraq, aktiv və omik müqavimətdə elektrik enerjisi istilik enerjisinə, induktivlikdə – elektrik enerjisi elektromaqnit sahəsinin enerjisinə və tutumda isə elektrik enerjisi elektrostatik sahənin enerjisinə çevrilir.

Şəkil 21-dəki elementlər elektrik enerjisi mənbəyinə təklikdə, ayrı-ayrılıqda və yaxud da müəyyən sxema üzrə qoşula bilərlər.

Elektrik dövrələrində, dövrədən axan cərəyanla elementlərdəki gərginlik düşgülləri arasındakı əlaqə Om qanunu vasitəsilə ifadə olunur:

$$U_R = iR; \quad U_L = L \frac{di}{dt}$$

$$U_C = \frac{1}{C} \int idt + U_C(0)$$



Şək. 22

Şəkildə göstərilən ardıcıl dövrədə mənbəyin elektrik hərəkət qüvvəsi elementlərdəki gərginlik düşümlərinin cəminə bərabər alınır ki, bu da sadə dövrə üçün Kirxhofun ikinci qanunu ilə izah olunur.

Budqlanmış dövrədə isə ümumi i cərəyanı paralel birləşmiş R , L , C elementlərindən axan cərəyanların cəminə bərabər alınır ki, bu da sadə dövrə üçün Kirxhofun birinci qanunu ilə izah olunur.

İkinci qanuna görə: $e = U_R + U_L + U_C$.

Birinci qanuna görə: $i = i_R + i_L + i_C$.

Mənbəyin elektrik hərəkət qüvvəsi sinusoidal qanunla dəyişmiş olarsa, buna uyğun olaraq dövrədən axan cərəyanda sinusoidal funksiya şəklində olacaqdır. Eyni zamanda uyğun olaraq qollardan axan cərəyanlar da sinus qanunu üzrə dəyişəcəkdir.

Kirxhofun qanunlarına nəzər salsaq görərik ki, müxtəlif amplitudalı və arqumentli sinusoidal funksiyaları bir-birilə toplamaq və yaxud da çıxmaq lazım gəlir. Bunu yaxşı başa düşmək üçün iki sinusoidal funksiya götürək:

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$|\Delta x + j\Delta y| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

olduğu üçün

$$\left| \frac{(\varepsilon_1 + j\varepsilon_2)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x + j\Delta y} \right| = |\varepsilon_1 + j\varepsilon_2|$$

olur.

Beləliklə

$$\lim \frac{\Delta \omega}{\Delta Z} = f^1(Z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial y}$$

əvvəldə olduğu kimi alınır.

Kompleks sahədə sıralar

Kompleks kəmiyyətlərlə ifadə olunan sıra

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n$$

şəklində olur. Bu sıranın yığılan olması üçün

$$|Z_1| + |Z_2| + \dots + |Z_n|$$

sırası yığılan olmalıdır.

Həqiqi dəyişənli kəmiyyətlərdə olduğu kimi sıranın yığılan olmasını tədqiq etmək üçün Dalamber və Koşi əlamətlərindən istifadə edilir. Dalamberə görə

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|Z_{n+1}|}{|Z_n|} < 1$$

Əgər sıra dağılan olsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|Z_{n+1}|}{|Z_n|} > 1$$

olar. Koşi əlamətinə görə

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|Z_n|} < 1$$

şərtində sıra yığılan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|Z_n|} > 1$$

olur.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{\Delta u + j\Delta U}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow \infty} \frac{\Delta u + j\Delta U}{\Delta y}$$

və yaxud da

$$\frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} - j \frac{\partial u}{\partial y}$$

olmalıdır. Buradan kompleks kəmiyyətlərin törəməsi üçün əlavə şərt alınır:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Bu şərt Dalamber-Eyler və ya Koşi-Rimana şərti adlanır. Bu şərtlərin tam diferensial üçün doğru olduğuna baxaq. Həqiqi dəyişənli kəmiyyətlərdə olduğu kimi burada da tam diferensial təşkil edicilərə görə

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ \Delta U &= \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_2 \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \end{aligned}$$

Burada $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varepsilon_1 = 0$ $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varepsilon_2 = 0$

$$\Delta Z = \Delta x + j\Delta y$$

olduğu üçün

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta Z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + j \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + j \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x + j\Delta y}$$

Eyler və Dalamber şərtlərinə görə

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta Z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + j\Delta y) + j \frac{\partial V}{\partial x}(\Delta x + j\Delta y) + (\varepsilon_1 + j\varepsilon_2)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x + j\Delta y}$$

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta Z} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial V}{\partial x} \frac{(\varepsilon_1 - j\varepsilon_2)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x + j\Delta y}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = \frac{\omega U_m}{R} \cos(\omega t + \varphi_n)$$

şəklində olur. Bununla həllindən

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \varphi_n + \varphi)$$

alınır.

İndii isə budaqlanmış dövrələrə baxaq (şək.23).

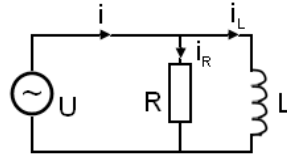
$$i = i_R + i_L$$

$$i_R = \frac{U}{R}; \quad U_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad i_L = \frac{1}{L} \int U_L dt$$

$$i = \frac{U}{R} + \frac{1}{L} \int U_L dt$$

İnduktivlikdə aktiv müqaviməti nəzərdən

atsaq $U=U_L$ olur.



Şək. 23

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R}U + \frac{1}{L} \int U dt = i \\ \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} u = \frac{di}{dt} \end{aligned} \right| \frac{du}{dt} + \frac{R}{L} u = R \frac{di}{dt}$$

Burada cərəyana görə gərginliyi tapmaq məqsədə uyğundur

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

qəbul etsək

$$\frac{du}{dt} + \frac{R}{L} u = R \omega I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Buradan

$$u = I_m \sqrt{g^2 + b_L^2} \sin(\omega t + \varphi_L + \varphi)$$

Paralel RC dövrəsi olduqda (şək. 24)

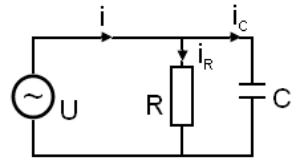
$$i = i_R + i_C = \frac{U}{R} + C \frac{du}{dt}$$

$$RC \frac{du}{dt} + U = R I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} U = \frac{I_m}{C} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

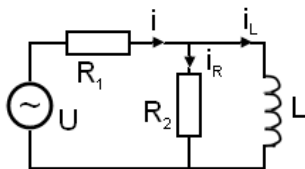
$$U = I_m \sqrt{g^2 + b_C^2} \sin(\omega t + \varphi_i - \varphi)$$

$$g = \frac{1}{R}; \quad b_L = \frac{1}{\omega L}; \quad b_C = \frac{1}{\omega C}$$

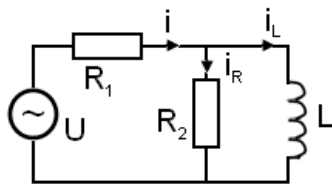


Şək. 24

deməkdir.



Şək. 24



Şək. 25

Qarışıq dövrə üçün (şək. 25).

$$i = i_R + i_L$$

$$u = iR_1 + L \frac{di_L}{dt}$$

$$i_R R_1 = L \frac{di_L}{dt}$$

$$i_R = \frac{L}{R_1} \frac{di_L}{dt} \quad i = i_R + i_L = i_L + \frac{L}{R_1} \frac{di_L}{dt}$$

$$u = i_L R_1 + \frac{L}{R_1} \frac{di_L}{dt} + L \frac{di_L}{dt} = i_L R_1 + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) L \frac{di_L}{dt}$$

Bu tənliyin bütün hədlərini $\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) L$

kəmiyyətinə bölsək

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) L} i_L = \frac{u}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) L}$$

Burada $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ olarsa

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) L} i_L = \frac{U_m}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) L} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Buradan

$$P(t) = \frac{R_1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)L} i_L$$

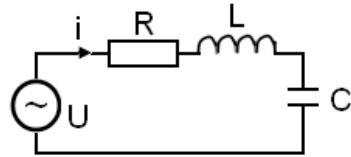
və

$$Q(t) = \frac{U_m}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)L} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

alınır.

RLC elementlərinin ardıcıl birləşməsi

Elektrik dövrlərində RLC elementli dövrlərə çox rast gəlinir (şək. 26). Bu dövrə üçün



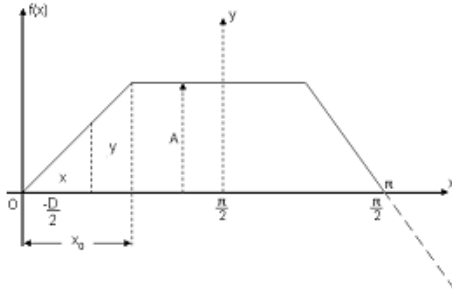
Şək. 26

$$u = iR = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt$$

Qeyri-sinusoidal funksiyanın sıraya ayrılması

Hər bir funksiyanı Furiye sırasına ayırmaq üçün birinci növdəbə verilmiş funksiya üçün sıranın a_0 , a_n , b_n əmsallarını təyin etmək lazımdır.

Trapeziya şəkilli əyrinin sırasının alınmasına baxaq (şək. 27).



Şek. 27.

Trapesiyanın birinci yarımpiriodunu götürək. Əyrinin maili hissəsinin tənliyi

$$f(x) = kx = \frac{A}{x_0} x$$

x oxuna paralel hissəsinin tənliyi isə

$$f(x) = A$$

şəklində olur.

Göstərdiyimiz funksiya, absis oxuna və onun birinci yarımpiriodu ordinat oxuna simmetrik olduğu üçün Furiye sırasının tərkibi ancaq sinusoidal harmonikalardan ibarət olacaqdır.

$$f(x) = \sum_{n=1,3,5,7}^{\infty} b_n \sin nx$$

Burada b_n əmsalını tapmaq üçün

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$$

düsturunu tətbiq edək.

Göstərdiyimiz simmetriklik şərtinə görə, trapesiyanın dördüdəbir hissəsi üçün inteqrallama aparsaq

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin nxdx$$

olar. Əyrinin maili hissəsinin tənliyi

$$f_1(x) = \frac{A}{x_0} x$$

absis oxuna paralel hissəsinin tənliyi isə

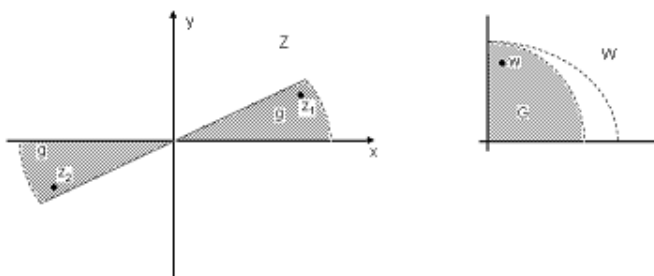
$$f_2(x) = A$$

olur.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{\pi} \left[\int_0^{x_0} f_1(x) \sin nxdx + \int_{x_0}^{\pi/2} f_2(x) \sin nxdx \right] = \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\int_0^{x_0} \frac{A}{x_0} x \sin nxdx + \int_{x_0}^{\pi/2} A \sin nxdx \right] = \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{A}{x_0} \int_0^{x_0} x \sin nxdx + A \int_{x_0}^{\pi/2} \sin nxdx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{x_0} x \sin nx dx &= -\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{x_0} + \begin{cases} x = u \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{cases} \\
&+ \frac{1}{n} \int_0^{x_0} \cos x dx = \\
&= -\frac{x_0}{n} \cos nx_0 + \frac{1}{n^2} \sin nx_0 \\
\int_{x_0}^{\pi/2} \sin nx dx &= -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{n} \cos n \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \cos nx_0
\end{aligned}$$

Şəkil 28-dən görünür ki, W müstəvisində G nöqtələr torlusunun hər biri $W=0$ -dan başqa Z müstəvisindəki g dairəsinin iki nöqtəsinə uyğun gəlir, haradakı bu iki nöqtə koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik yerləşir



Şək. 28

$$Z_2 = -Z_1 \quad \vee \quad \omega = Z_1^2 = Z_2^2$$

Beləliklə, $Z = \sqrt{\omega}$ funksiyası G oblastının g oblastında təsviri $\omega = Z^2$ funksiyasına nəzərən əksidir və özudə çoxqiymətlidir.

Əgər Z müstəvisi üzərində əyrinin tənliyi

$$F(x, y) = 0$$

şəklində verilərsə, burada C əyrisinin tənliyini W müstəvisində almaq üçün

$$u = u(x, y)$$

$$v = V(x, y)$$

tənliklərindən x və y çıxarmaq kifayətdir.

Qəbul etsək ki, x və y parametrik tənliklər şəklində veriləndir, yəni

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

onda

$$U = u[x(t), y(t)] = \varphi_1(t)$$

$$V = v[x(t), y(t)] = \varphi_2(t)$$

olar.

Misal. $\omega = Z^2$ funksiyasının köməyi ilə təsvir olunan və Z müstəvisinin oxlarına paralel olan W müstəvisi xətlərinin tənliyini yazmalı.

Yuxarıda göstəriləndiyi kimi

$$\omega = u + jv = Z^2 = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j2xy$$

və

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = 2xy$$

Z müstəvisinin xəyali oxuna paralel olan xəttin sürətini $x=C$ götürsək

$$u = C^2 - y^2 \quad \text{və ya} \quad Y = \frac{v}{2C}$$

$$v = 2Cy \quad u = C^2 - \frac{v^2}{4C^2}$$

olar.

Alınan tənlik ω müstəvisi üzərində parabolun tənliyini verir.

Kompleks kəmiyyətlərin limiti

Kompleks müstəvi üzərində tədqiq olunan nöqtələr

$$|Z - Z_0| < P$$

bərabərsizliyinə uyğun olaraq çevrə daxilində götürülsə

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z_0$$

olar. Burada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$$

eyni güclər deməkdir.

$$|Z - Z_0| > P$$

olarsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \infty$$

Kompleks kəmiyyətlərin törəməsi

Yuxarıda qeyd olunduğu kimi həqiqi dəyişənli funksiyaların törəməsində istifadə olunan qaydalar, teoremlər, formulalar eyni ilə kompleks dəyişənli funksiyalarda təkrar olunur. Lakin bu kəmiyyətlərin diferensiallanması bir çox əlavə şərtlərdən istifadə olunur.

$$Z = x + jy$$

kompleks kəmiyyətini götürək. Burada x və y -ə artım versək

$$Z + \Delta Z = x + \Delta x + j(y + \Delta y)$$

və ya $\Delta Z = \Delta x + j\Delta y$ olar.

Z funksiyasına uyğun $\omega = f(z)$ funksiyası

$$\Delta \omega = f(z + \Delta z) - f(z)$$

olar. Hər tərəfi Δz -ə bölsək

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Buradan görünür ki, $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ nisbətinin Δz -in istənilən qanunla sıfıra yaxınlaşmasına uyğun limiti varsa, onda bu limit z nöqtəsində $f(z)$ funksiyasının törəməsi olacaqdır, yəni

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}$$

Burada $f'(z)$, ω' , $\frac{d\omega}{dz}$, $\frac{df}{dz}$ kimi işarə oluna bilər.

Törəməni ω funksiyasının u və v təşkil edicilərilə ifadə etsək

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= f(z + \Delta z) - f(z) = [u(x + \Delta x, y + \Delta y) + \\ &+ jv(x + \Delta x, y + \Delta y)] - u(x, y) - jv(x, y) = \\ &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + \\ &+ j[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)] = \Delta u + j\Delta v \end{aligned}$$

Buradan görünür ki,

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \\ \Delta v &= v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) \end{aligned}$$

Bu əvəzləmələrə uyğun olaraq

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + j\Delta v}{\Delta x + j\Delta y}$$

Bu formula onu göstərir ki, funksiyayı z nöqtəsində törəməsi varsa onda, bu nöqtə diferensial-landıdır. Yəni aldığımız limit mövcuddur və özü də Δz -in sıfıra yaxınlaşma

qanunundan asılı deyil. Xüsusi halda $\Delta z = \Delta x$ və ya $z + \Delta z$ nöqtələri ox oxuna paralel xətt üzrə z nöqtəsinə yaxınlaşırsa

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + j\Delta v}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + j \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

olar.

İndi isə həmin dəyişməni təkcə y oxu üzrə götürsək

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u + j\Delta v}{j\Delta y} \right) = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta y} - j \frac{\Delta u}{\Delta y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

$\frac{\Delta \omega}{\Delta z}$ nisbətinin limiti $\Delta z \rightarrow 0$ sifıra yaxınlaşma qanunundan asılı olmamalıdır, ona görə ki, hər iki halda z nöqtəsinə yaxınlaşma olacaqdır.

Qeyd olunduğu kimi kompleks müstəvi üzərində fırlanan vektorlar təsvir olunduğu üçün zamanın ωt -ni istənilən qiymətində bu vektorlar arası faza bucağı dəyişməz qaldığı üçün daha doğrusu vektor diaqraması öz formasında qaldığı üçün $\omega t = 0$ vəziyyətində diaqramanı təsvir etmək məqsədə uyğundur. Buna nəzərən vektorlar

diferensiallanarkən və inteqrallanarkən fəzca dönməsini aydın görmək olsun.

Yuxarıda göstərilən dövrə elementlərindən R , L və C –i öz aralarında ardıcıl qoşmuş olsaq eyni qayda ilə göstərə bilərik ki, kompleks müqavimət

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

olar ki, bu da yenə dövrə üçün yazılmış Kirxhofun ikinci qanunundan alınır.

$$\begin{aligned} e &= iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt \\ I_m \left[\dot{E}_m e^{j\omega t} \right] &= I_m \left[\dot{I}_m \operatorname{Re}^{j\omega t} \right] + I_m \left[j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t} \right] + \left[\frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m e^{j\omega t} \right] \\ \dot{E}_m &= \dot{I}_m R + j\omega L \dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m = \\ &= \dot{I}_m \left[R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right] = \dot{I}_m \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \end{aligned}$$

Aldığımız kompleks müqavimətin ifadəsində kiçik riyazi dəyişiklik aparsaq

$$Z = R + j\omega L \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)$$

burada $\sqrt{\frac{1}{LC}}$ – tezlik vahidi ilə ölçülən kəmiyyət olub dövrənin xüsusi tezliyi hesab edilir.

Bunu $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ qəbul etsək

$$Z = R + j\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$$

Alınmış ifadədən görünür ki, kompleks müqavimət $\omega = \omega_0$ şərtini ödədikdə, I sıfır aktiv həqiqi hissəyə malik olur.

Göstərilən qayda elektrik dövrəsinin istənilən qolu, qapalı konturu üçün kompleks kəmiyyət tətbiq oluna bilər.

Kompleks dəyişənli funksiya

Məlumdur ki, kompleks dəyişənli funksiyalar üzərində aparılan bütün əməliyyatlar və qaydalar, həqiqi dəyişənli funksiyalarda olduğu kimidir.

Z kompleks ədədinin verilişi iki həqiqi x və y ədədləri ilə eyni qüvvədə olub, bunlardan biri həqiqi və digəri isə xəyali hissə hesab olunur:

$$Z = x + jy$$

Buna uyğun olaraq ω ədədi də u və v cüt həqiqi ədədlərə uyğun gəlir

$$\omega = u + jv$$

Bu halda $\omega = F(z)$ asılılığı, kompleks funksiya ilə kompleks arqument arasındakı asılılıq

$$\omega = u(x, y) + jv(x, y) = u + jv$$

kimi ifadə olunur. Bunu aydın etmək üçün $\omega = z^2$ funksiyasını götürək. Burada $Z = x + jy$ qəbul etsək

$$\omega = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j2xy$$

Buradan

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy \end{aligned}$$

Alınır.

Əgər z müstəvisinin üzərində vahid qiyməti nöqtələr çoxluğunu g simvolu ilə işarə etmiş olsaq, burada $\omega = F(z)$ funksiyası təyin olunur və eyni zamanda G simvolu ilə ω müstəvisindəki nöqtələr çoxluğunu göstərsək $\omega = F(z)$ funksiyasının köməyi ilə nöqtələrin g çoxluğunu alarıq. Tənliyin hər iki tərəfini zamana görə diferensiallamış olsaq

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{du}{dt}$$

alarıq. Bu tənliyin hər bir həddini L -ə bölüb və

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

nəzərə alsaq

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{U_m}{L} \omega \cos(\omega t + \varphi_u)$$

olar.

Aldığımız tənlik iki tərtibli diferensial tənlikdir. Bu tənlikdə

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2; \quad \frac{R}{L} = \delta$$

əvəzləməsini aparsaq

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \delta \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{\omega U_m}{L} \cos(\omega t + \varphi_u)$$

Mənbəyin gərginliyi sinusoidal olduğu üçün, xətti dövredə onun istənilən qolda yaratdığı cərəyan da sinusoidal olacaqdır. Bu halda

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_u + \varphi)$$

şəklində axtarılır. Burada I_m və φ kəmiyyətlərini tapmaq üçün sonuncu ifadəni diferensiallayıb tənlikdə nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= I_m \omega \cos(\omega t + \varphi_u + \varphi) \\ \frac{d^2 i}{dt^2} &= -I_m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_u + \varphi) \end{aligned}$$

və yaxud da

$$\begin{aligned} -I_m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_u + \varphi) + \delta I_m \omega \cos(\omega t + \varphi_u + \varphi) + \\ + \omega_0^2 I_m \sin(\omega t + \varphi_u + \varphi) = \frac{U_m \omega}{L} \cos(\omega t + \varphi_u) \end{aligned}$$

olar.

$$\begin{aligned}
 & -\omega_0^2 I_m \sin(\omega t + \varphi_u) \cos \varphi - \omega_0^2 I_m \cos(\omega t + \varphi_u) \sin \varphi + \\
 & + \delta \omega I_m \cos(\omega t + \varphi_u) \cos \varphi - \delta \omega I_m \sin(\omega t + \varphi_u) \sin \varphi + \\
 & + \omega^2 I_m \sin(\omega t + \varphi_u) \cos \varphi + \omega^2 I_m \cos(\omega t + \varphi_u) \sin \varphi = \\
 & = U_m \omega \cos(\omega t + \varphi_u)
 \end{aligned}$$

$$\left(-\omega^2 I_m \cos \varphi - \omega \delta I_m \cos \varphi + \omega_0^2 I_m \cos \varphi \right) \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(-\omega^2 I_m \sin \varphi + \delta \omega I_m \cos \varphi + \omega_0^2 I_m \sin \varphi \right) \cos(\omega t + \varphi_u) = \\
 & = \frac{\omega U_m}{L} \cos(\omega t + \varphi_u)
 \end{aligned}$$

$$\omega^2 I_m \cos \varphi - \omega_0^2 I_m \cos \varphi - \delta \omega I_m \sin \varphi = 0$$

$$(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \varphi - \delta \omega \sin \varphi = 0$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\delta \omega} = \frac{\omega^2 - \frac{1}{LC}}{\delta \omega} = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \omega}{\delta \omega} = \\
 &= \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}
 \end{aligned}$$

$$(-\omega^2 \sin \varphi + \delta \omega \cos \varphi + \omega_0^2 \sin \varphi) I_m = \omega U_m$$

$$I_m = \frac{\omega U_m}{[(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + \delta \omega \cos \varphi] L} =$$

$$= \frac{\omega U_m}{\delta \omega \cos \varphi - (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi}$$

$$(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \varphi - \delta \omega \sin \varphi = 0$$

$$\delta \omega I_m \cos \varphi - (\omega^2 - \omega_0^2) I_m \sin \varphi = \frac{\omega U_m}{L}$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = a_1; \quad \delta \omega = a_2; \quad \frac{\omega}{L} = a_3$$

$$a_1 \cos \varphi - a_2 \sin \varphi = 0$$

$$a_2 \cos \varphi I_m - a_1 \sin \varphi I_m = a_3 U_m$$

$$-4x - 1 = -4x + \varphi'(y); \quad \varphi'(y) = 1$$

alınır.

$$\varphi(y) = -y + C$$

Beləliklə

$$U = -4yx - y + C$$

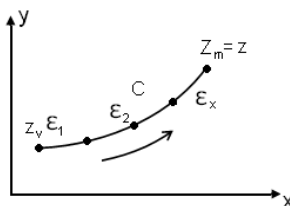
Analitik ifadə isə

$$\begin{aligned}
\omega &= U + jV = -4yx - y + C + j(2x^2 - 2y^2 + x) = \\
&= -4yx - y + C + j2x^2 - j2y^2 + jx = \\
&= 2j(x^2 + j2xy - y^2) + j(x + jy) + C = \\
&= 2j(x + jy)^2 + j(x + jy) + C = \\
&= 2jZ^2 + jZ + C
\end{aligned}$$

şəklində olur.

Kompleks kəmiyyətlərin inteqrallanması

Kompleks kəmiyyətlərin inteqralı həqiqi dəyişənli funksiyanın inteqralı kimi olub, lakin burada həqiqi dəyişənli kəmiyyət-lərdən fərqli olaraq inteqral-lama inteqrallama xəttindən asılı deyil (şək. 29).



Şək. 29

$$\int_C f(z) dz = \lim_{|\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\epsilon_k) \Delta z_k$$

İnteqralın xüsusiyyətləri:

- 1) $\int_C [f_1(z) \pm f_2(z)] dz = \int_C f_1(z) dz \pm \int_C f_2(z) dz$
- 2) $\int_C A f(z) dz = A \int_C f(z) dz$
- 3) Əgər C qövsü həndəsi olaraq C qövsünə uyğun gəlsə və istiqamətə əksidirsə, onda

$$\int_C f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

olar.

4) C qövsü C_1, C_2, \dots, C_n qövlərinin cəmindən ibarət olarsa

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \dots + \int_{C_n} f(z)dz$$

olar.

5. $\int_C dz = z - z_0$, çünki

$$\begin{aligned} & \Delta z_1 + \Delta z_2 + \Delta z_3 + \dots + \Delta z_n = \\ & = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \dots + (z_n - z_{n-1}) = z_n - z_0 \end{aligned}$$

6. Əgər $f(z) < M$ şərti C qövsünün bütün nöqtələrində ödənilərsə və qövsün uzunluğu l götürülərsə

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq M \cdot l$$

$$7. \left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_C |f(z)||dz|$$

Koşi teoremi

Əgər $f(z)$ C qapalı konturunda analitik funksiyadırsa, o eyni zamanda vahid əlaqəli sahədə bu konturla əhatə olunursa, onda

$$\int_C f(z)dz = 0$$

olur.

Belə qəbul edək ki, C müstəvi üzərindəki sahədə üçbucaq şəklindədir

$$\int_{C_A} dz = \int_{C_A} z dz = 0$$

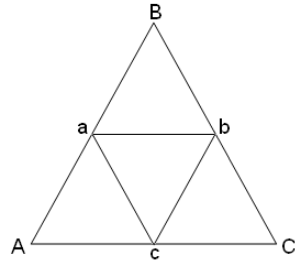
Tutaq ki,

$$\left| \int_{C_A} f(z)dz \right| = M$$

Üçbucağın tərəflərinin ortasını düzxətt parçaları ilə birləşdirsək onu dörd üçbucağa ayıra bilərik (şək. 30). Bu halda yuxarıdakı inteqral

$$\left| \int_{C_{\Delta 1}} f(z)dz \right| \geq \frac{M}{4}$$

Burada inteqrallama xətt üzrə aparıldığı üçün



Şək. 30

$$\left| \int_{C_{\Delta 1}} f(z)dz \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{C_{\Delta k}} f(z)dz \right|$$

olmalıdır.

Alınmış yeni üçbucaqları yenədə yuxarıdakı kimi hər birini dörd yerə bölmüş olsaq

$$\left| \int_{C_{\Delta L}} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^L}$$

Bu prosesi sonsuz dərəcədə davam etmiş
olsaq

$$\left| \int_{C_{\Delta}} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2}$$

burada

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M}{4^k} = 0$$

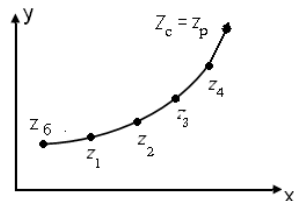
Beləliklə

$$\left| \int f(z) dz \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{C_{\Delta}^k} f(z) dz \right| = 0$$

Bununlada isbat olur ki,

$$\int f(z) dz = 0$$

Kompleks dəyişənli funksiyaların inteqrallını təyin etmək üçün müstəvidə iki nöqtə götürək. Bunlardan birincisinə Z_B , ikincisinə Z_C adını verək (şək. 31). Bu iki nöqtəni müstəvi üzərində birləşdirən xətti ixtiyari formada götürmək olar. Götürdüyü-müz xəttin



Şək. 31

uzunluğu P olan kiçik hissələrə bölək:

$$Z_B = Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_C = Z_P$$

Götürdüyümüz parçaların cəmini götürsək:

$$S = \sum_{k=1}^P f(\varepsilon_k)(Z_k - Z_{k-1})$$

haradakı ε_k – götürdüyümüz əyri üzərində götürülmüş ixtiyari nöqtədir.

Onu da qeyd etmək lazımdır ki, ε_k və Z_b, Z_C , eyni zamanda $Z_k - Z_{k-1}$ kompleks kəmiyyətlərdir. Buna görə də yuxarıda göstərilən cəm tərtib edilərkən kompleks kəmiyyətlər üzərindəki əməliyyatlardan istifadə edilir və alınan nəticə də kompleks olur. Burada götürülən parçaların ölçüsünü sonsuz kiçiklətməklə yuxarıda göstərilən cəmə inteqral kimi baxa bilərik. Bu şərtlə ki, bu parçaların ölçülərini bundan sonra kiçiltmiş olsaq, cəmdə öz təsirlərini göstərməsinlər:

$$I = \int_{Z_b}^{Z_C} f(z) dz$$

Bu formuladan görünür ki, əgər

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|Z_{n+1}|}{|Z_n|} > 1 \quad \text{və} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|Z_n|} > 1$$

olduqda yuxarıda göstərilən hər iki sıra dağılan olur.

Qüvvət sırası bildiyimiz kimi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\varepsilon - Z_0)^n$$

ifadə olunur. Burada $\varepsilon - Z_0 = Z$ əvəzləməsi daxil etsək

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$$

sıranın hər bir həddi kompleks müstəvidə təyin olunandır.

Abel teoremasına görə qüvvət sırası $Z_0 \neq 0$ nöqtəsində yığılarsa, bu sıra $|Z| < |Z_0|$ şərtini ödəyən istənilən Z nöqtəsində yığılandır.

Hər bir qüvvə sırası üçün $R = |Z_0|$ çevrəsi mövcuddur. Bu çevrənin daxilində sıra yığılan, xaricində isə sıra dağılıdır. Buna görə də R ədədi yığılma radiusu adlanır.

Həqiqi dəyişənli funksiyalardan fərqli olaraq, Z kompleks dəyişən kəmiyyət olduqda a^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ və $\operatorname{ctg} z$ funksiyaları mənalarını itirir.

Məlumdur ki, Z -in həqiqi qiymətlərində bu funksiyalar üstlü sıra şəklində ifadə oluna bilər:

$$e^z = 1 + \frac{Z}{1!} + \frac{Z^2}{2!} + \dots + \frac{Z^n}{n!} + \dots$$

$$\sin Z = \frac{Z}{1!} - \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{Z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos Z = 1 - \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{Z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Bura e^z funksiyada Z əvəzində iz götürmüş olsaq:

$$e^{jZ} = 1 + \frac{jZ}{1!} - \frac{Z^2}{2!} - \frac{jZ^3}{3!} - \frac{Z^4}{4!} - \frac{jZ^5}{5!} - \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} - \dots \right) + j \left(\frac{Z}{1!} - \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5!} - \dots \right) =$$

$$= \cos Z + j \sin Z$$

alırıq. Bu da bildiyimiz kimi Eylər formulası adlanır. Bu formulada Z -i $-Z$ -lə əvəz etsək

$$e^{-jZ} = \cos Z - j \sin Z$$

Beləliklə alırıq ki, triqonometrik funksiyaları üstlü funksiyalara çevirməklə onlar üzərində asanlıqla inteqrallama və diferensiaslama əməliyyatı aparıla bilər.

Göstərilən əvəzləmələri bilməklə yuxarıda verilən triqonometrik formulaların doğruluğunu isbat etməli.

Kompleks funksiyaların verilmiş xəyali hissəsinə görə analitik funksiyaları təyin etmək

$$v = 2x^2 - 2y^2 + x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x + 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -4y$$

Dolomber əlamətinə görə

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -4y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -4x - 1$$

Birinci tənlikdən

$$\partial u = -4y dx$$

$$\partial v = -4yx + \varphi(y)$$

$\varphi(y)$ tapmaq üçün alınan ifadəni diferensiallayıb

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x + \varphi'(y) \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -4x - 1$$

ifadəsində nəzərə alırıq.

ƏDƏBİYYAT

1. K.Quluzadə, M.Ağaməmmədov, N.Axundov, R.Babayev, C.Əsəgərov. Elektrotexnika, elektrik avadanlığı və sənaye elektronikasısı. Maarif nəşriyyatı, Bakı, 1977, 435 səh.
2. R.Z.Kazımsadə, C.S.Əsgərov. Elektrotexnika. Bakı, 2008, 345 səh.
3. C.S.Əsgərov, M.Ş.Ağaməmmədov, T.Ə.Əhmədova. Elektrotexnika və elektrik maşınları. Bakı, 2010, 437 səh.
4. Kazımsadə Z.İ. Elektrotexnikanın nəzəri əsasları, Bakı, 2010
5. Kazımsadə R.Z. Nəzəri elektrotexnika. Bakı, 2005.
6. Həmidov M.H. Elektrik təchizatı sistemlərində modelləşdirmə. Bakı, 2008, 187 s.

MÜNDƏRİCAT

	Səh.
1. Giriş	3
2. Kompleks dəyişənli kəmiyyətlər	7
3. Kompleks kəmiyyətlərin diferensialı	15
4. Adi diferensial tənliklər və onların energetik məsələlərin həllinə tətbiqi	32
5. Bernulli tənliyi	37
6. Elektrik dövrlərinin təhlili	38
7. Periodu $2l$ olan funksiya üçün Furye sırası	41
8. Sıranın əmsallarının təyini	45
9. Qeyri-sinusoidal funksiyaların tədqiqi	48
10. Diferensial tənliklərin köməyi ilə elektrik dövrlərində keçid proseslərinin təyini	55
11. Elektrik dövrəsinin əsas elementlərinin. Sinusoidal cərəyanlı dövrlərdə kompleks kəmiyyətlərin tətbiqi	67
12. Kompleks sahədə sıralar	72
13. Qeyri-sinusoidal funksiyanın sıraya ayrılması	76
14. Kompleks kəmiyyətlərin limiti	81
15. Kompleks kəmiyyətlərin törəməsi	81
16. Kompleks dəyişənli funksiya	86
17. Kompleks kəmiyyətlərin inteqrallanması	91
18. Koşi teoremi	92
19. Ədəbiyyat	98

**MUSTAFA HƏMİD OĞLU HƏMİDOV,
MEHMAN MÖVSUN OĞLU ABDULƏZİZOV,
AYNUR ELDAR QIZI HÜSEYNOVA**

ELEKTROTEKNIKADAN XÜSUSİ MƏSƏLƏLƏR

**orta ixtisas məktəbləri üçün
dərs vəsaiti**

Yığılmağa verilib: 29.05.2012, Çapa imzalanıb: 30.05.2012,
Format: 60x84 1/16. Çap vərəqi: 6,5, çapa ofset üsulu ilə,
Kağız əla növ, Sifariş 49, Sayı: 200. Qiyməti müqavilə ilə.

ADNA-nın mətbəəsi
Bakı, Azadlıq pr. 20